

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXIV

1927

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGrafo DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1927

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1927 (Anno V).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Matematica. — *Sulle funzioni intere di genere finito.* Nota⁽¹⁾ dei Soci Stranieri J. HADAMARD e E. LANDAU. [Traduzione di un estratto di carteggio fra gli Autori].

Prima lettera di Hadamard a Landau.

... Una particolarità importante del ragionamento, che Ella ebbe in precedenza a comunicarmi, sulle funzioni intere, si è - come ho avuto cura di rilevare nel « Bull. de la Société Math. de France » - che esso utilizza unicamente (riferendosi per fissar le idee al caso del genere zero) l'ipotesi

$$(1) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} M_r(\log |f|) = 0,$$

in cui $M_r(\log |f|)$ designa il massimo di $\log |f|$ sulla circonferenza di raggio r che ha il centro nell'origine delle coordinate. È questa la condizione necessaria indicata da Poincaré nella sua Memoria fondamentale del T. XI del « Bull. de la Société Math. de France », cosicchè a primo aspetto si potrebbe pensare che la (1) fosse insieme necessaria e sufficiente. Ciò non è, ben s'intende: quello che risulta dall'ipotesi (1), in virtù della Sua analisi è la convergenza - verso lo stesso valore di $f(\tilde{r})$ - del prodotto infinito

$$(2) \quad \prod \left(1 - \frac{\tilde{r}}{a_n} \right),$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1927.

allorchè gli zeri a_n si suppongono ordinati per modulo crescente; non la convergenza assoluta.

Ella ha risolto con un tratto di penna ciò che era stato considerato finora la parte più difficile della questione; ma bisogna pur tener conto della parte rimanente. Questo riesce senza difficoltà col metodo classico, fondato sulla formula di Jensen. Per esprimere che il prodotto (2) è assolutamente convergente e quindi, in definitiva, che la funzione f è di genere zero secondo la definizione classica, basta aggiungere alla (1) la condizione seguente:

$$(3) \quad \sum \frac{1}{n^2} M_n (\log |f|) \quad \text{converge.}$$

Resterebbe da esaminare se queste due condizioni sono indipendenti o se invece la (3) implica la (1), e inoltre da stabilire il risultato corrispondente per i generi > 0 .

J. HADAMARD.

Risposta di E. Landau a J. Hadamard.

... Le belle osservazioni sulle funzioni intere di genere zero da Lei fatte a proposito della mia nuova dimostrazione del Suo classico teorema, mi indussero, come è naturale, a riflettere sulle questioni che Ella pone. Io trovo che i Suoi risultati possono essere completati in modo molto espressivo.

In primo luogo l'alternativa se dalla convergenza di (3) segua o meno la (1) si può risolvere affermativamente. Infatti si ha

$$\frac{M_m}{4m} = m \frac{M_m}{(2m)^2} \leq \sum_{n=m+1}^{2m} \frac{M_n}{n^2} \rightarrow 0,$$

$$M_r \leq M_{[r]+1} = o([r] + 1) = o(r).$$

D'altra parte la mia dimostrazione del Suo classico teorema consente di sostituire alla (1) la condizione meno restrittiva

$$(1') \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_r (\log |f|)}{r} = 0.$$

E (1') è anche più immediata conseguenza di (3). Qualora infatti fosse da un certo n in avanti

$$\frac{M_n}{n} > p > 0,$$

sarebbe altresì

$$\frac{M_n}{n^2} > \frac{p}{n},$$

e quindi la serie (3) non potrebbe convergere.

D'ora innanzi non mi limiterò al caso particolare del genere zero; ma intendo riferirmi ad un genere finito qualsiasi, esponendo le cose in modo da non dover comunque ricorrere alla letteratura recente.

Prima di tutto ridimosterò, seguendo il mio nuovo ordine di idee, un teorema del Lindelöf⁽¹⁾, già da tempo conosciuto (che per metà risale a Poincaré). Con ciò non soltanto si raggiunge lo scopo più rapidamente che per lo innanzi, ma si viene anche a stabilire un risultato nuovo, sostituendo semplicemente lim all'originario lim.

Sia $f(x)$ una funzione intera, $f(0) = 1$. Il valore assoluto d'una generica radice ξ di $f(x)$ sarà designato con w e si porrà al solito

$$M_r = M_r(\log |f|) = \log \max_{|x| \leq r} |f(x)|.$$

Sia infine k intero e $\equiv 0$. Sussiste il seguente:

TEOREMA: La funzione intera $f(x)$ ha il genere $\equiv k$ allora e allora soltanto che sono verificate le due condizioni:

$$1^a \quad \sum_{w \leq r} \frac{1}{w^{k+1}}$$

è convergente (eventualmente ridotta a un numero finito, o addirittura anche nullo, di termini);

$$2^a \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_r}{r^{k+1}} = 0 \quad (2).$$

DIMOSTRAZIONE (3):

I. Sia $f(x)$ di genere $\equiv k$, con che si troverà soddisfatta la condizione 1^a, essendo d'altra parte

$$f(x) = e^{P(x)} \prod_{\xi} \mathfrak{S}_k \left(\frac{x}{\xi} \right),$$

dove $P(x)$ designa un polinomio di grado $\equiv k$ e

$$\mathfrak{S}_k(u) = (1-u) e^{\sum_{\lambda=1}^k \frac{u^\lambda}{\lambda}}.$$

(1) Cfr. PRINGSHEIM, « Mathematische Annalen », Bd. 58 (1904), p. 330.

(2) Nell'ipotesi che il genere sia $\equiv k$, dimostro addirittura che $M_r = o(r^{k+1})$, cosicchè in definitiva da 1^a e 2^a segue anche che (il genere è $\equiv k$, e quindi che) $M_r = o(r^{k+1})$.

(3) Nelle vecchie dimostrazioni si richiedeva una valutazione per difetto del prodotto canonico sopra certe circonferenze di raggio indefinitamente crescente; allora doveva certamente figurare in 2^a lim anzichè lim. Vi sono tuttavia nuove dimostrazioni del Suo teorema che non fanno uso della valutazione suddetta; ho in mente soprattutto la dimostrazione del sig. F. NEVANLINNA.

Si ha notoriamente per qualsiasi u

$$|\mathfrak{B}_k(u)| \leq e^{c(k)} |u|^{k+1}.$$

(In quanto, per $|u| \leq \frac{1}{2}$, è

$$|\mathfrak{B}_k(u)| = \left| e^{-\sum_{\lambda=k+1}^{\infty} \frac{u^\lambda}{\lambda}} \right| \leq e^{\frac{|u|^{k+1}}{1-|u|}} \leq e^2 |u|^{k+1};$$

e, per $|u| \leq \frac{1}{2}$, è

$$|\mathfrak{B}_k(u)| \leq (1 + |u|) e^{|u| + \dots + |u|^k} \leq e^{c_1(k)} |u|^{k+1}.$$

Vale dunque per ogni $t > 0$

$$\log \operatorname{Max}_{|x|=r} \left| \prod_{\xi} \mathfrak{B}_k \left(\frac{x}{\xi} \right) \right| \leq \sum_{w \leq t} \left\{ \log \left(1 + \frac{r}{w} \right) + \sum_{\lambda=1}^k \frac{1}{\lambda} \left(\frac{r}{w} \right)^\lambda \right\} + c(k) \sum_{w \leq t} \left(\frac{r}{w} \right)^{k+1},$$

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log \operatorname{Max}_{|x| \leq r} \left| \prod_{\xi} \mathfrak{B}_k \left(\frac{x}{\xi} \right) \right|}{r^{k+1}} \leq c(k) \sum_{w \leq t} \frac{1}{w^{k+1}},$$

e, facendo crescere indefinitamente t , se ne ricava

$$\log \operatorname{Max}_{|x| \leq r} \left| \prod_{\xi} \mathfrak{B}_k \left(\frac{x}{\xi} \right) \right| = o(r^{k+1}),$$

$$M_r \leq \operatorname{Max}_{|x| \leq r} |P(x)| + \log \operatorname{Max}_{|x| \leq r} \left| \prod_{\xi} \mathfrak{B}_k \left(\frac{x}{\xi} \right) \right| = o(r^{k+1}),$$

e quindi certamente 2^a.

II. Reciprocamente, siano soddisfatte le condizioni 1^a e 2^a. Siccome in tale ipotesi $f(x)$ è necessariamente della forma

$$f(x) = e^{P(x)} \prod_{\xi} \mathfrak{B}_k \left(\frac{x}{\xi} \right),$$

con P funzione intera, tutto si riduce a far vedere che

$$P^{(l)}(0) = 0 \quad \text{per} \quad l \geq k+1.$$

Ora

$$\frac{f'}{f}(x) = P'(x) + \sum_{\xi} \left(-\frac{1}{\xi - x} + \sum_{\lambda=1}^k \frac{x^{\lambda-1}}{\xi^{\lambda}} \right),$$

e quindi

$$P^{(l)}(x) = \left(\frac{f'}{f} \right)^{(l-1)}(x) + (l-1)! \sum_{\xi} \frac{1}{(\xi - x)^l}$$

$$= \lim_{R=\infty} \left\{ \left(\frac{f'}{f} \right)^{(l-1)}(x) + (l-1)! \sum_{w \leq R} \frac{1}{(\xi - x)^l} \right\} = \lim_{R=\infty} h^{(l)}(x; R),$$

dove rappresentiamo con $h(x; R)$ la funzione, regolare per $|x| \leq R$, definita da

$$\frac{f(x)}{\prod_{w \leq R} \left(1 - \frac{x}{\xi}\right)} = e^{h(x; R)} \quad , \quad h(0; R) = 0.$$

Sulla circonferenza $|x| = 2R$ si ha

$$\left| \prod_{w \leq R} \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) \right| \leq \prod_{w \leq R} (2 - 1) = 1;$$

risulta quindi per $|x| \leq R$

$$e^{\Re h(x; R)} \leq e^{M_2 R} \quad , \quad \Re h(x; R) \leq M_2 R.$$

Prendendo in considerazione lo sviluppo tayloriano di $h(x; R)$

$$h(x; R) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n; R x^n,$$

ne consegue

$$|h^{(l)}(0; R)| = l! |a_l; R| \leq \frac{2 \cdot l! M_2 R}{R^l},$$

da cui, tenendo conto della 2^a,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |h^{(l)}(0; R)| = 0;$$

dunque, finalmente,

$$P^{(l)}(0) = \lim_{R \rightarrow \infty} h^{(l)}(0; R) = 0.$$

Il teorema è così completamente dimostrato. Alla condizione 1^a si può anche attribuire una forma che non contiene le w .

All'uopo io pongo

$$\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_r(\log |f|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi$$

e affermo che la condizione 1^a equivale alla convergenza dell'integrale

$$(4) \quad \int_0^{\infty} \frac{\mathfrak{M}_r}{r^{k+2}} dr.$$

Infatti per $t > 0$ si ha

$$\begin{aligned} \sum_{w \leq t} \frac{1}{w^{k+1}} &= \sum_{w \leq t} \left\{ -\frac{(k+1)(\log r - \log w) + 1}{r^{k+1}} \right\}_w^{\infty} \\ &= (k+1)^2 \sum_{w \leq t} \int_w^{\infty} \frac{\log r - \log w}{r^{k+2}} dr \\ (5) \quad &= (k+1)^2 \int_0^{\infty} \frac{dr}{r^{k+2}} \sum_{w \leq \min(t, r)} \log \frac{r}{w}. \end{aligned}$$

Perciò segue da 1^a

$$\sum_{w \leq r} \frac{1}{w^{k+1}} \equiv \sum_{w \leq r} \frac{1}{w^{k+1}} \equiv (k+1)^2 \int_0^r \frac{dr}{r^{k+2}} \sum_{w \leq r} \log \frac{r}{w} = (k+1)^2 \int_0^r \frac{dr}{r^{k+2}} \mathfrak{M}_r,$$

e quindi la convergenza di (4). Viceversa dalla convergenza di (4) si trae, in base alla (5),

$$\sum_{w \leq r} \frac{1}{w^{k+1}} \equiv (k+1)^2 \int_0^\infty \frac{dr}{r^{k+2}} \sum_{w \leq r} \log \frac{r}{w} = (k+1)^2 \int_0^\infty \frac{dr}{r^{k+2}} \mathfrak{M}_r,$$

che involge la 1^a.

EDMUND LANDAU.

Seconda lettera di Hadamard a Landau.

... il fatto che la sostituzione del valore medio $\mathfrak{M}_r(\log |f|)$ al massimo M_r e, per conseguenza, della condizione

$$(3') \quad \int \frac{1}{r^2} \mathfrak{M}_r(\log |f|) dr \quad \text{converge}$$

alla (3) della mia lettera precedente, permette di ottenere un sistema di condizioni *necessarie e sufficienti* perchè la funzione intera f sia di genere zero costituisce uno dei risultati più notevoli di cui io abbia sentito parlare in Analisi. Sono assai sorpreso di apprendere, e non avrei mai immaginato che un tale risultato, anche quello meno completo, poichè Le è sufficiente $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_r}{r} = 0$, potesse ottenersi coi metodi anteriori: ciò torna a grande onore del signor Lindelöf.

Lo stesso fatto suggerirà forse alcune riflessioni interessanti ed utili. Evidentemente era assurdo *a priori* che una condizione necessaria e sufficiente potesse essere dedotta dalla considerazione esclusiva della quantità M_r , poichè ciò sarebbe in contraddizione coll'osservazione ben nota di Lindelöf-Boutroux che due funzioni f_1, f_2 di genere zero possono avere per somma una funzione di genere uno⁽¹⁾. Se dunque le cose vanno diversamente grazie all'introduzione di \mathfrak{M}_r , bisogna necessariamente che, negli esempi di Lindelöf e di Boutroux, come in ogni altro esempio analogo, si trovi soddisfatta la condizione (3') e non la (3): in altri termini, che il valore medio \mathfrak{M}_r cresca (in modo anormale) assai più lentamente del valore massimo M_r . Ciò può accadere sia perchè i valori prossimi al massimo sono

(1) La contraddizione apparisce con pieno rigore negli esempi del LINDELÖF, in cui si ha $f_2(x) = f_1(-x)$. Se infatti si pone $\varphi = f_1 + f_2$, $\psi = 2f_1$, la funzione ψ è di genere zero e la funzione φ di genere uno, sebbene si abbia costantemente

$$M_r(\log |\varphi|) \equiv M_r(\log |\psi|).$$

assunti soltanto sopra una frazione molto piccola della circonferenza di raggio r , sia perchè la presenza di valori negativi molto grandi del logaritmo — ossia molto piccoli del modulo — determinano un enorme abbassamento della media. È certo questa seconda eventualità che si presenta negli esempi di Lindelöf e di Boutroux, nei quali gli zeri della funzione sono tutti reali e dello stesso segno, talchè sulla maggior parte della circonferenza $\log |f|$ non è diminuito che di una frazione insignificante del suo valore massimo.

Il valore zero di f ha dunque in questo caso un carattere eccezionale: per esempio $f(z) = a$ (a costante arbitraria non nulla) deve essere di genere uno: ed eccoci in relazione col teorema di Picard...

J. HADAMARD.

Astrofisica. — *Osservazioni dell'eclisse parziale di sole del 29 giugno 1927 eseguite in Arcetri.* Nota del Corrisp. G. ABETTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Il meccanismo neurochimico della inibizione vagale nel cuore di mammifero.* Nota II ⁽¹⁾ del Corrisp. C. FOÀ.

Ho esposto nella nota precedente i risultati positivi e negativi degli esperimenti fatti da numerosi autori per cercare se valga anche pei mammiferi il meccanismo neurochimico della inibizione vagale, dimostrato da Loewy pel cuore di rana isolato e perfuso con Ringer.

Ho anche cercato di dimostrare che i risultati negativi ci convincono bensì non esistere nel vivente una trasferibilità per via del sangue dell'eccitamento del vago a punti lontani, e esso restare invece strettamente localizzato nel territorio innervato dalle fibre eccitate, ma che quei risultati non sono sufficienti a dimostrare che la « sostanza vagale » non si produca nel cuore dei mammiferi. Bisognava trovar modo di snidarla dal luogo ove essa si fosse prodotta, cioè dalla compagine del miocardio, prima che si distruggesse, e con mezzi atti ad allontanarla di là senza alterarla. Non dunque nel sangue doveva essere cercata, che la distrugge, bensì nel Ringer-Locke

(1) Presentata nella seduta del 1^o giugno 1927.

che la conserva inalterata. E d'altra parte non dalla cavità del cuore poteva esser tratta, ove potrebbe non diffondere, bensì dalle vene coronarie che l'avrebbero potuta raccogliere dal miocardio.

Non altrimenti fece, e fu il solo, Jendrassik, quando ricercò la sostanza vagale nel liquido di Ringer che aveva perfuso un cuore isolato di coniglio, durante periodi di inibizione vagale. Quel liquido aveva acquistato il potere di eccitare le contrazioni della muscolatura intestinale, e l'autore attribuisce questa virtù alla presenza di una sostanza vagale trapassata nelle vene coronarie durante il periodo della inibizione.

Perchè la sostanza vagale passerebbe nel Ringer? Loewy nella sua lettera al Patrizi, che ho citato nella precedente nota, ricorda che egli adopra la soluzione di Ringer perchè essa non è fisiologica ed accresce la permeabilità cardiaca, onde quanto più a lungo dura l'esperimento, tanto più la permeabilità s'accresce, e che ciò malgrado, la sostanza vagale non passa tutta nel Ringer, ma soltanto ne passa $\frac{1}{50}$ di quella che si forma nella compagine del miocardio. In un cuore perfuso con sangue la permeabilità è inapprezzabile e pressochè nullo è il transito della sostanza vagale. Chè, se anche essa passasse nel sangue, vi sarebbe quasi immediatamente distrutta.

Il metodo che ho adottato è molto semplice.

Un cuore di coniglio viene isolato e perfuso con Ringer-Locke secondo il metodo di Langendorff nell'apparecchio di Herlitzka, mantenendolo in connessione coi due vaghi che vengono tagliati quanto più alto possibile nella regione del collo, e posti poi, nella camera dell'apparecchio, sopra due elettrodi di platino per poterli faradicamente eccitare.

La sopravvivenza dei vaghi, misurata dalla loro eccitabilità, dura circa 20 minuti, se le operazioni di isolamento, sospensione, ecc., si svolgono rapidamente. Non appena si sia stabilito un buon regime di circolazione nelle coronarie, ed il liquido di perfusione fuoresca privo di sangue, e le pulsazioni sian regolari, si raccoglie in un bicchiere il liquido che ha perfuso il cuore e lo si pone in termostato (A). Poi si stimolano i vaghi a più riprese con intervalli di riposo.

Prontamente si manifestano nel tracciato gli effetti inotropi e cronotropi negativi e durante i periodi di inibizione vien raccolto il liquido di perfusione in un bicchiere distinto (B).

Poi mediante una siringa di cui l'ago viene infitto nel tubo di gomma prossimo alla canula infilata nell'aorta, si introduce nel circolo coronario il liquido A, ed attesone l'effetto sul cuore, si inietta poi il liquido B.

Altre volte le prove vengono eseguite sopra un secondo cuore isolato e non mai prima sottoposto alla stimolazione dei vaghi.

Il liquido di Ringer-Locke che è passato attraverso il miocardio, quando venga riadoperato come liquido di perfusione dello stesso cuore o non ha effetto alcuno, o determina soltanto una lieve e fugace diminuzione dell'altezza

delle pulsazioni. Lo stesso accade se con quel liquido viene perfuso un altro cuore *nuovo* isolato (fig. 1).



Fig. 1. - Cuore isolato di coniglio. In ↑ passa Ringer che ha già perfuso lo stesso cuore.

Quando invece si adopera il liquido raccolto durante il periodo della inibizione vagale, questo esercita prontamente un'azione inotropa e cronotropa negativa (fig. 2) che appare *più intensa e più duratura* di quella prodotta dalla stimolazione faradica dei vaghi. Anche il ritorno al ritmo ed all'altezza normale delle pulsazioni è più lento dopo l'azione del « liquido di inibizione » che non dopo la fine dell'eccitamento faradico dei vaghi.



Fig. 2. - Lo stesso cuore della fig. 1. In ↑ passa Ringer che ha perfuso lo stesso cuore durante 60'' di inibizione vagale.

È notevole il fatto che quando già il vago è diventato completamente ineccitabile anche per stimoli molto intensi, rimane invece ancora perfettamente efficace il liquido *vagale*, il che fa ritenere che all'esaurimento del tronco nervoso, non corrisponda quello delle terminazioni vagali nel miocardio.

Se al liquido *vagale* si aggiunge sangue defibrinato, anche in piccole dosi, esso perde molto rapidamente la sua azione inibitrice.

Si constata che perfondendo il cuore con liquido *vagale*, dopo un passaggio inefficace dello stesso liquido inattivato dal sangue, la influenza inibitrice è più intensa, forse perchè il sangue ha restaurato la eccitabilità delle terminazioni vagali (fig. 3).

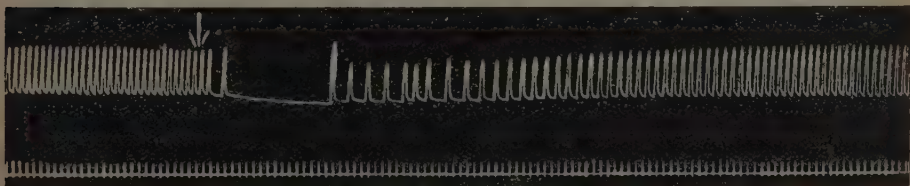


Fig. 3. - Lo stesso cuore di cui alla fig. 4, ma dopo che esso è stato perfuso con Ringer contenente sangue. In ↑ passa Ringer vagale diluito come al tracciato 4. Notisi il maggiore effetto inibitore.

Diluendo variamente il liquido *vagale* con Ringer nuovo, si ottengono effetti inibitori proporzionalmente minori (figg. 4 e 5).



Fig. 4. - Continuatione della esperienza di cui alla fig. 2. In ↓ passa lo stesso liquido *vagale*, ma diluito a parti uguali con Ringer nuovo.

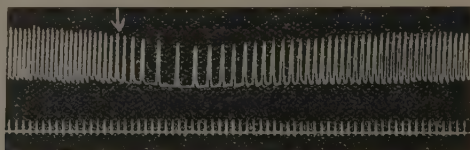


Fig. 5. - Come alle figg. 2 e 3, ma il Ringer *vagale* è diluito con due parti di Ringer normale.

Iniettando nel serpentino che porta il Ringer al cuore, 20 cc. di liquido *vagale*, non appena esso incomincia a passare nel miocardio, si inizia l'effetto inibitore, ma questo cessa molto prima che tutto il liquido *vagale* sia passato. Verosimilmente ciò dipende dal fatto che le terminazioni vagali perdono temporaneamente la loro eccitabilità, e non la riacquistano se non dopo un periodo di riposo. Questo fatto concorre a spiegare non soltanto come avvenga che l'eccitamento del vago non consegua che un effetto temporaneo, ma anche perchè, nelle esperienze di Loewy, il Ringer *vagale* contenuto nel cuore di rana consenta a questo di riprendere le pulsazioni dopo un periodo inibitorio, mentre è capace di inibire un cuore nuovo.

Queste esperienze dimostrano che la inibizione vagale anche nel cuore di mammifero si accompagna con la liberazione di una sostanza ad azione inibitrice e che questa, con ogni probabilità, si distrugge rapidamente nella compagine del miocardio ove si è prodotta, e non passa nel circolo refluo coronario, se non quando sono alterate le condizioni di permeabilità della fibra cardiaca, come avviene perfondendo il cuore isolato con la soluzione di Ringer-Locke. In condizioni di normale permeabilità della fibra, ed anche in virtù del potere che ha il sangue di alterare la sostanza vagale, questa non passa nel sangue delle vene coronarie, e tanto meno perciò può essere ritrovata nel sangue della grande circolazione ⁽¹⁾.

(1) Nell'atto di correggere le bozze di questa nota, mi accade di leggere due scritti di P. RYLANDT, intitolati: *La «transmission humorale de l'action des nerfs cardiaques» de Loewy chez le mammifère* («C. R. Soc. de Biol.», 8 gennaio e 26 marzo 1927).

Vi è descritto un esperimento molto simile al mio, con risultato identico ed analoghe conclusioni. L'autore belga ha trovato che anche il sangue defibrinato o irudinato,

Biologia. — Su l'attenuazione del potere sessuale dei « Gameti impuri », che compiono la « 2^a Coniugazione accessoria » in « *Cryptochilum echini* » Mps. Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. A. Russo.

I Gametogeni impuri, formati per divisione degli Individui misti, costituiti, alla loro volta, dagli exconiuganti dopo la Coniugazione principale, si dividono due volte, come si è detto in una Nota precedente ⁽²⁾.

Con la 1^a divisione si formano due Gameti impuri con micronucleo globuliforme, che possono coniugare e produrre la 1^a Coniugazione acces-

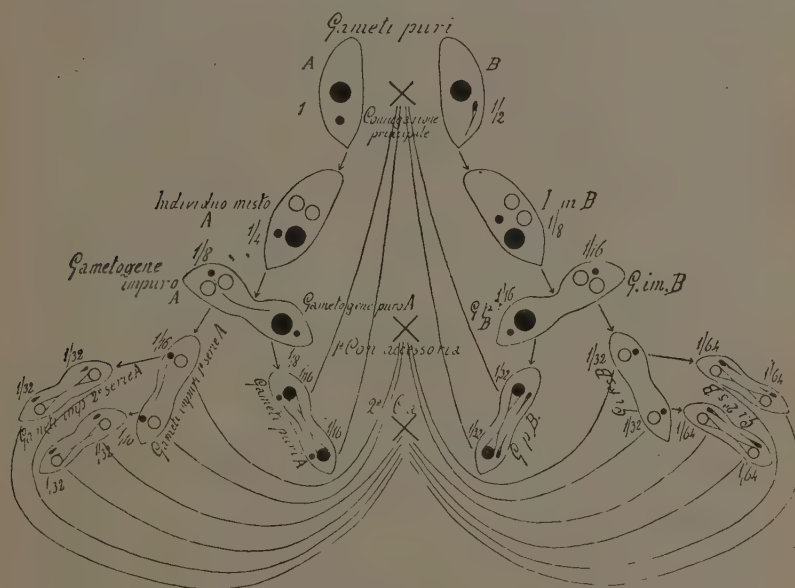


Fig. 1.

Rappresentazione delle tre categorie di Gameti, che si formano durante il ciclo evolutivo di *Cryptochilum echini*, e delle tre forme di coniugazione. Sono rappresentate le due serie A e B, che hanno origine dai Gameti puri A, con micronucleo globuliforme, e B, con micronucleo virgoliforme.

I numeri indicano il valore diverso dei micronuclei nella serie d'individui A e nella serie d'individui B.

dopo aver perfuso un cuore isolato di gatto durante la inibizione vagale, esercita un'azione inibitrice sovra un altro cuore, ma che esso non conserva a lungo tale potere, ed in ogni caso questo è meno intenso di quello del liquido di Ringer nelle identiche condizioni.

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1927.

(2) Russo A., I Gametogeni impuri, i Gameti impuri e le Coniugazioni accessorie in « *Cryptochilum echini* » Maupas, « Rendiconti R. Acc. N. dei Lincei », Roma, 1925, vol. I, ser. 6^a.

soria; con la divisione di questi si produce una seconda serie di gameti impuri, distinti dai primi per avere il micronucleo allungato, spiniforme l'uno, piriforme l'altro, come si osserva nello schema qui annesso, destinato a far vedere le tre sorta di Gameti e le tre diverse forme di coniugazione. Tali gameti possono anche copulare tra loro e perciò formano la 2^a Coniugazione accessoria, la quale, come la 1^a, dovrebbe avere per effetto la produzione di *Gametogeni puri*, produttori di nuovi *Gameti puri*, atti a rinnovare il ciclo principale. Come meglio si rileverà dal contenuto di questa Nota, non può asserirsi però che da questa 2^a coniugazione si ricostituiscano *forme pure*, perchè gli stadii finali delle due coniugazioni accessorie si confondono fra di loro.

Nella 2^a Coniugazione accessoria, le modalità con cui i micronuclei virgoliformi compiono le prime divisioni sono però diverse da quelle che si osservano nei micronuclei globuliformi dei gameti, che svolgono la 1^a Coniugazione. Mentre questi, difatti, si dividono con il processo mitotico, quelli seguono un processo affatto diverso, consistente nella disposizione della sostanza nucleare in fili paralleli, che indi si raggruppano in due fasci anche paralleli tra loro.

Per intendere il significato biologico dei fatti esposti in questa Nota occorre rilevare che, durante il ciclo di *Cryptochilum*, quel particolare processo di divisione fu osservato soltanto nel micronucleo virgoliforme di uno dei *Gameti puri*, nella Coniugazione principale, durante la quale, come fu esposto in altra Nota⁽¹⁾, tale micronucleo, oltre a dividersi con processo atipico, si scinde con velocità minore del micronucleo globuliforme dell'altro gamete. Ma, oltre a tali particolari caratteri, è da osservare anche che i nuclei, derivati dal micronucleo virgoliforme del gamete puro, hanno un ufficio secondario nella costituzione dell'apparato nucleare degl' *Individui misti*, in quanto essi forniscono solo due macronuclei, che sono elementi transitorii, destinati a sparire durante il ciclo, perchè riassorbiti dal protoplasma.

I caratteri sopra cennati, inerenti alle particolari attività del micronucleo virgoliforme del gamete puro, fanno ritenere che in questo il potere sessuale, se così si vuol denominare il complesso delle manifestazioni vitali inerenti al suo ufficio nella funzione riproduttiva, sia minore, in confronto di quello, che manifesta l'altro gamete, che ha il micronucleo globuliforme⁽²⁾.

Tali caratteri possono farci interpretare gli analoghi fenomeni, che si osservano nei Gameti impuri, che compiono la 2^a Coniugazione accessoria. Si fa anzitutto rilevare che questi gameti si accoppiano con difficoltà, come

(1) Russo A., *Sul differente ritmo di divisione dei micronuclei durante la Coniugazione vera in « Cryptochilum echini »*, Ibidem, 1924, vol. XXXIII, ser. 5^a.

(2) Alle differenze sopra rilevate, che distinguono i due Gameti puri, occorre aggiungere che la quantità della sostanza nucleare è diversa, essendo nel micronucleo virgoliforme la metà di quella del m. globuliforme.

viene dimostrato dai particolari fenomeni, che in essi si compiono perchè avvenga la copula. Mentre, infatti, nella *Coniugazione principale* e nella 1^a *Coniugazione accessoria* i gameti si saldano subito, mostrandosi uniti, fin dall'inizio della coniugazione, con una larga superficie di contatto, quelli che debbono compiere la 2^a *Coniugazione accessoria* sono lassamente uniti da un prolungamento protoplasmatico, che viene emesso dalla regione anteriore in uno dei gameti e dalla regione ventrale, vicino il citostoma, nell'altro gamete, talchè, potendosi facilmente staccare, essi si trovano spesso isolati nei preparati.

Ma, oltre al carattere su indicato, è da osservare che, mentre nelle due prime sopradette coniugazioni l'unione dei gameti avviene senza che l'attività nucleare vi partecipi, nella 2^a *Coniugazione accessoria*, come già fu detto in altra Nota⁽¹⁾, i micronuclei dei gameti emettono una parte della loro sostanza, la quale, localizzandosi nel punto in cui essi sono a contatto, pare che ne determini la più intima unione.

A tali caratteri, che dimostrano la poca attitudine di questi gameti a copulare, va aggiunto il fatto che il processo divisorio dei loro micronuclei, durante la coniugazione, è identico a quello che si osserva nel micronucleo virgoliforme del gamete puro. E poichè questo, per le sue manifestazioni vitali, fu ritenuto avere una potenza sessuale minore del gamete puro con micronucleo globuliforme, per analogia può ritenersi che anche i gameti impuri, che compiono la 2^a *Coniugazione accessoria*, abbiano la stessa potenza attenuata.

*
* *

Riassumo qui appresso le trasformazioni, che si avverano nei micronuclei dei gameti impuri, che compiono la 2^a *Coniugazione accessoria*, e riproduco alcuni stadii tra i più caratteristici.

I micronuclei a riposo hanno forma allungata (stadio *a*) e nel primo momento della copula emettono dalla loro parte sottile della sostanza nucleare (stadio *b*), che, localizzandosi nel punto d'incontro dei gameti, ne agevola l'unione. Nella parte ingrossata, la cromatina, in un primo tempo, è compatta, ma subito si conforma in reticolo, che poi si risolve in fili cromatici paralleli fra loro. Questi si raggruppano in due fasci (stadio *c* e *d*),

(1) Russo A., *Sopra una sostanza siderofila, emessa dal micronucleo dei Gameti impuri, derivati dalla 2^a divisione dei Gametogeni impuri in « Cryptochilum echini »*, e sulla sua destinazione, « Rendiconti R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. II, ser. 6^a, Roma, 1925.

Da questa Nota risulta che l'emissione di sostanza nucleare avvenga prima della coniugazione; ma, per la facilità con cui i Gameti possono staccarsi nel primo momento della loro unione e per il fatto che nel primo momento di tale processo si è osservata anche l'emissione suddetta, si è più propensi a ritenere che il fenomeno si avveri durante la copula.

che, slittando l'uno su l'altro, si allontanano, restando uniti da prima con lacinie di sostanza nucleare e poi da un filamento esilissimo, onde la figura nucleare assume la forma di un manubrio, come nello stadio analogo della divisione diretta.

I due primi nuclei, formati per divisione atipica, compiono, con lo stesso processo, un'altra scissione (stadio *e*), per cui, come nella 1^a *Coniugazione*

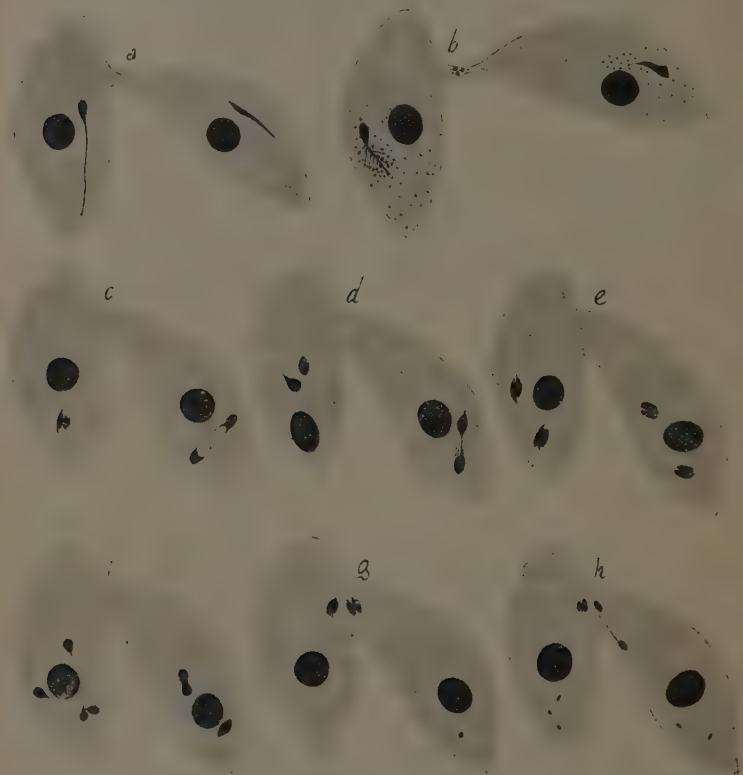


Fig. 2.

Stadii principali della 2^a Coniugazione accessoria fra Gameti impuri della 2^a serie, formati per divisione dei Gameti impuri, formanti la 1^a serie, come fu rappresentato nella figura precedente.

Per la spiegazione delle lettere vedasi il testo.

gazione accessoria, si costituiscono in ciascun gamete quattro nuclei (stadio *f*), dei quali tre vengono riassorbiti dal protoplasma. Il nucleo superstite si porta nel punto d'incontro dei gameti, dove si compie una 3^a divisione, con le stesse modalità avanti descritte (stadio *g*).

A questo stadio, nel punto d'unione dei gameti, si osservano, l'uno di fronte all'altro, due nuclei, ciascuno dei quali, in un determinato momento, è costituito da due fasci di fili cromatici paralleli, simili a due fusi contigui, che ricordano la figura, data da varii ricercatori per rappresentare, in altri Ciliati, il momento in cui il *nucleo migrante* si unisce con quello *permanente*.

Da quanto sopra si è detto, appare evidente però che nella 2^a *Coniugazione accessoria* di *Cryptochilum*, non si tratti dell'unione di due nuclei, ma della divisione di un solo nucleo, il quale si scinde con un particolare processo atipico. Difatti, nelle fasi successive, i due fasci si allontanano tra loro, rimanendo, come si è detto per le precedenti divisioni, connessi da lacinie di sostanza nucleare (stadio *b*) e poi da un filamento sottile, di modo che uno dei nuclei, risultanti dalla divisione, rimane nel punto in cui i due gameti sono connessi, mentre l'altro se ne allontana e si situa nella regione posteriore vicino il macronucleo.

La fase finale della divisione del nucleo superstite è simile a quella descritta nella 1^a *Coniugazione accessoria*, come si rileva da una mia Nota precedente ⁽¹⁾, per cui, a cominciare da questo stadio, la ricerca diviene incerta, non potendosi più distinguere quale di tali stadii appartiene alla 1^a e quale alla 2^a *coniugazione accessoria*. Due possibilità quindi si presentano, cioè che i nuclei, rimasti nella regione, in cui i gameti sono a contatto, migrando nel gamete vicino e dividendosi ulteriormente, formino l'apparato nucleare di *Gametogeni puri* e quindi di nuovi *Gameti puri*, che rinnovano il ciclo principale, come si è detto che avvenga nella 1^a *Coniugazione accessoria* ⁽²⁾, ovvero che i nuclei stessi, dopo lo stadio sopra descritto, non si evolvano più; per il diminuito potere sessuale dei Gameti, per cui la 2^a *Coniugazione accessoria* sarebbe sterile.

(1) Russo A., *La 1^a Coniugazione accessoria tra Gameti impuri in «Cryptochilum echini» Maupas*, «Rend. R. Acc. Nazionale dei Lincei», vol. II, ser. 6^a, Roma, 1925.

(2) Russo A., vedi Nota sopra citata.

Biologia. — *Imitazione di forme organiche collo stearato di sodio* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del Socio straniero L. A. HERRERA.

Per meglio studiare le forme già osservate coll'olio e la gasoline ⁽³⁾ io ho separato l'azione dei diversi acidi grassi dell'olio, cominciando dall'acido stearico.

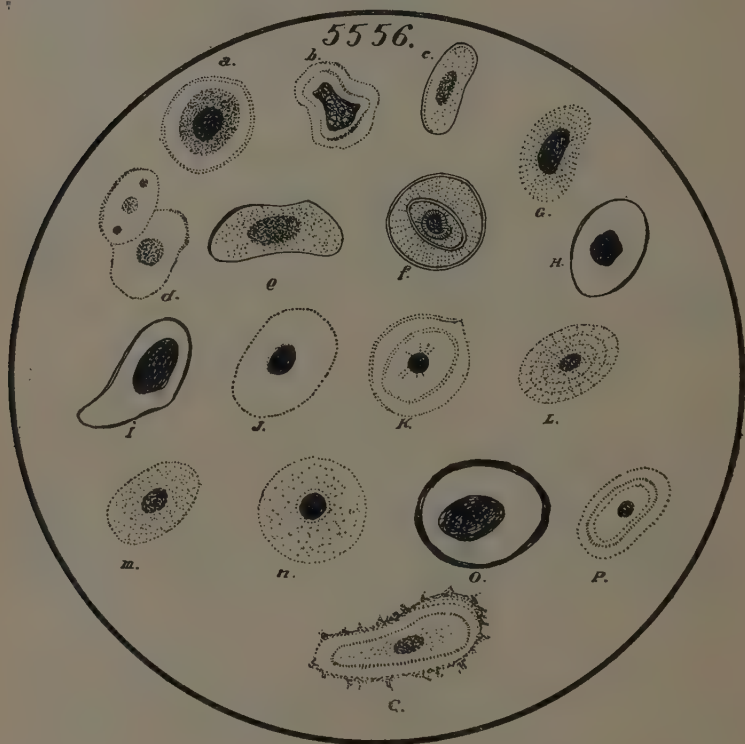


Fig. 5556 I.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto degli alti studi biologici di Messico.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1927.

(3) A. L. HERRERA, *Sull'imitazione delle amebe in movimento, infusori ed altre strutture e forme organiche e cellulari*. «Memorie della R. Acc. dei Lincei», Classe di Scienze Fisiche ecc., 1926 serie, vol. II, fasc. n. 8, 195.

TECNICA. — Esperienza n. 5556. Gennaio 8, 1927.

Gasolina comune ccm³. 500

Acido stearico puro gr. 1

Si discioglie e vi si aggiunge qualche goccia di soluzione di soda caustica al 14 % colorata col nero per sapone. Si osserva al microscopio in una scatola Petri.

RISULTATI. — Sotto l'influenza della pressione osmotica, delle variazioni della tensione superficiale e della cristallizzazione incompleta si ha produzione d'una varietà immensa di forme organiche che si conservano assai bene nella gasolina (fig. 5556 I). Vi si vedono dei miceli, globuli il contenuto dei quali mostra delle contrazioni e palpitazioni irregolari e cambiamenti di forma che finiscono in quella della sfera, getti e vortici, va e viene, segmentazioni, forme di amebe vacuolizzate, colpoidi che si succhiano mutualmente, e cellule nucleate. Ecco le figure copiate accuratamente dal disegnatore, colle forme naturali imitate (fig. 5556). Tutte si gonfiano lentamente nella soluzione di gasolina ed olio d'oliva in alcune ore od in più giorni, per idratazione dello stearato di sodio coll'acqua della soluzione di soda. Le germinazioni in forma di tubo si producono in 8-10 giorni.

1-2. Uovo di *Ascaris nigrovenosa*. Ingrandimento 350 d. 1° ed 2° stati di segmentazione.

Griffith and Henfrey. « The Micrographic Dictionary ». London 1845, p. 134, figg. 106-107.

8-9. Imitazione. Stearato di sodio.

3-7. *Gloeocapsa polydermatica*. Ktz. Ibid., Pl. 3, fig. 4.

11-15. Imitazione.

4-5. Globulo di saliva. Ibid., Pl. 1.

12-13. Imitazione.

6. *Actinothyrium graminis* (molto ingrandita). Ibid., p. 15, fig. 4.

14. Imitazione.

10. Sferolita di stearato di sodio.

17. *Anguillula tritici*. Individuo imperfetto. Ibid., Pl. 16, fig. 6d.

16. Imitazione.

18. Basidiospore del *Tricholoma virgatum*. Quattro spore giovani, con nucleo. Belzug. « Anatomie et physiologie végétales ». Paris, 1900, p. 1168, fig. 1581k.

19-21. Imitazione.

22. Sporangio di *Mucor mucedo*. Ibid., p. 1148, fig. 1537.

26. Imitazione.

23. Filamenti sporangiferi di *Pilobolus roridus*. Ibid., p. 1150, figura 1541-I.

24. Sporangio di *Mucor mucedo* dopo la disseminazione delle spore. Ibid., p. 1153, figg. 1544-1546, 11°.

25. Basidio di *Auricularia sambucina*. Sterigmato e spore mature. Secondo Brefeld. Ibid., p. 1170, fig. 1583 c.

30. *Peronospora calotheca*. Spore in germinazione. Ibid., p. 1155, figg. 1549-1554, III.

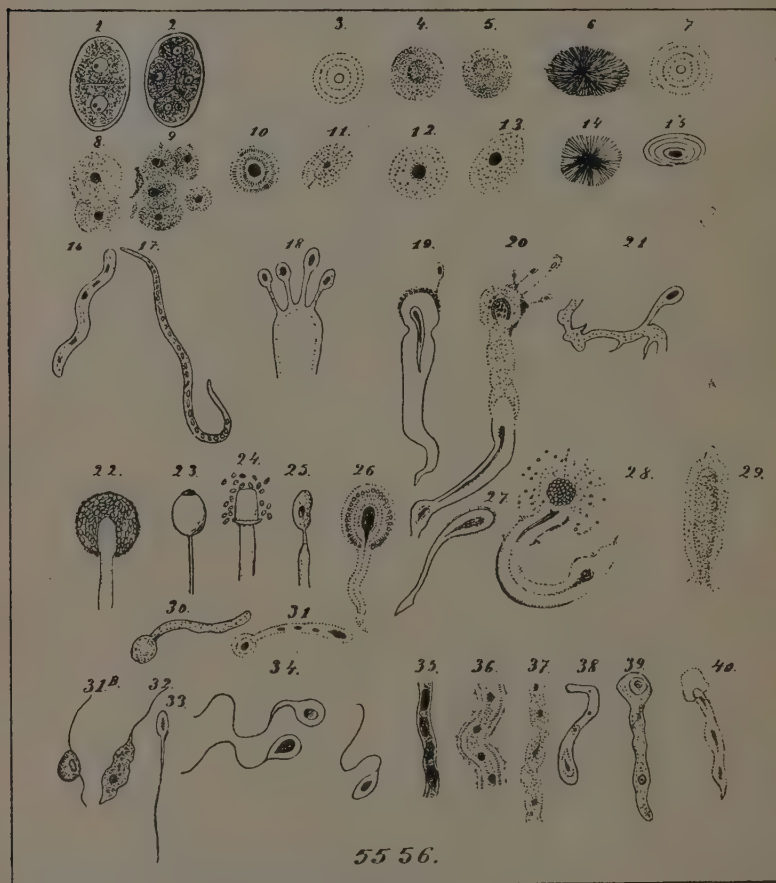


Fig. 5556.

26-31. Imitazione.

31. B. Zoosporo di *Peronospora umbelliferarum*. Griffith and Henfrey, l. c., Pl. 46, fig. 17.

32. Spore germinative ed ameboidi di *Stemonitis obtusata*. Ibid., Pl. 46, fig. 10.

33. Spermatozoe di verro. E. A. Schafer. «The Essentials of Histology». Philadelphia and New York, 1917, p. 394, fig. 551 g.

34. Imitazione.

35-38. Tubi nucleati.

39. Tubo pollinico di *Pinus strobus*. Belzug., l. c., p. 902, fig. 1124.

40. Imitazione.

ESPERIENZA n. 5560. Gennaio 15, 1927.

Gasolina ccm. 3.500

Acido stearico gr. 2

Si discioglie, si aggiungono alcune gocce di soluzione di soda caustica al 14 % colorata col nero di sapone.

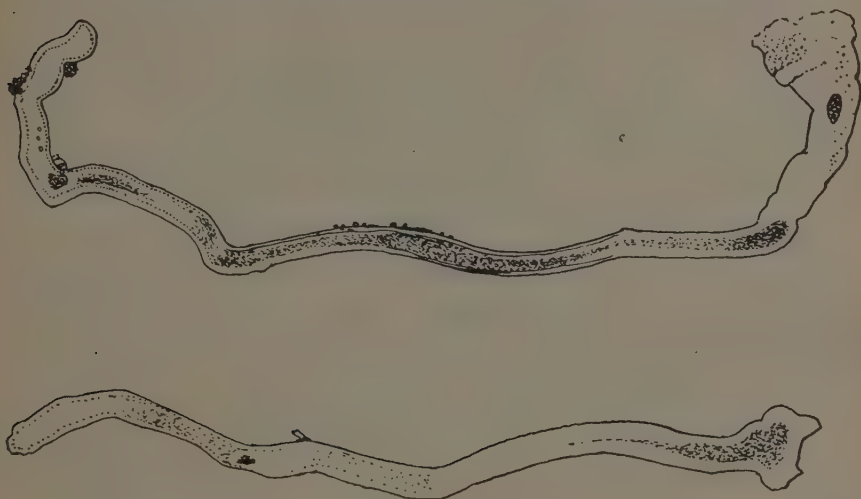


Fig. 5560.

Cellule dai grandi nuclei oscuri, germinazioni visibili ad occhio nudo trasparente e che mostrano alcuni nuclei irregolari. L'accrescimento non è dovuto a differenze di densità, come nelle pseudo-piante di Leduc e Traube ma al gonfiamento dello stearato di sodio nella soluzione di gasolina ed acido stearico, che è meno densa della soluzione di soda inferiore. Questa osservazione è assai interessante poichè mostra un caso di morfogenia per gonfiamento di un biocolloide, confermando le idee di Fischer e Mac Dougal che spiegano l'accrescimento degli organismi colla sintesi e gonfiamento dei biocolloidi⁽¹⁾ (fig. 5560).

(1) Mac DOUGAL, *The distentive agencies in the growth of the cell*. «Proceedings of the Society for Experimental Biology and Medicine», 1921, XIX, p. 103-110. «Annual

Io spero di continuare queste ricerche. Esse mi hanno dimostrato l'importanza degli acidi grassi nella morfogenia: essi esistono d'altronde in abbondanza negli organismi in diverse combinazioni.

Martin H. Fischer ha determinato esattamente le proprietà di gonfiamento dello stearato di sodio e tali risultati dovranno essere confrontati colle mie imitazioni ⁽¹⁾.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui funzionali multilineari e di grado superiore.* Nota di R. CACCIOPOLI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

In una Nota precedente ho studiata la rappresentazione analitica dei funzionali che dipendono linearmente da più funzioni di più variabili. Mi propongo ora innanzi tutto di estendere quelle considerazioni ai funzionali di grado qualunque; di esaminare poi più da vicino le peculiarità della rappresentazione analitica di simili funzionali, ed infine di generalizzare questa, primitivamente definita per le sole funzioni continue, per tutte le funzioni di Baire.

1. Il teorema generale concernente la rappresentazione dei funzionali multilineari è il seguente:

Sia A un funzionale dipendente linearmente dalle funzioni

$$\varphi(x_1 \dots x_m) \quad , \quad \psi(y_1 \dots y_n), \dots$$

definite rispettivamente negli insiemi I_1, I_2, \dots Sarà

$$A[\varphi, \psi, \dots] = \iint \dots \int_I \varphi(x_1 \dots x_m) \psi(y_1 \dots y_n) \dots \\ \dots dx_1 \dots dx_m dy_1 \dots dy_n \dots u(x_1 \dots x_m y_1 \dots y_n \dots),$$

ove I è l'insieme dei punti di coordinate x, y, \dots , le cui coordinate x appartengano a punti di I_1 , le y a punti di I_2 , ecc., la funzione u è definita in

Report of the Director, Department of Botanical Research». Carnegie Institution of Washington, 1921, p. 43-75. MARTIN H. FISCHER, *Hydratation*, &. «Science». New York 1918, pp. 143-148.

(1) MARTIN H. FISCHER, GEORGE D. Mc. LAUGHLIN et MARIAN O. HOOKER. «Soaps and Proteins». New York J. Wiley & Sons, Inc. 1921, pp. 20, 26, 43, 54, 56, 58, 59.

(2) Nella seduta del 23 giugno 1927.

un dominio rettangolare racchiudente I, e l'integrale di Stieltjes a secondo membro è limite delle somme

$$\sum \Delta_{i_1} \dots \Delta_{i_m} \Delta_{j_1} \dots \Delta_{j_n} \dots u \cdot \varphi_{i_1 \dots i_m} \psi_{j_1 \dots j_n} \dots$$

La funzione u è tale che sia limitato l'insieme numerico

$$\sum \alpha_{i_1 \dots i_m} \beta_{j_1 \dots j_n} \dots \Delta_{i_1} \dots \Delta_{i_m} \Delta_{j_1} \dots \Delta_{j_n} \dots u,$$

se si mantengono limitate le quantità α, β, \dots

Questo teorema può essere esteso ulteriormente, applicandolo alla rappresentazione dei funzionali di grado superiore.

Un funzionale continuo $A[f]$ è detto di grado n (ed omogeneo) se, quali che siano le funzioni continue f_1 ed f_2 , la funzione dei parametri λ_1 e λ_2

$$A[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2]$$

è un polinomio omogeneo di grado n .

La rappresentazione di un funzionale di grado n si deduce subito da quello di un funzionale multilineare. Sia infatti $A[f(x_1 \dots x_n)]$ il funzionale in questione. Consideriamo l'altro $B[f_1 \dots f_n]$ delle n funzioni di m variabili $f_1, f_2 \dots f_n$, definito come segue:

$$\begin{aligned} B[f_1 \dots f_n] = & A \left[\left[\sum_i^{1, n} f_i \right] \right] - \sum_b^{1, n} A \left[\left[\sum_i^{1, n} f_i - f_b \right] \right] + \sum_{b \neq k}^{1, n} A \left[\left[\sum_i^{1, n} f_i - f_b - f_k \right] \right] - \dots \\ & \dots + (-1)^{n-1} \sum_b^{1, n} A[f_b]. \end{aligned}$$

Se A è di grado n (ed omogeneo), B è lineare (ed omogeneo) nei suoi n argomenti. Si ha dunque, indicando con $u(x_{11} \dots x_{1m} \dots x_{n1} \dots x_{nm})$ una funzione di nm argomenti, che verifichi la condizione di cui al teorema precedente,

$$\begin{aligned} B[f_1 \dots f_n] = & \iint \dots \int f_1(x_{11} \dots x_{1m}) \dots \\ & \dots f_n(x_{n1} \dots x_{nm}) dx_{11} \dots dx_{1m} \dots dx_{n1} \dots dx_{nm} u. \end{aligned}$$

Ora, posto $f_1 = f_2 = \dots f_n = f$, risulta $B[f_1 \dots f_n] = n! A[f]$.

Ponendo dunque $v = \frac{1}{n!} u$, si ottiene

$$\begin{aligned} A[f] = & \iint \dots \int f(x_{11} \dots x_{1m}) \dots \\ & \dots f(x_{n1} \dots x_{nm}) dx_{11} \dots dx_{1m} \dots dx_{n1} \dots dx_{nm} v, \end{aligned}$$

dove v soddisfa la condizione già detta.

La v può evidentemente supporre simmetrica rispetto agli n sistemi di variabili $x_{11} \dots x_{1m}; \dots x_{n1} \dots x_{nm}$. Difatti, ove non lo fosse, basterebbe permutare a secondo membro della formola precedente tali sistemi fra loro in tutti i modi possibili, sommare i risultati ottenuti e dividere per $n!$ per ottenere al posto di v una funzione simmetrica.

Il teorema generale può ora enunciarsi senz'altro:

Un funzionale dei gradi p, q, \dots rispettivamente nelle funzioni

$$\varphi(x_1 \dots x_m), \quad \psi(y_1 \dots y_n) \dots$$

è rappresentato da un integrale di Stieltjes del tipo speciale introdotto nell'enunciato precedente. Propriamente, lo si deduce da un funzionale lineare negli argomenti

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_{11} \dots x_{1m}), \dots \varphi_p(x_{p1} \dots x_{pm}) \\ &\psi_1(y_{11} \dots y_{1n}), \dots \psi_q(y_{q1} \dots y_{qn}) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

ponendovi $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_p = \varphi$, $\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_q = \psi$, ecc.

2. Vediamo così che la rappresentazione dei funzionali multilineari e di grado superiore si consegue mediante integrali di Stieltjes di una natura particolare, ed a cui non può dirsi in generale applicabile la definizione ordinaria di integrale; poichè le somme di cui un simile integrale è limite si ottengono bensì mediante un'arbitraria decomposizione in domini rettangolari parziali del dominio rettangolare contenente l'insieme di integrazione, ma la scelta dei valori della funzione non è arbitraria. Per esempio, nel formare le somme che approssimano l'integrale doppio

$$\iint f(x)f(y) d_x d_y u(x, y),$$

rappresentante un funzionale quadratico, occorre, effettuata comunque una decomposizione in rettangoli parziali, scegliere i valori particolari della funzione integranda nei nodi di un'altra arbitraria decomposizione. L'integrale precedente definisce un funzionale lineare nell'insieme delle funzioni della forma $f(x)f(y)$. Ma non può dirsi che esista sempre l'integrale

$$\iint F(x, y) d_x d_y u(x, y)$$

preso nel senso ordinario (per il che occorrerebbe che la u fosse a variazione limitata); cioè che il predetto funzionale lineare sia *prolungabile* in altro definito per tutte le funzioni di due variabili.

In generale, un funzionale di grado finito in una o più funzioni di quante si vogliano variabili è bensì un funzionale lineare in un certo insieme

di un conveniente spazio funzionale, ma non può dirsi *a priori* prolungabile in altro definito in tutto questo spazio.

Siamo stati condotti ad introdurre per le funzioni di più variabili condizioni che appaiono più generali di quella di avere variazione limitata. Il tipo più generale di condizioni siffatte, per la funzione $u(x_1 \dots x_n)$, è il seguente:

L'insieme delle somme

$$\sum \alpha_{i_1 \dots i_p} \beta_{j_1 \dots j_q} \dots \Delta_{i_1} \dots \Delta_{i_p} \Delta_{j_1} \dots \Delta_{j_q} \dots u$$

è limitato, se sono limitate le quantità α, β, \dots

Ci si può naturalmente limitare a supporre queste quantità tutte in valore assoluto eguali all'unità.

Le condizioni di questo tipo racchiudono evidentemente come caso particolare quella di variazione limitata. Ma due qualunque fra esse non sembrano in generale equivalenti. Sarà opportuno confermare queste presunzioni mediante un esempio.

3. Suddividiamo l'intervallo $(0, 1)$ in $2n$ parti eguali, e costruiamo la funzione che varia linearmente in ognuna di queste parti, ed assume il valore *zero* per

$$x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1, \text{ ed il valore } \frac{\sigma}{n} \text{ per } x = \frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \dots, \frac{2n-1}{2n}.$$

Indicheremo con $\varphi_{\sigma,n}$ questa funzione, la cui variazione totale è 2σ .

Fissiamo ora una successione di quantità positive crescenti, che tendano all'unità

$$y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_k, y'_k, \dots$$

Definiremo ora una funzione $u(x, y)$, nel quadrato fondamentale Q del piano xy come segue:

a) per $y = 0, 1, y'_k (k = 1, 2, 3 \dots)$ porremo $u = 0$;

b) per $y = y_k (k = 1, 2, 3 \dots)$ porremo $u = f_k(x)$, dove f_k è la k^{ma} funzione della successione

$$\varphi_{1,1}; \varphi_{\frac{1}{4},1}; \varphi_{\frac{1}{4},2}; \varphi_{\frac{1}{9},1}; \varphi_{\frac{1}{9},2}; \varphi_{\frac{1}{9},4}; \varphi_{\frac{1}{16},1}; \dots, \varphi_{\frac{1}{16},k}; \dots$$

c) per x costante, ed y compreso fra due valori consecutivi della successione $0, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots$, assoggetteremo la u a variare linearmente.

La funzione così definita è evidentemente continua, e si riconosce subito, calcolandone la variazione in ciascuna delle striscie $y'_k \leq y \leq y'_{k+1}$, che essa

non è a variazione limitata. Si può però far vedere che l'insieme delle somme

$$\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \Delta_i \Delta_j u,$$

ove le α e β sono in valore assoluto eguali all'unità, è limitato⁽¹⁾.

Esiste dunque l'integrale

$$\iint_Q f(x) f(y) d_x d_y u(x, y)$$

preso nel senso speciale, mentre non esiste generalmente l'integrale ordinario di Stieltjes

$$\iint_Q F(x, y) d_x d_y u(x, y).$$

4. Vogliamo ora far vedere che un funzionale di grado qualunque, dipendente da quantesivogliono funzioni, si estende spontaneamente a tutte le funzioni di Baire. In altri termini, che il passaggio al limite sotto il segno di funzionale si può effettuare nel modo più generale, un numero qualunque finito o transfinito di volte.

Bisognerà all'uopo generalizzare gli integrali di Stieltjes precedentemente introdotti, nel senso di Lebesgue. Ci limiteremo per semplicità a studiare il caso di un funzionale dipendente linearmente da due funzioni di una variabile.

Sia

$$A |[\varphi, \psi]| = \iint \varphi(x) \psi(y) d_x d_y u(x, y), \quad (a)$$

dove l'integrale va preso nel senso precedentemente dichiarato, e per la u sussiste la disegualianza

$$\left| \sum_{i,j} \Delta_i \Delta_j u \cdot \alpha_i \beta_j \right| \leq L, \quad (b)$$

dove $|\alpha_i| = |\beta_j| = 1$.

Abbiamo già visto nella Nota precedente che la variazione di u estesa ad un dominio rettangolare D dà il valore dell'integrale (a), considerato come un funzionale lineare dipendente da una funzione di due variabili, per la funzione il cui valore è uno nel dominio D *semiaperto*, cioè privato dei due lati destro e superiore, e *zero* altrove. Viene così definita dalla u una funzione additiva Φ di dominio rettangolare semiaperto. Questa, se u fosse a variazione limitata, si estenderebbe senz'altro mediante la legge di addittività a qualunque insieme deducibile da quei domini elementari me-

(1) Ciò sarà oggetto di una comunicazione al «Giornale di Matematiche» di Battaglini.

dianle operazioni fondamentali in numero finito o infinito, cioè a qualunque insieme di Borel. Ma poichè la u soddisfa soltanto la (b) non si potrà in generale estendere la Φ che a quegli insiemi di Borel composti di *tutti* i punti le cui coordinate costituiscono, sugli assi x ed y , due insiemi di Borel.

Ciò posto, possiamo definire l'integrale (a) quando φ e ψ sono due funzioni (limitate) di Baire.

Siano a_1 e b_1 gli estremi di φ , a_2 e b_2 gli estremi di ψ . Dividiamo gli intervalli (a_1, b_1) e (a_2, b_2) in intervalli parziali ed indichiamo con E_{ij} l'insieme dei punti le cui x appartengono all'insieme in cui il valore di φ è compreso nell' i^{mo} intervallo di suddivisione di (a_1, b_1) e le y a quello in cui il valore di ψ è compreso nell' j^{mo} intervallo di suddivisione di (a_2, b_2) . Per gli insiemi E sarà definito il valore di Φ .

Formiamo le somme

$$\sum_{i,j} \Phi(E_{ij}) \varphi_i \psi_j,$$

dove φ_i e ψ_j sono compresi nei suddetti intervalli i^{mo} e j^{mo} . Al tendere a zero del massimo degli intervalli di suddivisione quella somma convergerà verso un limite che definiremo come il valore dell'integrale (a) per le funzioni di Baire φ e ψ . E nella dimostrazione di tale convergenza ha parte essenziale la condizione (b).

Sotto il segno di integrale così generalizzato è lecito il passaggio al limite, simultaneamente rispetto a φ e ψ , e quale che sia la convergenza. A questo risultato conduce uno studio dell'integrale (a) analogo a quello dell'integrale di Stieltjes-Lebesgue, che risulta così ulteriormente esteso.

Di qui si deduce il teorema del passaggio al limite per l'integrale

$$\iint \varphi(x) \varphi(y) d_x d_y u(x, y),$$

e conseguentemente l'esistenza dei funzionali quadratici nel campo di tutte le funzioni di Baire.

Più generalmente, possiamo ritenere dimostrato che:

Se A è un funzionale di grado qualunque, dipendente da più funzioni di quantesivogliono variabili, il passaggio al limite sotto il segno A è lecito nel modo più generale; la definizione di A si consegue così per tutte le funzioni di Baire.

Matematica. — *Variazione infinitesima delle funzioni di Green relative a campi piani pluriconnessi.* Nota di G. KRALL, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. — Riferendoci ad una precedente Nota⁽²⁾ volta a caratterizzare le funzioni di Green del I tipo relative a campi piani non semplicemente connessi, qui miriamo a costruirne le variazioni prime, conseguenti a deformazioni infinitesime dei contorni che limitano il campo. Oltre a raggiungere così una notevole rappresentazione esplicita dell'intimo loro carattere di *funzioni di linea*, si perviene per esse ad un metodo costruttivo assai conveniente quando la forma del contorno dei fori, pur essendo complessa, si possa riguardare prossima a forme semplici, accessibili senza difficoltà notevoli ai metodi diretti.

§ 2. — Supponiamo dunque nota per un assegnato campo piano S_m con m buchi la funzione di Green del I ordine, cioè una funzione simmetrica dei punti P_1 e P_2 di S_m ; a) *armonica* in ogni punto, b) scindibile in una parte *regolare* $g_m = g_m(P_1, P_2)$ ed una *singularità logaritmica* del tipo $\lg \frac{1}{r(P_1, P_2)}$, $r(P_1, P_2)$ essendo eguale alla distanza tra P_1 e P_2 , c) *nulla* sull'orlo esterno σ_0 del campo, d) con *derivate normali nulle* sui contorni (a curvatura finita) $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ degli m buchi.

Ciò posto, supponiamo di deformare, fermi restando gli altri bordi, il contorno σ_i del buco generico i , in modo da pervenire ad un nuovo contorno σ_i^* infinitamente vicino, *tutto interno* ad S_m , vale a dire, *invilupante* l'originario σ_i .

Salvo a togliere in seguito quest'ultima limitazione, specifichiamo tale variazione con una funzione $\delta_i = \delta_{n_i}(P)$ dei punti P di σ_i atta a caratterizzare la distanza che intercede tra due punti P e P^* di σ_i e σ_i^* contata come *positiva* nella direzione della normale n_i spiccata internamente ad S_m da un punto P di σ_i .

Indicando la $G_m = G_m(P_1, P_2)$ — *funzione di* $(m + 1)$ *linee* $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m$; con la notazione

$$G_m = F | (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m;),$$

fissiamo l'attenzione su un intorno $d\sigma_i$ infinitamente prossimo ad un punto P di σ_i e, fermo restando ogni suo altro punto, spostiamolo, nel senso di n_i ,

(1) Nella seduta del 1° giugno 1927.

(2) G. KRALL, *Sulle funzioni di Green relative a campi pluriconnessi*; questi « Rendiconti », vol. V, p. 967.

della quantità $\delta n_i(P)$. Denotando con $d\delta_i F |(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m; P)|$ l'incremento della F conseguente a tale *parziale* ed *infinitesima* deformazione della linea σ_i in P , avremo, adottando le notazioni di Volterra,

$$d\delta_i F |(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m, P)| = F'_i |(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m; P)| \delta n_i(P) d\sigma_i.$$

Effettuando con continuità la deformazione $\delta n_i(P)$ in ogni punto P , otteniamo quindi per la variazione $\delta_i F$ di F , parziale rispetto a σ_i ,

$$(1) \quad \delta_i F = \delta_i G_m(P_1, P_2) = \int_{\sigma_i} F'_i |(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m; P)| \delta n_i(P) d\sigma_i.$$

Ora, ove ognuno degli $m + 1$ contorni, l'esterno σ_0 , gli interni $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$, sieno deformati in tal maniera, cioè sieno assegnati per gli spostamenti dei loro punti, $(m + 1)$ funzioni *infinitesime* $\delta n_i(P)$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$; sempre a meno di termini d'ordine superiore, avremo in definitiva,

$$(2) \quad \delta F = \delta G_m(P_1, P_2) = \sum_0^m \delta_i F = \sum_0^m \int_{\sigma_i} F'_i |(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m, P)| \delta n_i(P) d\sigma_i.$$

Sfruttando i metodi oramai classici indicati da Volterra⁽¹⁾ e Hadamard⁽²⁾ passiamo ad esplicitare nel concreto le relazioni generali testè ottenute.

§ 3. — Supponendo *a priori*, che la variazione di G_m sia pur essa infinitesima, o meglio, che sia dell'ordine di $\delta n_i(P)$, il che equivale ad ammettere un principio di continuità per la F (il quale principio si potrebbe del resto controllare in modo rigoroso), detto $\hat{S}_{m,i}$ il campo ottenuto da S_m per sola deformazione di σ_i , introduciamo nella formula di Green,

$$(3) \quad \int_S \{U \Delta V - V \Delta U\} dS + \int_s \left\{ U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right\} ds = 0,$$

al posto delle funzioni regolari U e V , le funzioni $U = \hat{G}_{m,i} = (G_m(P_1, P) + \delta_i G_m(P_1, P))$, $V = G_m(P_2, P)$; al posto dello spazio generico S , lo spazio $S = \hat{S}_{m,i} - k_1 - k_2$, k_1 e k_2 essendo due cerchi di raggio ρ_1 rispettivamente ρ_2 , tracciati con centro in P_1 e P_2 onde escludere le singolarità. Infine, specificando il contorno s con la relazione, $s = \sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_i + \dots + \sigma_m + 2\pi\rho_1 + 2\pi\rho_2$; detta \hat{n}_i la normale spiccata dal punto \hat{P}' di $\hat{\sigma}_i$, passando al limite per $\rho_1 \rightarrow 0$, $\rho_2 \rightarrow 0$, ove si tenga conto delle

(1) V. VOLTERRA, *Leçons sur les Fonctions de Lignes*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.

(2) J. HADAMARD, *Leçons sur le Calcul de Variations*, Hermann et Fils, Paris, 1910.

condizioni a), b), c) e d) cui nello spazio testè definito soddisfano la G_m e la \bar{G}_m , avremo

$$(4) \quad \delta_i G(P_1, P_2) = \bar{G}_{m,i}(P_1, P_2) - G_m(P_2, P_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_i} \bar{G}_{m,i}(P_1, \bar{P}') \frac{dG_m(P_2, \bar{P}')}{d\bar{n}_i} d\bar{\sigma}_i.$$

Ora, ove si osservi che a meno di termini d'ordine superiore

$$(5) \quad \frac{dG_m(P_2, \bar{P}')}{d\bar{n}_i} = \frac{dG_m(P_2, P)}{dn_i} + \frac{d^2 G_m(P_2, P)}{dn_i^2} \delta n_i(P) - \frac{dG_m(P_2, P)}{dt_i} \frac{d\delta n_i(P)}{dt_i},$$

(t_i essendo la tangente a σ_i spiccata, nel senso degli archi crescenti, dal punto P di σ_i), per l'ipotesi quantitativa fatta relativamente alla variazione $\delta_i G$, potremo anche porre,

$$(6) \quad \delta_i G_m(P_1, P_2) = \frac{1}{2\pi} \int_i G_m(P_1, P) \left\{ \frac{d^2 G_m(P_1, P)}{dn_i^2} \delta n_i(P) - \frac{dG_m(P_1, P)}{dt_i} \frac{d\delta n(P)}{dt_i} \right\} d\sigma_i.$$

Poichè la G_m è armonica, cioè soddisfa l'equazione

$$\frac{d^2 G_m(P_1, P)}{dn_i^2} + \frac{d^2 G_m(P_1, P)}{dt_i^2} = 0,$$

e nel caso nostro si ha

$$\frac{d^2 G_m(P_1, P)}{dt_i^2} = \frac{d^2 G_m(P_1, P)}{d\sigma_i^2} + \frac{1}{\rho_i} \frac{dG_m(P_1, P)}{dn_i} = \frac{d^2 G_m(P_1, P)}{d\sigma_i^2},$$

ρ_i essendo il raggio di curvatura di σ_i , per ipotesi mai nullo, otteniamo, in sostituzione della (6),

$$\delta_i G_m(P_1, P_2) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_i} G_m(P_1, P) \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left\{ \frac{\partial G_m(P_1, P)}{\partial \sigma_i} \delta n_i(P) \right\} d\sigma_i$$

ovvero, integrando *per parti* tra due punti P' e P'' di σ_i , al limite per P' coincidente con P'' , l'espressione, *simmetrica* com'era desiderabile,

$$(7) \quad \delta_i G_m(P_1, P_2) = + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_i} \frac{\partial G_m(P_1, P)}{\partial \sigma_i} \frac{\partial G_m(P_2, P)}{\partial \sigma_i} \delta n_i(P) d\sigma_i.$$

Ove il contorno $\bar{\sigma}_i$ non involuppi, contrariamente a quanto abbiamo supposto, l'originario contorno σ_i , la formula qui ricavata vale lo stesso, salvo a contare la distanza $\delta_i = \delta n_i(P)$ tra i punti P e \bar{P}' di σ_i e $\bar{\sigma}_i$ *positivamente* o *negativamente* a seconda che il punto \bar{P}' è *interno* o *esterno* al campo S_m . Ciò risulta in modo immediato avvolgendo σ_i e $\bar{\sigma}_i$ con un nuovo

contorno σ_i^{**} , dunque tutto interno a S_m . Detta allora $\bar{G}_{m,i}^{**}(P_1, P_2)$ la funzione variata pel passaggio di σ_i in σ_i^{**} , esplicitando pel tramite della (7) l'identità,

$$\begin{aligned} \delta_i G_m(P_1, P_2) &= \bar{G}_{m,i}^{*}(P_1, P_2) - G_{m,i}(P_1, P_2) = \\ &= (\bar{G}_{m,i}^{*} - G_{m,i}) - (\bar{G}_{m,i}^{*} - \bar{G}_{m,i}^{*}), \end{aligned}$$

resta giustificato l'asserto.

§ 4. - Se infine denotiamo con $\delta_o n(P)$ una funzione infinitesima atta a caratterizzare una trasformazione del contorno esterno σ_o in uno prossimo $\bar{\sigma}_o$, applicando ancora la formola fondamentale (3), tenendo presente che su $\bar{\sigma}_o$ la $\bar{G}_{m,o}$ deve annullarsi come la G_m su σ_o , avremo

$$\delta_o G(P_1, P_2) = - \frac{1}{2\pi} \int \frac{dG_m(P_1, P)}{dn_o} \frac{dG_m(P_2, P)}{dn_o} \delta n_o(P) d\sigma_o,$$

la distanza $\delta n_o(P)$ tra il punto P di σ_o e P' di $\bar{\sigma}_o$ essendo *positiva* o *negativa* a seconda che P' è *interno* o *esterno* a S_m .

§ 5. - Ricavate le variazioni parziali della G_m corrispondenti a deformazioni infinitesime degli orli dei buchi, o rispettivamente del contorno esterno σ_o del campo, siamo in grado di esplicitare la (2) secondo la forma,

$$\begin{aligned} \delta G_m(P_1, P_2) &= - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_o} \frac{dG_m(P_1, P)}{dn_o} \frac{dG_m(P_2, P)}{dn_o} \delta n_o(P) d\sigma_o + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_i^m \int \frac{\partial G_m(P_1, P)}{\partial \sigma_i} \frac{\partial G_m(P_2, P)}{\partial \sigma_i} G_{ni}(P) d\sigma_i. \end{aligned}$$

Questa compendia in sè l'algoritmo costruttivo, di cui fu cenno a § 1, della funzione di Green relativa a campi pluriconnessi prossimi a tipi particolarmente semplici o quanto meno accessibili al metodo generale esposto nella precedente Nota. Esempi tipici sarebbero campi prossimi alla corona circolare ($m = 1$) o ad un disco con m buchi.

Matematica. — *La formola di Green nel campo complesso e l'estensione del teorema di Cauchy alle funzioni di due variabili complesse.* Nota di P. NALLI e G. ANDREOLI, presentata dal Corrisp. A. TONELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Compléments à une Note sur les oscillations d'un liquide en vases communicants.* Nota ⁽¹⁾ di R. MAZET, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La présente Note a pour objet de compléter sur différents points une Note antérieure ⁽²⁾ relative aux oscillations d'un liquide pesant dans deux vases communicants dont les parois sont verticales au voisinage des surfaces libres.

I. — EXTENSION AU CAS DE TROIS DIMENSIONS. — Les généralités du § 1 de la Note précitée s'étendent immédiatement au cas où le mouvement n'est pas parallèle à un plan fixe. Il suffit, en désignant par S_1 et S_2 les sections des parties supérieures des vases, de poser

$$\beta_1 = \frac{S_1}{S}, \quad \beta_2 = \frac{S_2}{S}, \quad (S_1 + S_2 = S),$$

et de remplacer partout b par S . Le théorème des forces vives donne ainsi

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \frac{g(h_0^2 - h^2)}{S\beta_1\beta_2 R + (\beta_2 - \beta_1)h}$$

(h_0 : dénivellation initiale (à l'instant zéro);

h : dénivellation à l'instant t ;

R : constante numérique ne dépendant que du domaine occupé par le liquide à l'un des instants $\Theta, T - \Theta$ [T : période], $T + \Theta, \dots$ où les deux niveaux sont égaux)

et, en posant

$$\frac{(\beta_2 - \beta_1)h_0}{S\beta_1\beta_2 R} = k, \quad \sqrt{\frac{g}{S\beta_1\beta_2 R}} = m,$$

on obtient, pour Θ , la même expression. Bien entendu, pour calculer R , pour Θ , on ne pourra plus se servir de la représentation conforme; on devra résoudre le problème de Neumann par une autre méthode.

2. — CALCUL DE R DANS LE CAS DE LA CUVE PARALLÉLIPÉDIQUE. — Reprenons les équations (5) et (6): Comme les hypothèses d'où nous

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1927.

(2) Sur les oscillations d'un liquide en vases communicants (« Rendiconti dei Lincei », III, 1926, p. 673-679).

sommes partis ($u = 0$, v indépendant de x sur MM' et NN') sont d'autant plus compatibles entre elles que le niveau moyen a est plus grand, il est naturel, pour résoudre ces équations, de poser

$$\lambda_3 = -\gamma(1 - \epsilon) \quad , \quad \lambda_4 = \frac{1}{\epsilon'} ,$$

et de considérer ϵ et ϵ' , séparément, comme des infiniment petits principaux. Il vient ainsi

$$\epsilon = 2 \left(\frac{\sigma + \gamma}{\sigma - \gamma} \right)^{\frac{1}{2\beta_1}} e^{-\frac{\pi a}{b\beta_1}} \quad , \quad \epsilon' = \frac{1}{\sigma + \gamma} \left(\frac{\sigma + \gamma}{\sigma - \gamma} \right)^{\frac{1}{2\beta_2}} e^{-\frac{\pi a}{b\beta_2}} .$$

D'où, en substituant dans (4),

$$(10) \quad R = \frac{1}{\pi} \log \left[\left(\frac{1}{2\gamma\epsilon'} \right)^{1 + \frac{1}{\gamma}} \left(\frac{1}{\gamma\epsilon\epsilon'} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} \right] = \frac{a}{b\beta_1\beta_2} + x(\sigma, \gamma) ,$$

en posant

$$x(\sigma, \gamma) = \frac{2}{\pi} \log \frac{\sigma + \gamma}{2\gamma} - \frac{(\gamma + 1)^2}{2\pi\gamma} \log \frac{\sigma + \gamma}{\sigma - \gamma} .$$

R se compose donc d'un terme $\frac{a}{b\beta_1\beta_2}$, que l'on trouve en attribuant à toutes les molécules situées à gauche de Oy la même vitesse $\frac{1}{b\beta_2}$, et à toutes les molécules situées à droite la même vitesse $\frac{1}{b\beta_1}$, et d'un terme x qui ne dépend que de σ et de γ , c'est-à-dire de $\frac{l}{b}$ et de γ par l'intermédiaire de (3). Lorsque, γ étant fixé, $\frac{l}{b}$ croît de 0 à $+\infty$ (si $\frac{a}{b}$ est fixé, $\frac{l}{b}$ ne peut pas dépasser une certaine limite notablement inférieure à $\frac{a}{b}$), x décroît de $+\infty$ à $-\infty$; $x = 0$ pour une valeur de $\frac{l}{b}$, et une seule, qui ne dépend que de γ .

3. - DEGRÉ D'APPROXIMATION DE LA MÉTHODE. — Supposons, ce qui est toujours possible, $\gamma \leq 1$. Alors

$$\epsilon' = \frac{1}{\sigma + \gamma} \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \frac{\epsilon}{4}$$

(ε étant $< \frac{2}{v}$), et l'on peut prendre ε pour infiniment petit principal unique. On vérifie aisément qu'au degré d'approximation qui consiste à négliger ε vis-à-vis de l'unité, les hypothèses simplificatrices relatives à MM' et NN' sont satisfaites.

Or on déduit de la relation (3)

$$\varepsilon < 2\varepsilon - \frac{\pi(a-l)}{b\beta_1}.$$

Il suffit donc, en définitive, que l'on puisse négliger $2\varepsilon - \frac{\pi(a-l)}{b\beta_1}$ vis-à-vis de l'unité, ce qui n'exige pas que $\frac{a-l}{b\beta_1}$ soit très grand.

4. — SUR LA SINGULARITÉ DU POINT F. — Il existe un point singulier, le point F, où la vitesse, déduite de (1), est infinie. Par suite on trouverait, dans le mouvement réel, une petite région autour de F où la pression serait négative, ce qui n'aurait pas de signification physique. Pour écarter cette difficulté, on peut remplacer la cloison théorique infiniment mince Fy, correspondant à $\psi = 1$, par une cloison $\psi = 1 - v$ choisie de telle manière que la pression reste positive au voisinage de F; le mouvement ne sera pas modifié.

L'épaisseur-limite (à l'infini vers le haut) de la nouvelle cloison S sera

$$\Delta = bv.$$

En regardant v comme assez petit pour que l'on puisse négliger, vis-à-vis de l'unité, les termes en v^2 , tout en conservant les termes en v , on a, sur le cercle c (très petit) de centre F, tangent à S,

$$(11) \quad \sqrt{u_c^2 + v_c^2} \leq \frac{1}{b\beta_2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}}{\pi v} + \frac{\sigma + 1}{2\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}} + \frac{1}{2} \right).$$

D'autre part, pour que la pression le long de c (dans le mouvement réel), donnée par

$$\frac{p}{\rho} = g(H_0 + a - l) + C_0(t) - \frac{b^2 \beta_1^2 \beta_2^2}{2} \left(\frac{db}{dt} \right)^2 (u_c^2 + v_c^2),$$

$$\left[H_0 = \frac{p_0}{\rho g} \quad ; \quad C_0(t) > -g b_0 \beta_1 \quad , \quad \text{si } \gamma \leq 1 \right],$$

soit positive, il suffit que l'on ait

$$(12) \quad \sqrt{u_c^2 + v_c^2} \leq \frac{\sqrt{2(H_0 + a - l - b_0 \beta_1)[R\beta_1 \beta_2 b - (\beta_1 - \beta_2)b_0]}}{b\beta_1 \beta_2 b_0}.$$

Il est facile de tirer v de la comparaison entre (11) et (12); si b_0 est très petit, v sera également très petit et l'on pourra se borner à prendre

$$v = \frac{b_0}{\pi} \sqrt{\frac{1 + 2\sigma + \gamma^2}{2(H_0 + a - l)\gamma R b}}.$$

5. - CAS OÙ $\sigma = \gamma$. - EQUATION DES LIGNES DE COURANT. — Un cas-limite intéressant est celui où $\frac{l}{b}$ est infini ($\sigma = \gamma$). En posant $a = a' + l(a' + l)$ ($a' = FM'$) et faisant $\sigma = \gamma$, la formule (10), tenu compte de (3), devient

$$R = \frac{a'}{b\beta_1\beta_2} + \frac{1}{\pi\beta_1\beta_2} \log \frac{1}{\beta_1\beta_1\beta_2\beta_2}.$$

Il est facile, dans ce cas, de construire les lignes de courant du mouvement permanent (*qui coïncident sensiblement avec les trajectoires des molécules dans le mouvement réel*). En effet la relation (2) donne, en prenant pour nouvelle origine des axes le point F et posant

$$\lambda = 2se^{i\tau} - \gamma \quad \left(\varphi = \frac{1}{\pi} \log s, \quad \psi = \frac{\tau}{\pi} \right),$$

$$z = i \frac{b}{\pi} \left[\log \frac{\gamma - se^{i\tau}}{\gamma + 1} - \frac{\log s + i(\tau - \pi)}{\gamma + 1} \right] = \frac{b}{\pi} (X + iY),$$

où

$$X = \arctg \frac{s \sin \tau}{\gamma - s \cos \tau} - \frac{\pi - \tau}{\gamma + 1}, \quad Y = \log \frac{\sqrt{\gamma^2 - 2\gamma s \cos \tau + s^2}}{(\gamma + 1)s^{\frac{1}{\gamma+1}}}.$$

On peut éliminer s entre X et Y , d'où

$$(13) \quad Y = \log \frac{\beta_1\beta_1\beta_2\beta_2 \sin \tau}{\sin^{\beta_1} [X + \beta_1(\pi - \tau)] \sin^{\beta_2} [\beta_2(\pi - \tau) - X]}.$$

APPLICATION À UN CAS DE MOUVEMENT PLAN DANS L'ESPACE À TROIS DIMENSIONS. — Faisons $b = \pi$; au dessus d'un plan horizontal $Y = \alpha'$,

tel que $2e^{-\frac{\alpha'}{\beta_1}}$ soit négligeable devant l'unité, on peut confondre les lignes de courant avec leurs asymptotes. Soit, dans le plan $Y = \alpha'$, une courbe fermée convexe, admettant pour plan de symétrie le plan XFY qu'elle perce en deux points d'abscisses comprises entre 0 et $-\beta_1\pi$; l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur cette courbe limite un tube en U que l'on peut supposer contenir, jusqu'au niveau moyen $Y = a'$, un liquide oscillant. Si $a' > \alpha'$ et $b_0 < \frac{a' - \alpha'}{\beta_1}$, le mouvement de ce liquide sera

défini par les formules du § 1 de la Note précitée, dans lesquelles il suffira de faire

$$b = \pi \quad \text{et} \quad R = \frac{1}{\pi \beta_1 \beta_2} \left(a' + \log \frac{1}{\beta_1 \beta_2} \right).$$

Dans le cas particulier où $\gamma = 1$, l'équation (13) devient

$$Y = \log \frac{\sin \tau}{\sqrt{2(\cos 2X + \cos \tau)}}.$$

Les tubes en U ont leurs deux branches égales. Si l'on considère un tube très mince entourant la ligne de courant τ , en désignant par H la hauteur moyenne du liquide comptée depuis la partie inférieure du tube, on aura

$$a' = H + \log \sin \frac{\tau}{2},$$

$$R = \frac{4}{\pi} \left[H + \log \left(2 \sin \frac{\tau}{2} \right) \right],$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{H + \log \left(2 \sin \frac{\tau}{2} \right)}{g}}.$$

6. — CAS OÙ $\gamma = 0$ (b INFINI). — Un autre cas-limite intéressant est celui où $\gamma = 0$ et b est infini, de telle sorte que la longueur $b\beta_2$ de la chambre de droite ait une valeur finie b_2 , tandis que la paroi F_1M est rejetée à l'infini vers la gauche (schéma d'une *écluse à simple sas*). La méthode approchée que nous avons suivie dans le cas général consiste ici à admettre que la surface libre DD' reste immobile et confondue avec MM' . En faisant $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, $b\beta_2 = b_2$ dans les formules précédemment établies, il vient

$$(14) \quad \left(\frac{db}{dt} \right)^2 = \frac{g(b_0^2 - b^2)}{Rb_2 - b}, \text{ etc.,}$$

$$\log \frac{1 + \sigma + \sqrt{1 + 2\sigma}}{\sigma} + \frac{\sqrt{1 + 2\sigma}}{\sigma} = \pi \frac{l}{b_2}.$$

Les équations (5) et (6) sont remplacées par l'équation unique

$$\log \frac{\sigma - \lambda}{\sigma} - \frac{2}{\lambda} = \pi \frac{a}{b_2} - \frac{1}{\sigma},$$

qui a deux racines, λ_3 et λ_4 , correspondant respectivement aux points M' et N' . En posant

$$\pi \frac{a}{b_2} - \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\varepsilon}$$

et regardant ε comme négligeable vis-à-vis de l'unité (cette condition est plus restrictive que dans le cas général), on a immédiatement

$$\lambda_3 : -2\varepsilon \quad , \quad \lambda_4 = -\sigma e^{\frac{1}{\sigma}}.$$

On peut écrire ici encore, moyennant une erreur négligeable,

$$R = \varphi_4 - \varphi_3,$$

d'où

$$R = \frac{1}{\pi} \log \frac{-\lambda_4 \sigma}{\lambda_3^2} = \frac{a}{b_2} + \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{\sigma}{2\varepsilon} - \frac{1}{2\sigma} \right).$$

Si $\frac{l}{b_2}$ est très petit, on peut tirer σ de (14):

$$\sigma = \frac{8b_2^2}{\pi^2 l^2},$$

d'où

$$R = \frac{a}{b_2} + \frac{2}{\pi} \log \frac{4ab_2}{\pi l^2}.$$

Meccanica. — *Sulla rotazione della Terra nella meccanica relativistica.* Nota di G. THOMSEN, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Nell'ultima di tre Note precedenti ⁽²⁾ abbiamo ricavato le equazioni, che determinano nella meccanica relativistica il moto d'un corpo rigido in un campo gravitazionale arbitrario ⁽³⁾. In questa quarta ed ultima Nota vogliamo applicare le nostre formule generali (introducendovi certe approssimazioni) alla rotazione della Terra.

A questo scopo dobbiamo principalmente considerare il secondo sistema delle equazioni del moto, ricavate nel § 5 della Nota 3 ⁽⁴⁾, le quali consistono nella

$$(1) \quad B_1 \frac{d\hat{\omega}_1}{d\sigma} = (B_2 - B_3) \cdot \left[\hat{\omega}_2 \hat{\omega}_3 + \frac{1}{2} (R_{lik} + R_{sikl}) \hat{x}^i \hat{x}^k n'_\alpha n'_\beta \xi^\alpha \xi^\beta \right]$$

e nelle due equazioni analoghe per $\frac{d\hat{\omega}_2}{d\sigma}$ e $\frac{d\hat{\omega}_3}{d\sigma}$.

(1) Nella seduta del 19 giugno 1927.

(2) Cfr. nota 1, p. 778; nota 2, p. 866; nota 3, p. 977 del volume V di questi « Rendiconti ».

(3) Cfr. le formule (19) (22) e (23).

(4) Formula (23).

Riguardando la Terra come un ellissoide di rotazione omogeneo, si può assumere $B_2 = B_3 = B$ e

$$B_1 = B(1 + \kappa)$$

dove si trae dalle dimensioni empiriche della Terra che $\kappa = \frac{B_1 - B}{B}$ ha l'ordine di grandezza di $\kappa \sim 1/300$.

Quindi a causa della piccolezza dello schiacciamento della Terra noi possiamo considerarla in una prima approssimazione come un corpo di struttura sferica. In tale caso si trova, come sappiamo dall'ultimo § della Nota 3, che la (1) dà $\widehat{\omega}_\alpha = \text{cost}$, e che l'asse della rotazione istantanea viene trasportato lungo la linea oraria del baricentro secondo la legge del Fermi. Questo fatto dà luogo alla così detta «precessione relativistica», calcolata per la prima volta da A. D. Fokker⁽¹⁾ e I. A. Schouten⁽²⁾. Se noi scindiamo il cronotopo, ammettendolo (almeno approssimativamente) statico, e supponendo d'altra parte, che la linea oraria del baricentro della Terra sia chiusa nello spazio, l'asse della Terra a causa della legge del Fermi non riprenderà dopo un circuito la stessa direzione primitiva, ma mostrerà una certa «deviazione». Il Fokker ha eseguito il calcolo mediante certe ipotesi approssimative perfettamente giustificate, mettendo in evidenza il carattere precessionale della rilevata deviazione angolare e il suo ordine di grandezza. Ricordiamo le ipotesi del Fokker:

A) Egli attribuisce al cronotopo l'elemento lineare dello Schwarzschild. Dunque tiene conto esclusivamente dell'influenza gravitazionale del Sole.

B) Assume come linea oraria del baricentro una geodetica del cronotopo, la quale corrisponda a moto circolare uniforme.

A causa dell'ipotesi B) nel calcolo del Fokker il trasporto del Fermi coincide col parallelismo ordinario del Levi-Civita. Il Fokker trova così un moto di precessione regolare della Terra, nel quale l'asse di precessione è ortogonale all'eclittica. La velocità precessionale è di 0.019 secondi d'arco per anno.

2. Per il calcolo del Fokker non è essenziale, che l'elemento lineare del cronotopo abbia rigorosamente la forma dello Schwarzschild, ma basta limitarlo alla forma ben nota di approssimazione⁽³⁾

$$(2) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) (dx^0)^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \sum_{\alpha} (dx^\alpha)^2$$

(1) *The geodesic precession*, «Koninklijke Akademie von Wetenschappen te Amsterdam», vol. XXIII, 1920, n. 5.

(2) *On geodesic precession*, «Koninkl. Ak. v. Wetensch. te Amsterdam», 1921, n. 3.

(3) Cfr. p. es., LEVI-CIVITA, *The abs. diff. calc.* (Glasgow, Blackie, 1927, p. 392).

con

$$(3) \quad \bar{n} = \frac{f m_o}{\rho},$$

dov'è f la costante gravitazionale, m_o la massa del Sole e ρ la distanza del Sole dalla Terra. La (2) già la conosciamo dalla Nota 1 come prima approssimazione newtoniana dell'elemento lineare einsteiniano, che fornisce le equazioni del moto della meccanica classica, trascurando dappertutto i termini d'un ordine superiore al secondo in $1 : c$ e ponendo

$$(4) \quad \bar{x}^0 = c \cdot t,$$

dov'è t il tempo assoluto.

Essenziale è per il caso del Fokker la forma speciale del potenziale U , dovuto ad un solo centro attrattivo. Trascurando dappertutto termini in $1 : c^3$, si trova anche per « l'approssimazione newtoniana » (2) la precessione di Fokker e Schouten.

Dunque già nella prima approssimazione la nostra meccanica del corpo rigido differisce dalla meccanica classica del solido. In realtà le equazioni, che definiscono la rotazione del corpo rigido (relativistico) si riducono, come vedremo nel § 4, nell'approssimazione suddetta, identiche a quelle che varrebbero in meccanica classica, per uno stesso campo di forze. Ma vanno interpretati in modo diverso i vincoli di rigidità. I nostri vincoli II, introdotti nella Nota 2 per la meccanica relativistica del corpo rigido, non coincidono, neanche nella prima approssimazione (2) coi vincoli corrispondenti della meccanica classica.

3. Lasciando l'ipotesi restrittiva che la Terra sia assimilabile ad un corpo di struttura sferica, e consideriamo il movimento entro un campo gravitazionale della forma approssimativa (2), dove però \bar{u} , anzichè avere la forma (3) rappresenta più generalmente una qualsiasi funzione armonica delle coordinate spaziali, dipendente anche, se si vuole, in forma esplicita dal tempo t . Ciò vuol dire, che noi contempliamo un campo di forze del tutto arbitrario proveniente da masse qualsivogliono. Poichè la grandezza $v : c$, [dove v è la velocità della Terra], è d'un ordine di grandezza 10^{-4} [cioè molto più piccola della frazione κ , caratteristica dello schiacciamento terrestre] i termini in $v^3 : c^3$, trascurati in (2) rispetto ai termini in $v^2 : c^2$, hanno una influenza molto più piccola dei termini, che si riferiscono allo schiacciamento della Terra.

Se si calcola la nostra funzione hamiltoniana \mathcal{L} del § 5 della Nota 3, per il caso speciale dell'elemento lineare (2), trascurando dappertutto i termini in $1 : c^3$, e introducendo come parametro ausiliare τ il tempo assoluto

$$(5) \quad x^0 = c \cdot t,$$

si trova (con un calcolo che non possiamo qui sviluppare distesamente):

$$(6) \quad \mathcal{L} = M - \frac{1}{c^2} \left\{ M \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) + \sum_{\alpha} B_{\alpha} \tilde{\omega}_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{\partial^2 U}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \xi_{\gamma}^{\alpha} \xi_{\gamma}^{\beta} A^{\gamma} \right\}$$

In questa formola le U e $\frac{\partial^2 U}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}}$ significano le funzioni u e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}}$, prese per i punti della linea oraria del baricentro, mentre v è definita da

$$v^2 = \sum_{\alpha} \left(\frac{dx^{\alpha}}{dt} \right)^2$$

e le A^{γ} sono i momenti di inerzia rispetto ai piani principali, introdotti nel § 3 della Nota 2.

Si noti che le u_{α}^i sono scomparse dalla funzione hamiltoniana approssimata (6).

Più precisamente le formole (12) (13) della Nota 2, mostrano, che nel caso della nostra approssimazione (2) le u_{α}^i [determinate a meno di una sostituzione ternaria con coefficienti costanti] si possono scegliere in maniera, che valgano gli sviluppi:

$$(7) \quad \begin{cases} u_{\alpha}^{\parallel} = \delta_{\alpha e} + \frac{1}{c^2} (\dots), \\ u_{\alpha}^{\circ} = \frac{1}{c} (\dots). \end{cases}$$

Nella nostra formola (6) entra solamente il termine costante $\delta_{\alpha e}$ senza il coefficiente $1/c$, cosicchè i termini variabili delle u_{α}^i scompaiono nella prima approssimazione (1).

Poichè per il principio variazionale

$$(8) \quad \delta \int \mathcal{L} dx^0$$

sono irrelevanti costanti additive e moltiplicative, noi possiamo scrivere invece della (8) anche

$$\delta \int \mathcal{L}^* dt = 0$$

con

$$(9) \quad \mathcal{L}^* = M \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} B_{\alpha} \tilde{\omega}_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{\partial^2 U}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \xi_{\gamma}^{\alpha} \xi_{\gamma}^{\beta} A^{\gamma}.$$

(1) Le u_{α}^i scompaiono anche in una ulteriore approssimazione, sviluppando il ds^2 fino a termini in $v^4 : c^4$ e trascurando solamente i termini, che hanno per fattore il prodotto $\kappa \cdot \left(\frac{v}{c} \right)^4$ delle due piccole quantità κ e $\left(\frac{v}{c} \right)^4$.

4. Questa funzione \mathcal{L}^* è formalmente identica alla funzione hamiltoniana, spettante al corrispondente problema classico del corpo rigido.

Infatti, introducendo mediante le equazioni

$$(10) \quad \bar{x}_v^\alpha = x^\alpha + \xi_\gamma^\alpha \bar{\zeta}_v^\gamma$$

i sei parametri lagrangiani d'un sistema rigido (tre x^α e tre contenuti nelle ξ_γ^α) nell'espressione della classica funzione lagrangiana

$$(11) \quad \Lambda = U^* + \sum_v \bar{T}_v^{(2)}$$

si trova per l'energia cinetica totale

$$(12) \quad \sum_v \bar{T}_v = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \sum_v B_\alpha \bar{\omega}_\alpha^2$$

dove le $\bar{\omega}_\alpha$ sono determinate dalle $\frac{d\xi_\gamma^\alpha}{dt}$ mediante le formole (15) della Nota 3.

Inoltre facendo l'ipotesi, che la massima dimensione del solido sia tanto piccola rispetto alle distanze del corpo dalle masse potenzianti, da poter trascurare i termini d'un ordine superiore al secondo nelle $\bar{x}_v^\alpha - x^\alpha$ e anche nelle $\bar{\zeta}_v^\alpha$, si ha per il potenziale complessivo dei punti m_v del solido (dovuto alle masse potenzianti) cioè per

$$U^* = \sum_v m_v \bar{U}_v$$

lo sviluppo

$$U^* = \sum_v m_v \cdot U + \sum_{\alpha, v} m_v \frac{\partial U}{\partial x^\alpha} (\bar{x}_v^\alpha - x^\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, v} \frac{\partial^2 U}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} (\bar{x}_v^\alpha - x^\alpha) (\bar{x}_v^\beta - x^\beta),$$

dove U è di nuovo il potenziale nel baricentro.

Con ciò da (10) segue, intendendo che le x^α siano le coordinate del baricentro e che gli assi $\bar{\zeta}^\alpha$ coincidano cogli assi principali di inerzia

$$(13) \quad U^* = M U + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{\partial^2 U}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \xi_\gamma^\alpha \xi_\gamma^\beta A^\gamma,$$

la quale associata alla (12), prova appunto, che la funzione Λ in (11) è formalmente identica alla \mathcal{L}^* della (9).

Ma accanto a questa concordanza formale va pure rilevato, che il significato delle $\bar{\omega}_\alpha$ in questi due casi è diverso. Nel caso classico le $\bar{\omega}_\alpha$ carat-

(1) Cfr. formula (2).

(2) Cfr. formula (4).

terizzano la velocità angolare del sistema solidale ζ^α rispetto ad un sistema η^α di direzioni fisse nello spazio, nel caso relativistico invece rispetto ad un sistema di assi η^α , che, per parte loro, si trasportano ancora secondo la legge del Fermi lungo la curva oraria del baricentro, cosicchè per esempio nel caso di Fokker-Schouten descrivono una precessione regolare rispetto ad un sistema di direzioni, fisse nello spazio.

Ma poichè in entrambi i casi la rotazione del sistema ζ rispetto al sistema η ottempera alla stessa legge meccanica, data dalla funzione lagrangiana (9), tutta la differenza si riduce al fatto, che, nel caso relativistico, si deve semplicemente sovrapporre alla rotazione della Terra, determinata dalla meccanica classica, la « precessione relativistica » dedotta dal trasporto del Fermi, e calcolata nella fattispecie dal Fokker come precessione regolare.

5. Come è noto, i due soli astri, che esercitano una influenza osservabile sulla rotazione della Terra sono il Sole e la Luna. Si trova ⁽¹⁾ una precessione regolare coll'asse di precessione, ortogonale all'eclittica, come la precessione di Fokker-Schouten.

La precessione classica della Terra si decompone in due precessioni dello stesso tipo, una delle quali proveniente dall'attrazione della Luna ha una velocità più di due volte più grande dell'altra, proveniente dal Sole. Poichè le precessioni regolari collo stesso asse si sovrappongono additivamente, nel caso relativistico l'intera precessione della Terra si decompone in tre parti: la precessione di Fokker-Schouten, la precessione proveniente dalla Luna e la precessione proveniente dal Sole. Ma la prima è soltanto un 1/2500 della totale, che si determina astronomicamente in circa 50 secondi d'arco per anno.

6. Un'ultima osservazione. Se noi designiamo con U_L il potenziale parziale dovuto alla Luna, la U_L ha l'ordine di grandezza $\frac{f\mu}{\sigma}$, dove f è la costante gravitazionale, μ la massa della Luna e σ la distanza media Terra-Luna. A differenza di U_L le sue prime derivate sono d'un ordine di grandezza $\frac{f\mu}{\sigma^2}$ e le derivate seconde $\frac{\partial^2 U_L}{\partial x^2 \partial x^2}$ hanno un ordine di grandezza $\frac{f\mu}{\sigma^3}$.

Indicando con m_o la massa del Sole e con ρ la distanza media Terra-Sole, vale per i rapporti

$$\mu : m_o \sim 4 \cdot 10^{-8}$$

$$\sigma : \rho \sim \frac{1}{400}$$

(1) Cfr. p. es. LEVI-CIVITA-AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*. Bologna, Zanichelli, t. I, pp. 496 e sg., t. II, 2, pp. 391-412.

e si trova, che le U_L , $\frac{\partial U_L}{\partial x^\alpha}$ sono trascurabili di fronte ai termini corrispondenti del potenziale del Sole, mentre le $\frac{\partial^2 U_L}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ hanno un ordine di grandezza comparabile a quello delle derivate seconde corrispondenti del Sole. Quindi l'influenza della Luna è sensibile per il moto della Terra soltanto pel tramite dell'ultimo termine di (9). Ma nelle formole del trasporto del Fermi intervengono unicamente i coefficienti g_{ik} dell'elemento lineare e le loro derivate prime, cioè, nel nostro caso approssimativo (2) le U e le loro derivate prime. Perciò nell'ambito della nostra approssimazione, la Luna non ha alcuna influenza sulla precessione relativistica, e rimane così giustificata l'intuizione (che esigeva in verità paziente analisi) in forza della quale Fokker-Schouten valutarono correttamente la precessione relativistica, tenendo conto esclusivamente del campo gravitazionale del Sole.

Astronomia. — *Osservazioni fotometriche della nuova variabile nella costellazione dell'« Auriga ».* Nota del dott. A. MEROLA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. A. BEMPORAD.

La nuova variabile di coordinate

$$\alpha = 6^h 20^m 5^s.0 \quad \delta = + 47^\circ 5'.4 \text{ (1900)}$$

scoperta dal prof. A. Bemporad nel corso delle riduzioni del Catalogo Astrografico (zona di Catania) sulla lastra n. 218 fotografata il 12 gennaio 1897 da Mascari non si è potuta qui osservare prima dell'aprile scorso, sia per il tempo generalmente sfavorevole, sia perchè nel marzo la stella era troppo debole per potervi applicare il fotometro.

Venne usato il fotometro a cuneo Töpfer II attaccato all'equatoriale Dollond di 18 cm. di apertura e di m. 3 di distanza focale.

Si adoperarono le seguenti stelle di confronto

A. R. (1900)	Decl. (1900)	Gr. fotm.	Gr. fotg.	A. R. (1900)	Decl. (1900)	Gr. totm.	Gr. fotg.
—	—	(Napoli)		—	—	(Napoli)	
6 ^h 19 ^m 7 ^s .5	47° 2'.6	12.06	10.08	e 6 ^h 19 ^m 38 ^s .4	47° 10'.3	11.31	10.9
» 20 ^m 24 ^s .8	» 4'.8	—	11.1	f » 20 ^m 12 ^s .6	» 13'.1	9.29	8.8
» 20 ^m 44 ^s .9	» 12'.2	11.06	10.6	g » 22 ^m 1 ^s .7	» 11'.2	10.43	9.5
» 19 ^m 37 ^s .5	» 11'.9	10.53	9.5				

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 agosto del 1927.

raccordate a

PD. 3907 6^M.92 W

c

PD. 3982 6^M.06 G⁽¹⁾

Per la stella *b* risultarono dai confronti delle oscillazioni fra 10^M.4 e 11^M.1 perciò non venne dedotta la grandezza fotometrica e non si è fatto alcun uso dei relativi confronti per lo studio della variabile. Dai confronti con le altre stelle risultarono i seguenti valori per la grandezza della variabile.

Data J. D. T. M. G.	Gr.	Col.	(O-C) ₁	(O-C) ₂	Data J. D. T. M. G.	Gr.	Col.	(O-C) ₁	(O-C) ₂
2424976.4	10.86	WG	—	—	2425006.4	9.82	G +	+0.04	+0.03
979.4	10.63	»	+0.19	+0.08	017.4	9.65	»	— 5	— 7
982.4	10.53	»	+ 10	+ 3	020.4	9.80	»	+ 7	+ 4
985.4	10.41	»	+ 2	— 6	024.4	9.89	G	+ 8	+ 5
990.4	10.32	»	+ 6	0	026.4	9.94	»	+ 8	+ 5
993.4	10.15	G	+ 1	— 5	029.4	9.94	»	+ 2	— 5
996.4	10.06	»	0	— 3	082.4	9.95	»	—	—
999.4	9.94	»	— 2	— 4	038.4	9.99	WG	—	—

$$\Sigma (O-C)_1 = +0^M.60 \quad \Sigma (O-C)_2 = -0^M.02.$$

Sulla base dei precedenti valori delle grandezze che insieme ai tempi sono stati riportati sopra due assi cartesiani ortogonali (v. fig.) si è eseguito un primo ragguaglio grafico, escludendo la prima e le ultime due osservazioni per le condizioni sfavorevoli nelle quali furono eseguite.

Applicando il procedimento accennato dal prof. A. Bemporad in questi *Rendiconti*⁽²⁾ ossia la formola d'interpolazione di Stirling

$$f(a + yv) = f(a) + yf'(a) + \frac{y^2}{2} f''(a) + \frac{y^3 - y}{6} f'''(a) + \frac{y^4 - y^2}{24} f^{IV}(a)$$

nella quale $f(a + yv)$ s'identifica con *G* (grandezza della variabile) e *v* con $\frac{l}{10}$ essendo *l* l'intervallo di tempo espresso in giorni a partire dalla data del maggio 9.5 T. M. G. = 2425010.5 J. D. T. M. G. si è ottenuta dapprima la formola rappresentativa

$$(1) G = 9^M.71 + 0.0112 \cdot l + 0.00125 \cdot l^2 + 0.000012 \cdot l^3 - 0.0000005 \cdot l^4.$$

(1) *Photometrische Durchmusterung* von G. MÜLLER und P. KEMPE. Potsdam, 1907.

(2) Vol. III, p. 189 (1926).

Abbiamo quindi determinato col metodo dei minimi quadrati le correzioni da apportare ai cinque coefficienti della (1) in base alle 13 osservazioni comprese fra

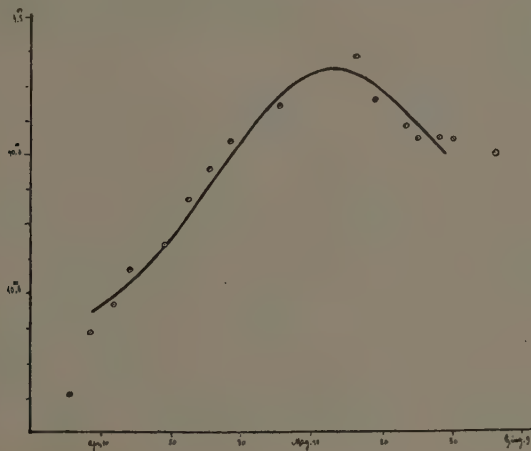
Aprile 8.4 T. M. G. = 2424979.4 J. D. T. M. G.

e

Maggio 28.4 » = 2425029.4 »

Si è ottenuto in tal modo la formola rappresentativa più approssimata

$$(2) G = 9^M.721 - 0.01028 \cdot t + 0.00136 \cdot t^2 + 0.000008 \cdot t^3 - 0.00000062 \cdot t^4.$$



Dal confronto fra i residui $(O-C)_1$; $(O-C)_2$ lasciati rispettivamente dalle due formole, e riportati nel quadro precedente, la rappresentazione è effettivamente migliorata.

Dalla derivata della (2), sempre applicando i procedimenti del calcolo d'interpolazione, abbiamo ricavato come epoca del massimo

$$1927 \text{ maggio } 13^d.2 \text{ T. M. G.} = 2425014.2 \text{ J. D. T. M. G. } 9^M.70.$$

Questa confrontata con l'epoca del primo massimo osservato dal sig. Lacchini e comunicato nelle « Astronomische Nachrichten » (n. 5508)

$$2424915 \text{ J. D. T. M. G. } 8^M.7$$

fornisce come valore del periodo $99^d.2$ in coincidenza, certo casuale, ma non pertanto perfetta col valore enunciato nella suddetta Nota.

La differenza tra le grandezze corrispondenti ai due massimi si spiega sia osservando che trattasi di due massimi a diverse epoche, sia con la diversità dei metodi e strumenti adoperati.

Astrofisica. — *Stime di grandezza della cometa Pons-Vinnecke.* Nota di Q. COLACEVICH, presentata dal Corrisp. G. ABETTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meteorologia. — *Andamenti periodici della temperatura media diurna a Modena.* Nota ⁽¹⁾ del dott. M. BARUZZI, presentata dal Socio Q. MAJORANA.

Nell'anno 1923, in qualità di assistente presso l'Osservatorio Geofisico della R. U. di Modena, ricevetti dal Direttore di esso, prof. Carlo Bonacini, l'incarico di studiare l'andamento della temperatura a Modena; di tale lavoro, che è da poco ultimato, ritengo opportuno rendere qui noti i risultati principali, riservandone ad altra occasione la esposizione completa.

Il lavoro ha avuto per scopo lo studio dei vari andamenti della temperatura media diurna vera T_m , intendendo per tale la media di tutte le 24 temperature verificatesi ora per ora nel corso della giornata; si è quindi dapprima studiata la differenza fra questa e la temperatura media (T_i) calcolata dalle temperature delle 9^h, 21^h, massima e minima (sistema italiano o Cantoni), differenza variabile nel corso dell'anno secondo la formula:

$$\begin{aligned} T_m - T_i = & 0^{\circ}.1080 + 0.1289 \cdot \text{sen } (100^{\circ} 30' + M) \\ & + 0.0550 \cdot \text{sen } (327^{\circ} 42' + 2M) \\ & + 0.0114 \cdot \text{sen } (350^{\circ} 57' + 3M) \\ & + 0.0156 \cdot \text{sen } (32^{\circ} 28' + 4M), \end{aligned}$$

ove M è l'angolo corrispondente ad una data epoca dell'anno.

Corrette con questa formula le temperature medie diurne osservate nel quarantacinquennio 1881-1925 (e una parte di esse con un'altra correzione dovuta al fatto che dal 20 giugno 1898 le osservazioni furono eseguite in una balconata meteorica diversa da quella usata dapprima), si sono studiati i vari andamenti, riguardo ai quali i più importanti risultati sono i seguenti:

1° *Andamento normale annuo.* — La temperatura media diurna vera segue durante l'anno la formula:

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1927.

$$\begin{aligned}
 T_m &= 13^{\circ}.0325 + 11.0674 \cdot \text{sen } (253^{\circ} 24' + M) \\
 &\quad 0.9278 \cdot \text{sen } (313^{\circ} 7' + 2M) \\
 &\quad 0.2889 \cdot \text{sen } (206^{\circ} 12' + 3M) \\
 &\quad 0.0975 \cdot \text{sen } (151^{\circ} 44' + 4M),
 \end{aligned}$$

la quale fornisce un massimo di $24^{\circ}.22$ per la pentade 42 ⁽¹⁾ (25-29 luglio) e un minimo di $1^{\circ}.35$ per la pentade 3 (11-15 gennaio); il medio $13^{\circ}.03$ viene raggiunto alle pentadi 22 e 59 (esattamente il 17 aprile e il 18 ottobre); l'elongazione totale importa $22^{\circ}.87$.

L'andamento della variabilità delle medie pentadiche presenta un massimo in gennaio-febbraio, un minimo dalla metà di luglio a metà di agosto; è cioè regolarmente inverso di quello della temperatura assoluta. Vi sono inoltre due massimi relativi, uno ai primi di giugno e l'altro in novembre; il primo si estende anche alla seconda metà di maggio, ma non si hanno in questo mese valori eccessivi; ambedue sono dovuti al verificarsi delle due principali anomalie termiche dell'anno.

Il numero delle variazioni delle medie pentadiche (cangiamenti di segno della differenza fra media pentadica osservata e calcolata) segue invece un andamento correlativo con quello della temperatura, presentando cioè valori massimi nel trimestre estivo, minimi nell'invernale; il valore massimo però si è avuto in aprile.

Dallo studio analogo sui valori mensili si è ottenuto, diversamente dai risultati precedenti, un valore relativamente elevato per la variabilità di maggio, per cui si può dire che il carattere lievemente invernale del mese di maggio a Modena consiste più che altro, per quanto riguarda il valore assoluto delle temperature media diurna, nella maggior costanza degli scostamenti della temperatura osservate dalle normali. Il numero delle variazioni dei valori mensili è molto basso per il mese di novembre, bassissimo per quello di febbraio, per cui si può dire che il carattere di questi due mesi è molto probabilmente quello del mese precedente.

2° *Oscillazioni di periodo pluriennale.* — Confrontando le temperature medie annuali col medio generale $13^{\circ}.0325$ si è trovato che furono relativamente caldi gli anni intorno al 1882, al 1901 e al 1920, relativamente freddi quelli intorno al 1891 e al 1910; un tale andamento è perfettamente in accordo nella durata e nelle date con il periodo decanovenale trovato dal Rizzo ⁽²⁾ per Torino, e che egli trova coincidere col variare dell'inclinazione dell'orbita lunare sull'equatore terrestre.

(1) Base di calcolo è stata sempre la pentade, che fornisce un buon numero di valori annuali di egual peso.

(2) Rizzo, *Die Sekulären Temperaturschwankungen in Turin.* « Met. Zeitschr. », nov. 1893, p. 411.

Nulla si può dire circa l'esistenza di altri periodi (Koeppen, Brückner).

3° *Oscillazioni ad epoca costante entro l'anno.* — Il confronto delle temperature medie pentadiche osservate con quelle normali, opportunamente messo in relazione con i risultati di studi fatti dal Ragona ⁽²⁾ sul ventennio 1861-1880 immediatamente precedente al periodo studiato, dà come sicura l'esistenza di quattro anomalie termiche durante l'anno, che si presentano con un insospettato carattere di simmetria; oltre a quella ben conosciuta del giugno (amplitudine 2°.276), si ha sicuramente anche quella di novembre (ampl. 1°.842), una terza nell'intorno del minimo annuale (ampl. 1°.039) e l'ultima nell'intorno del massimo (ampl. 0°.527); ognuna di esse consta di un primo periodo di caldo seguito da uno di freddo, della durata di circa 3 pentadi ciascuno; inoltre la prima e l'ultima, vicine nel tempo, distano fra loro come le altre, pure vicine, mentre c'è una leggera diversità di tempo passando dal gruppo di quelle all'insieme di queste o viceversa.

4° *Oscillazioni regolari ad epoca non costante.* — Oltre a queste si sono potute isolare delle lievi oscillazioni di temperatura, lente e regolari, oscillazioni che nel quarantacinquennio studiato si sono effettivamente verificate due anni su tre; il periodo principale è di 123 giorni per una oscillazione completa, di modo che nei successivi anni i massimi (e rispettivamente i minimi) sono in ritardo di 4 giorni. L'ampiezza calcolata con formula periodica è di soli 0°.277; ma la differenza fra il massimo e il minimo medi veramente avutisi è molto maggiore, più del doppio; e ciò è dovuto al fatto che dei tre periodi di cui viene l'anno a constare, uno è molto nitido ed evidente (ampl. 0°.741), un altro ha ampiezza minore (ampl. 0°.619), mentre il terzo non esiste affatto, avendosi anzi, in corrispondenza di esso, andamento discorde.

In complesso l'oscillazione è rappresentabile con la formula

$$T = 0°.1383 \cdot \text{sen} \{ 3 \cdot (331°5' - 3°57' \cdot N + M) \},$$

ove M al solito è l'angolo corrispondente ad una certa epoca dell'anno, N invece è il numero formato dalle due ultime due cifre dell'anno di cui si vuole sapere l'andamento (nel secolo attuale).

Per gli anni prossimi i due periodi più nitidi avranno la distribuzione:

(2) RAGONA, *Andamento annuale della temperatura*. Suppl. alla « Met. Ital. », Roma, 1876. RAGONA, *Sur les périodes annuelles de chaud et de froid*. Estratto nel « Compte Rendu de la 10^e Session de l'Association française pour l'avancement des sciences ». (Alger) 1881, pp. 396-415.

Anno	Temperature superiori alle normali	Temperature inferiori alle normali
1928	20 gennaio-22 marzo	22 marzo-22 maggio
»	22 settembre-23 novembre	23 novembre-24 gennaio
1929	24 gennaio-26 marzo	26 marzo-26 maggio
»	26 settembre-27 novembre	27 novembre-28 gennaio
1930	28 gennaio-30 marzo	30 marzo-30 maggio
»	30 settembre-1° dicembre	1° dicembre-1° febbraio

Essendo però la variabilità media dei valori pentadici 1° 862, quella dei valori mensili 1° 102, il verificarsi di tali periodi di caldo e freddo non si può seguire attraverso le ordinarie osservazioni, anche se di assoluta sicurezza.

Aerologia. — *La direzione risultante dei venti alle varie altezze desunta dalle osservazioni di palloni piloti eseguite a Vigna di Valle (Bracciano).* Nota ⁽¹⁾ di F. EREDIA, presentata dal Socio L. PALAZZO.

In una Nota precedente ⁽²⁾ fu esaminata la variazione della velocità del vento dal suolo fino a 4000 m., e a completamento di siffatta ricerca facciamo seguire ora alcune considerazioni sulla eventuale variazione della direzione risultante del vento a seconda delle diverse altezze a Vigna di Valle.

La prima ricerca su tale argomento fu condotta dal prof. C. Fabris che esaminò le osservazioni eseguite quotidianamente alle ore 8, a mezzo di palloni piloti, dal giugno 1910 al maggio 1911 ⁽³⁾. Egli dedusse che la risultante annua ruota con l'altezza in senso contrario a quello degli indici dell'orologio. Tale rotazione è poi notevole particolarmente negli strati inferiori dell'atmosfera e cioè fra 270 m. (suolo) e 1400 m. sul livello del mare, mentre da 1400 m. a 8000 m. la direzione del vento risultante si mantiene quasi costante.

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1927.

(2) Vol. V, serie 6^a, 1° semestre, fascicolo 9, maggio 1927.

(3) FABRIS C., *Risultati di lanci di palloni piloti eseguiti alla stazione aerologica di Vigna di Valle (giugno 1910-maggio 1911)*. R. Comitato Talassografico Italiano; Memoria VIII; Venezia 1912.

Una differenza constatò il Fabris al variare delle stagioni; nell'estate il vento ruota verso destra rispetto a quello invernale negli strati inferiori; poi fra 600 e 1000 m. ruota rapidamente in modo da risultare inclinato verso sinistra rispetto al vento normale.

Per le risultanti annue si vede che, mentre fra le altezze di 270 m. e 1400 m. il vento ruota di 101° verso sinistra, fra 1400 e 8000 m. la rotazione verso sinistra è di 30° ; per le risultanti invernali le due rotazioni corrispondenti sono di 75° e di 32° e per le risultanti estive di 123° e di 15° .

L'esplorazione dell'atmosfera a mezzo di piloti non ha subito alcuna interruzione a Vigna di Valle, ed è quindi parso opportuno riunire tutto il materiale raccolto fino al 1925 all'intento di vedere fino a qual punto possono completarsi le cognizioni al riguardo.

Il risultato di tale indagine è indicato nella tabella seguente ove sono trascritti l'angolo della direzione della risultante del vento medio col meridiano (α nella tabella) e la grandezza della risultante (R nella tabella), entrambi ottenuti coll'impiego delle note formule di Lambert. All'intento di rendere più evidenti le eventuali rotazioni gli angoli della direzione del vento medio sono stati contati da 0° a 180° e considerati positivi pel semicerchio N, E, S e negativi per l'altro semicerchio N, W, S.

Le diverse frequenze furono ridotte supponendo uguale a 1000 il totale delle osservazioni compiute, in ciascun mese dell'anno, ad ogni quota.

Come grandezza R abbiamo considerato il numero delle volte che il vento ha effettivamente soffiato nella direzione di cui è dato l'azimut.

Le anzidette determinazioni si riferiscono a quote variabili di 200 in 200 metri dal suolò (m. 270) fino all'altezza di 2000 m. e di poi le quote si susseguono di 500 in 500 metri fino alla quota di 6000 m. Non abbiamo creduto oltrepassare tale quota perchè nel quattordicennio anzidetto (1911-1925) pochi sondaggi quotidiani la superarono.

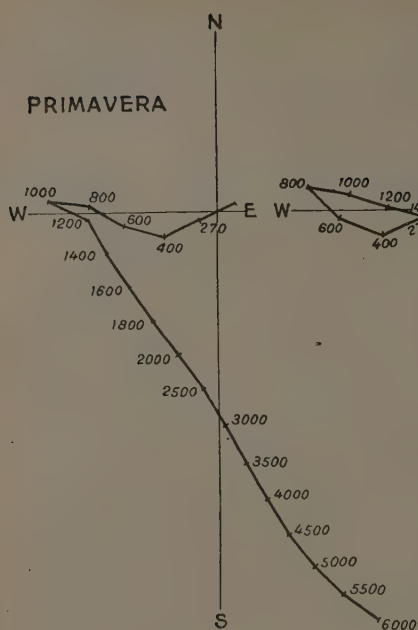
Quote in metri	Direzione del vento medio								Direzione media riferita alla rosa dei venti			
	Inverno		Primavera		Estate		Autunno		In- verno	Prima- vera	Estate	Au- tunno
	α	R	α	R	α	R	α	R				
270	58° 16'	58	67° 12'	44	68° 10'	54	68° 09'	53	ENE	ENE	ENE	ENE
400	50 22	59	65 46	42	66 28	50	62 04	51	NE	ENE	ENE	ENE
600	52 43	16	105 43	19	111 50	17	114 55	18	NE	ESE	ESE	ESE
800	50 19	10	117 34	13	137 53	9	131 45	15	NE	ESE	SE	SE
1000	42 08	8	98 25	5	— 79 58	4	172 45	10	NE	E	W	S
1200	— 10 49	19	— 69 05	4	— 71 47	25	— 116 51	6	N	WNW	WNW	WSW
1400	— 7 24	24	— 28 14	9	— 76 18	34	— 93 20	9	N	NNW	WNW	W
1600	— 12 19	24	— 33 48	16	— 57 15	35	— 63 09	35	NNW	NW	WNW	WNW
1800	— 14 32	28	— 36 12	17	— 53 18	39	— 54 33	19	NNW	NW	NW	NW
2000	— 8 01	30	— 36 15	21	— 54 29	45	— 40 22	22	N	NW	NW	NW
2500	— 15 02	35	— 35 02	31	— 49 50	49	— 38 02	31	NNW	NW	NW	NW
3000	— 10 59	34	— 30 22	40	— 50 55	50	— 37 18	37	N	NW	NW	NW
3500	— 7 55	35	— 28 03	40	— 46 49	51	— 37 39	38	N	NNW	NW	NW
4000	— 9 52	30	— 30 42	38	— 52 83	57	— 32 45	40	N	NNW	NW	NNW
4500	— 14 03	42	— 28 32	42	— 47 53	58	— 40 37	46	NNW	NNW	NW	NW
5000	— 9 19	38	— 37 48	40	— 46 06	54	— 36 53	46	N	NW	NW	NW
5500	— 3 09	33	— 45 06	41	— 50 00	44	— 38 31	45	N	NW	NW	NW
6000	1 11	31	— 55 46	36	— 40 56	39	— 35 36	40	N	NW	NW	NW

I valori così ottenuti mostrano chiaramente il cambiamento di direzione della risultante col variare dell'altezza e a seconda delle diverse epoche dell'anno e che si inizia alla quota 1200 m., eccetto l'estate in cui ha luogo a quota inferiore cioè a quella di 1000 m.

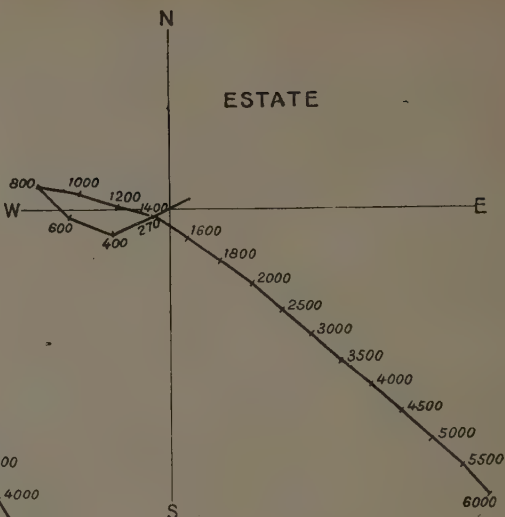
L'entità degli spostamenti non sono sempre dello stesso ordine di grandezza; e difatti tra il suolo e la quota 1200 è rilevante, si riduce di molto tra quest'ultima quota e quella di 1800 e ulteriore diminuzione subisce per le quote successive nelle diverse stagioni eccetto l'inverno, ove è caratteristica la minima variazione tra le quote 1200 e 1800.

Quote	Inverno	Primavera	Estate	Autunno
suolo—1200	69°	136°	140°	165°
1200—1800	4°	37°	23°	63°
1800—6000	13°	24°	12°	18°

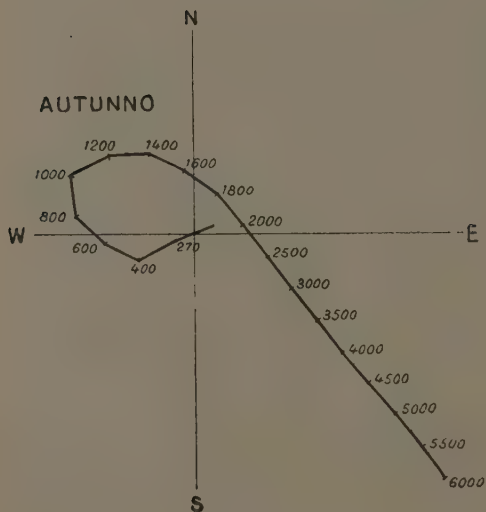
PRIMAVERA



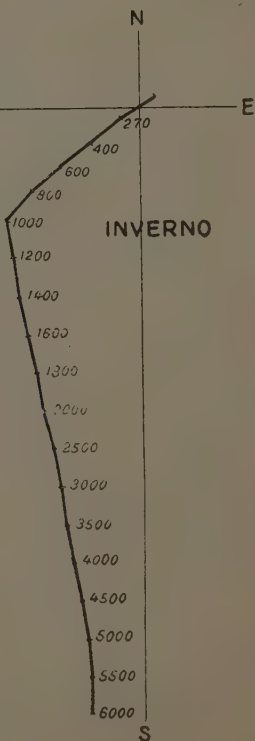
ESTATE



AUTUNNO



INVERNO



Quanto si è finora esposto sta a confermare il risultato che ottenne il Fabris basandosi su una sola annata di sondaggi.

La riproduzione dei valori anzidetti nelle figure 1, 2, 3 e 4 indica sinteticamente le particolarità anzidette. Riferendosi alla rosa dei venti risulta che in inverno la direzione del vento medio è di NE fino alla quota 1000 m. e poi si sposta verso N e tale rimane fino alla quota 6000 m. eccetto alcuni sbandamenti verso NNW.

Nella primavera dall'ENE si passa a SE e a W per assumere alla quota 1800 la direzione di NW; e lo stesso si dica, con poche varianti, per le altre stagioni.

Può dirsi dunque che a cominciare dalla quota 1800 la direzione del vento medio è quella di NW eccetto l'inverno in cui si nota uno spostamento verso nord.

Lo strato compreso tra le quote 600 e 800 m. presenta una irregolarità inquantochè si manifestano venti di ESE e SE in tutte le stagioni, eccetto l'inverno, cioè in quelle epoche dell'anno ove più distinte si verificano le brezze che, analogamente a quanto hanno constatato altri studiosi, rimangono sensibili a Vigna di Valle fino a quasi 500 m. dal suolo.

La grandezza della risultante è più rilevante al suolo e alla quota 400 (la maggior parte dei lanci vengono eseguiti con vento non forte e cielo non molto nuvoloso) e successivamente degrada per raggiungere il minimo alla quota 1000 m. in inverno e in estate; alle quote 1000 e 1200 in primavera; e alla quota 1200 in autunno.

Tale diminuzione della grandezza della risultante avviene appunto in quegli strati nei quali fu riscontrata una quasi costante velocità media.

Oltrepassate tali quote la grandezza della risultante torna ad aumentare e presenta una piccola variazione negli strati successivi.

Fisica. -- *Sopra l'intensità di una riga proibita del potassio.*
Nota ⁽¹⁾ di F. RASETTI, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

È noto che negli spettri degli atomi non si osservano tutte le possibili combinazioni dei termini, ma solo quelle soddisfacenti a determinate regole di selezione dei numeri quantici.

Queste leggi valgono solamente per l'atomo sottratto ad ogni azione esterna; quando invece su di esso agiscano dei campi elettrici o magnetici, dovuti eventualmente agli atomi circostanti, si manifestano anche delle righe, dette proibite, per le quali le accennate regole non sono verificate.

Così per esempio si osservano delle eccezioni al principio secondo cui il quanto azimutale k deve variare di ± 1 , poichè si hanno delle combinazioni del tipo $P \rightarrow P$, $S \rightarrow D$, ecc.

Righe di questo genere sono state osservate non solo in emissione, ma anche in assorbimento, nei metalli alcalini ⁽²⁾ (combinazioni $S \rightarrow D$). Esse sono estremamente meno intense delle righe non proibite, per es. delle combinazioni $S \rightarrow P$, tanto da far ritenere probabile che esse siano dovute a un effetto perturbatore dei campi molecolari; e che quindi si manifestino soltanto a pressione sufficientemente elevata. Tale effetto di pressione può essere reso assai grande dal fatto che gli atomi perturbatori sono uguali a quello perturbato, e quindi entra in giuoco una specie di risonanza, come hanno mostrato, per l'allargamento delle righe, i lavori di Trumpy ⁽³⁾, Holtsmark ⁽⁴⁾ e L. Mensing ⁽⁵⁾.

Tuttavia, il problema se la presenza di queste combinazioni $S \rightarrow D$ sia un effetto di pressione, non è ancora risolto. Il metodo più semplice per decidere consisterebbe nel misurare l'assorbimento a diverse pressioni e vedere se cresce proporzionalmente alla densità degli atomi, o più rapidamente. Naturalmente, in luogo dell'assorbimento si può studiare qualche fenomeno ad esso legato, e meglio misurabile, per es. la dispersione anomala o l'effetto Macaluso-Corbino. Le misure però sono difficili anche in questo caso per la piccolezza del fenomeno.

Descriverò brevemente alcune esperienze da me eseguite sul vapore di potassio, dalle quali non ho ottenuto dati abbastanza precisi per decidere l'accennata questione, però ho ricavato una valutazione del coefficiente di dispersione anomala di una riga proibita.

(1) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1927.

(2) S. DATTA, « Proc. Roy. Soc. », 101, 589, 1922.

(3) B. TRUMPY, « ZS. f. Phys. », 34, 715, 1925.

(4) J. HOLTSMARK, « ZS. f. Phys. », 34, 722, 1925.

(5) L. MENSING, « ZS. f. Phys. », 34, 611, 1925.

Ho adoperato il vapore di potassio, e ho studiato l'assorbimento del doppietto $4^2S - 3^2D$, $\lambda 4642$, avente una separazione di 0.8 \AA . Sono riuscito a fotografare la magnetorotazione presso queste righe, nel vapore alla pressione di circa 1 cm. , in un tubo di 10 cm. di lunghezza e in un campo di 1000 gauss . Però ho trovato più adatta alle misure la dispersione anomala, servendomi del metodo del Puccianti. Lo strato di vapore attraversato era di 30 cm. , e le frangie venivano fotografate mediante un reticolo concavo di circa due metri di raggio.

Quando il vapore di potassio era tanto denso, da assorbire quasi tutto il rosso dello spettro, si cominciava ad osservare la dispersione anomala della riga $\lambda 4642$; crescendo ancora la densità, poco dopo le frangie spariscono, assorbendo il vapore anche la regione dello spettro intorno a $\lambda 4600$; perciò non ho potuto fare misure in un intervallo di pressione abbastanza grande per risolvere la questione dell'origine delle righe proibite.

Alla pressione di vapore usata, la dispersione anomala dovuta alle righe rosse della serie principale, $\lambda 7665, 7699$ era tale, da inclinare fortemente le frangie anche nella regione della riga $\lambda 4642$; così che con una sola fotografia in questa zona si poteva avere il numero di elettroni di dispersione per la riga $\lambda 4642$ e per il doppietto $\lambda 7665, 7699$, servendosi della formula:

$$n - 1 = \frac{N e^2 \lambda^2 \lambda_0^2}{2 \pi m c^2 (\lambda^2 - \lambda_0^2)}$$

dove n è l'indice di rifrazione, N il numero degli elettroni di dispersione per cm^3 ; e gli altri simboli hanno il solito significato.

Poichè, come è noto⁽¹⁾, per il doppietto rosso N è press'a poco uguale al numero di atomi, dalla misura della dispersione dovuta a questa riga si può dedurre la densità del vapore; e quindi, per la riga $\lambda 4642$, ottenere un dato assoluto sopra il numero di elettroni di dispersione.

Dalle misure è risultato, per il doppietto $\lambda 7665, 7699$:

$$N = 2,5 \cdot 10^{17}$$

il che, per la proprietà osservata, corrisponde a una pressione di circa 18 mm

Per la riga $\lambda 4642$ ho trovato invece:

$$N' = 2,7 \cdot 10^{11}$$

da cui si deduce che il numero degli elettroni di dispersione per la riga proibita è, in queste condizioni, un milione di volte minore che per il primo doppietto della serie principale, cioè di uno per 10^6 atomi.

Naturalmente, questo dato vale soltanto per la pressione indicata, se, come è probabile, dipende dalla densità.

L'errore probabile nella misura di N può valutarsi al 50% .

(1) R. MINKOWSKY, «ZS. f. Phys.», 36, 839, 1926.

Chimica-fisica. — *Sulla struttura cristallina dei cloruri bivalenti. Cloruri di cobalto e di nichel anidri.* Nota ⁽¹⁾ di A. FERRARI, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

L'esame röntgenografico dell'isomorfismo del cloruro di litio anidro con quello di magnesio pure anidro, da me fatto in collaborazione con G. Bruni ⁽³⁾, aveva reso necessario lo studio del reticolo cristallino del cloruro di magnesio, che a differenza di quello di litio non era noto. La cella elementare di questo cloruro risultò come abbiamo allora riferito pseudocubica. Per meglio chiarire questa struttura, pure in collaborazione con G. Bruni, ho studiato col metodo di Laue i cloruri di magnesio, manganese bivalente e cadmio ⁽⁴⁾. Si ritrovò che presentano la stessa struttura a simmetria romboedrica, però con rapporti assiali diversi. Il cloruro ferroso anidro studiato da me successivamente, anche col metodo di Laue, mostra di possedere la stessa struttura del cloruro di magnesio e rapporto assiale 2.40. Non mi è stato possibile invece ottenere dei fotogrammi di Laue che permettessero di dedurre la struttura e il rapporto assiale dei cloruri di nichelio e cobalto. Però dai rapporti assiali calcolati per i cloruri di magnesio, ferro (ferroso), manganese (manganoso) e cadmio, si deduce che il valore del rapporto stesso varia regolarmente col variare del raggio dell'ione metallico.

La curva che rappresenta questa variazione è stata data in un recente lavoro ⁽⁵⁾.

Supponendo, come appariva probabile, che anche i cloruri di nichelio e cobalto anidri presentassero la struttura del cloruro di magnesio: dalla predetta curva assumendo per i raggi degli ioni metallo i valori calcolati da V. M. Goldschmidt ⁽⁶⁾ si giungerebbe ad attribuire al cloruro di nichelio il rapporto assiale 2.45, a quello di cobalto 2.42.

Basandomi su questa supposizione mi è stato possibile ordinare il fotogramma di Debye del cloruro di nichelio, ottenuto con anticatodo dello stesso metallo. Questo fotogramma non si poteva ordinare col diagramma di Hull, perchè essendo la cella del cloruro di nichelio molto grande, la

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del Politecnico di Milano.

(2) Pervenut^o all'Accademia l'8 luglio 1927.

(3) Questi « Rendiconti », (6^a), II, (1925), 457.

(4) Questi « Rendiconti », (6^a), IV, (1926), 10.

(5) G. BRUNI e A. FERRARI, *Soluzioni solide fra composti di elementi a valenza diversa*. In corso di pubblicazione nella « Zeitschr. f. physik. Chemie-Cohen Band ».

(6) « Geochemische Verteilungsgesetze », VII, « Vid. Akad. Skrifter I. M. N. Kl. », 1926, n. 2, p. 25.

maggior parte delle linee corrisponde a faccie ad indici molto alti, che cadono quindi fuori dei limiti del diagramma stesso.

Del cloruro di cobalto ho ottenuto un fotogramma col metodo delle polveri, impiegando un anticotodo di cobalto.

La cella elementare del cloruro di cobalto appare dal calcolo del fotogramma identica a quella del cloruro di nichelio, quindi anzichè col rapporto 2.42 dedotto dalla predetta curva con quello poco diverso 2.45. Queste due celle alla loro volta sono assai simili a quella del cloruro di magnesio.

L'ordinamento dei due fotogrammi di NiCl_2 e CoCl_2 è dato nella tabella I di confronto con quello di MgCl_2 ; le linee osservate nel fotogramma di quest'ultimo coincidono con quelle date nel lavoro citato del 1925, compare però qualche linea debole che allora non era stata osservata essendo stato calcolato un fotogramma meno intenso di quello ora impiegato. I risultati del calcolo sono gli stessi, salvo che le dimensioni della cella sono state raddoppiate onde tener conto delle dette linee deboli che non si interpretano colla cella semplice.

I reticoli di questi tre cloruri essendo un caso particolare del sistema romboedrico, in cui l'angolo caratteristico è di 90° , si calcolano nella tabella I come monometrici.

TABELLA I.

Cloruro di magnesio		Cloruro di cobalto		Cloruro di nichelio		Indici espressi nel sistema monometrico $h_1 h_2 h_3$	Costante reticolare di		
distanze reticolari	Intensità	distanze reticolari	Intensità	distanze reticolari	Intensità		MgCl_2	CoCl_2	NiCl_2
2.940	f	—	—	—	—	2 2 2	10.18	—	—
2.540	f	2.510	mf	2.480	f	4 0 0	10.15	10.03	9.91
—	—	2.290	m	2.290	md	3 3 1	—	9.99	9.99
2.108	m	2.072	mf	2.080	m	4 2 2	10.28	10.15	10.19
1.961	d	1.931	m	1.916	d	3 3 3 5 1 1	10.18	10.03	9.97
1.790	f	1.771	f	1.764	mf	4 4 0	10.12	10.04	10.00
—	—	—	—	1.670	dd	6 0 0	—	—	10.01
1.537	d	—	—	—	—	6 2 2	10.20	—	—
1.458	mf	1.445	f	1.445	ff	4 4 4	10.10	10.02	10.02
1.420	d	1.400	d	1.396	m	7 1 1	10.14	10.00	9.97
1.270	m	—	—	—	—	8 0 0	10.16	—	—
1.161	md	1.148	md	1.153	mf	6 6 2	10.12	10.01	10.05
1.135	ff	1.117	mf	1.109	mf	8 4 0	10.15	9.99	9.94
1.035	f	1.021	f	1.017	f	8 4 4	10.14	10.00	9.97
0.979	mf	0.966	mf	0.959	f	6 6 6 10 2 2	10.18	10.04	9.98

Facendo le medie dei valori della costante reticolare, calcolati per le varie linee di ciascun fotogramma si ricavano dalla tabella I per gli spigoli dei romboedri che costituiscono le celle elementari di questi cloruri i valori:

MgCl ₂	10.16 Å
CoCl ₂	10.02 »
NiCl ₂	10.00 »

Per analogia a quanto ho già fatto per il cloruro di magnesio⁽¹⁾ ammettiamo che anche le celle di CoCl₂ e NiCl₂ contengano 16 molecole di cloruro. Si calcolano le densità:

MgCl ₂	2.41
CoCl ₂	3.43
NiCl ₂	3.45

Le densità calcolate dei cloruri di magnesio e di cobalto sono leggermente superiori ai valori massimi sperimentali rispettivamente 2.32 e 3.348⁽²⁾. Quella del cloruro di nichelio è leggermente inferiore al valore massimo che è 3.54⁽³⁾.

Assumendo come cella elementare dei cloruri in questione un prisma esagono si avrebbero le dimensioni:

MgCl ₂	$a = 7.18 \text{ Å}$	$c = 17.60 \text{ Å}$
CoCl ₂	$a = 7.08 \text{ »}$	$c = 17.35 \text{ »}$
NiCl ₂	$a = 7.07 \text{ »}$	$c = 17.32 \text{ »}$

Questa cella assai più grande della precedente romboedrica contiene 36 molecole.

Sulla struttura dei cloruri di nichelio e di cobalto nulla era noto con certezza. In un primo tempo V. M. Goldschmidt ritenne che questi cloruri presentassero una struttura tipo molibdenite⁽⁴⁾. In seguito avendo incaricato J. Oftedal di ricerche in proposito ha recentemente affermato⁽⁵⁾ che la detta supposizione non corrispondeva alla realtà e che i cloruri di nichelio

(1) Questi «Rendiconti», (6^a), II, (1925), 461. Allora nella cella romboedrica avente spigolo metà dell'attuale introdussi per l'isomorfismo con LiCl due molecole di MgCl₂.

(2) LANDOLT, *Tabellen*, 5^a ed., Berlino, 1923, p. 302 e 300.

(3) I valori sperimentali della densità del cloruro di nichelio sono assai discordanti così nelle citate tabelle del LANDOLT a p. 304 si trova il valore 2.56 mentre nelle *International Critical Tables of National Research Council*. New York, 1926, vol. I, p. 131 è dato 3.54.

(4) «Geochemische Verteilungsgesetze», VI e VII, «Vid. Akad. Skrifter I. M. N. Kl.», 1926, n. 1, p. 16 e n. 2, p. 76.

(5) «Geochemische Verteilungsgesetze», VIII, «Vid. Akad. Skrifter I. M. N. Kl.», 1926, n. 8, p. 53 e 147.

e di cobalto non rientrano in nessuno dei due tipi di strutture esagonali di composti aventi formola AX_2 , note finora, cioè nè nel tipo «ioduro di cadmio» nè in quello «molibdenite».

Quanto a me risulta, dalle osservazioni finora fatte, che il cloruro di nichelio e quello di cobalto presentano, come avevo già presupposto⁽¹⁾, la struttura del cloruro di magnesio. Questa struttura costituisce un tipo proprio, su essa ho già pubblicato qualcosa nella Nota, in corso di stampa, citata in principio del presente lavoro. Tratterò più diffusamente di questo tipo di reticolo in questa serie di Note sulla struttura dei cloruri bivalenti, dopo che avrò esaminato i dati sperimentali e le costanti delle celle dei cloruri di ferro (ferroso), manganese (manganoso), e cadmio.

Risulta però fin d'ora accertata l'esistenza di una serie di cloruri isomorfi presentanti la struttura tipo «cloruro di magnesio».

Ho riscontrato fino ad ora appartenere in modo indubbio a questa serie i seguenti cloruri:

		raggio ione metallico
$MgCl_2$	$c/a = 2.45$	0.78 Å
$NiCl_2$	$c/a = 2.45$	0.78 »
$CoCl_2$	$c/a = 2.45$	0.80 »
$FeCl_2$	$c/a = 2.40$	0.83 »
$MnCl_2$	$c/a = 2.33$	0.91 »
$CdCl_2$	$c/a = 2.22$	1.03 »

Questa tabella mostra la regolare diminuzione del c/a coll'aumentare del raggio dell'ione metallico.

RIASSUMENDO:

I cloruri di nichelio e di cobalto presentano la stessa struttura di quello di magnesio, sono come questo romboedrici, pseudocubici, le costanti della cella elementare di questi cloruri sono molto vicine.

Infatti lo spigolo del romboedro elementare che contiene 16 molecole presenta le seguenti dimensioni:

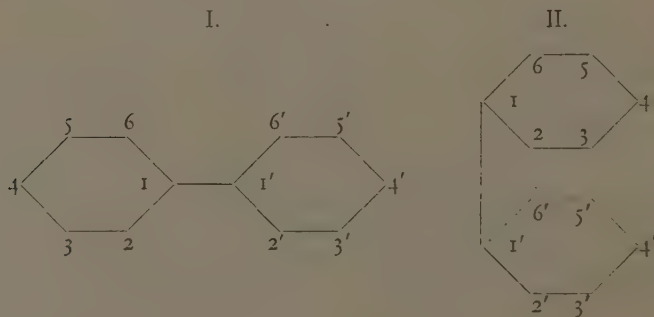
$MgCl_2$	$a = 10.16$ Å
$CoCl_2$	$a = 10.02$ »
$NiCl_2$	$a = 10.00$ »

Questi romboidri si confondono con dei cubi essendo il loro angolo caratteristico di 90° .

(1) «Questi Rendiconti» (6^a) IV (1926) 13.

Chimica. — *Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati. Interpretazione dei fenomeni di isomeria ottica* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ preliminare di L. MASCARELLI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

La scelta della formola spaziale da assegnarsi al difenile ed ai suoi derivati è stata finora assai difficile a farsi a causa delle numerose anomalie che pareva presentassero parecchi derivati del difenile studiati da tempo più o meno remoto. Ben presto sembrò che la struttura più semplice, quella cioè che ammette che i due nuclei benzenici giacciono in uno stesso piano ed abbiano un legame che può funzionare da asse comune attorno al quale liberamente possono ruotare i due nuclei benzenici, non fosse sufficiente a spiegare l'esistenza e le proprietà di alcuni derivati del difenile. Kaufler ⁽³⁾ appoggiandosi sul fatto già noto, ed ancora da lui illustrato, che la benzidina può, con facilità, dare origine a composti ciclici la cui struttura più facilmente si interpreta supponendo che i due gruppi aminici della benzidina occupino posizioni abbastanza vicine anzichè quelle più lontane, propose la struttura (II):



(1) Nel licenziare questa Nota m'accorgo che nell'ultimo fascicolo dei «Berichte d. Chem. Ges.» (15 giugno 1927, p. 1425) è comparsa una importante pubblicazione di Meisenheimer e Horing, nella quale gli Autori pervengono alle stesse conclusioni teoriche dopo aver compiuto ricerche quasi identiche alle mie. Non mi rimane che a rallegrarmi nel vedere confermato pienamente, anche da altri abili ricercatori, quanto io supponevo. Stimolo tuttavia conveniente pubblicare integralmente questa mia Nota, poichè questo conferma che lo studio sul difenile e suoi derivati è ora, specie per opera di studiosi inglesi, giunto ad un punto tale da poter addivenire a conclusioni sulla struttura di queste sostanze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1927.

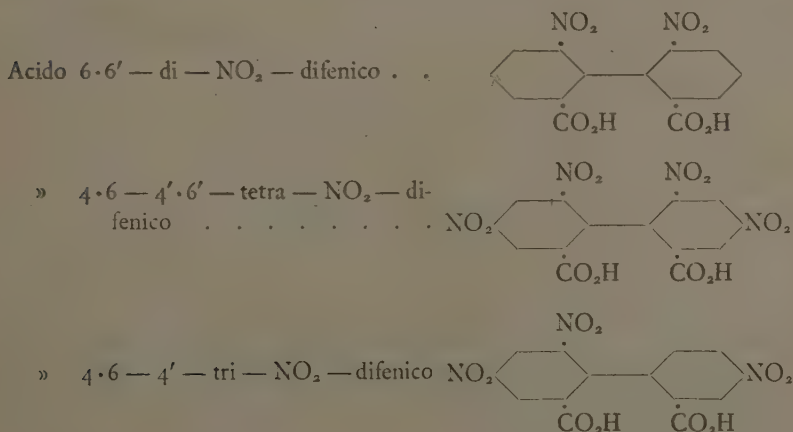
(3) «Liebig's Annalen», 351, 151 (1907); «Ber. d. D. Chem. Ges.», 40, 5250 (1907).

nella quale le distanze tra le posizioni 2—2'; 3—3'; 4—4'; 5—5'; 6—6' potevano essere uguali. Questa supposizione fu accettata da vari ricercatori, perchè pareva dar ragione di certi fenomeni particolari di isomeria *cis-trans*, che non erano spiegabili col tipo I, che il tipo II faceva prevedere e che si credette un tempo di aver trovato per alcuni derivati del difenile; ma poi fu dimostrato che tali isomeri non sono di tipo *cis-trans*. L'interessante scissione in antipodi ottici dell'acido 6—6'—di—nitro—difenico, effettuata da Christie e Kenner⁽¹⁾ ha fatto estendere le ricerche sui derivati del difenile capaci di subire la scissione ora detta (e parecchi infatti sono stati scissi; (v. dopo).

Già King⁽²⁾ aveva messo in evidenza che la struttura proposta da Kauler ammetteva la possibilità di scissione in antipodi ottici di particolari derivati del difenile (di—nitrobenzidine e di—nitro—tolidine di Cain). Però la struttura II porta alla esistenza di isomeri ottici anche per vari derivati del difenile che l'esperienza non ha confermato (v. dopo).

Recentemente vari autori (Bell e Kenyon, Turner e Le Fèvre, ecc.), e più specialmente W. H. Mills⁽³⁾, ricorrendo anche ai dati che si ricavano dalle misure fatte con la fotografia a mezzo dei raggi X circa la distanza tra i centri degli atomi di carbonio e di ossigeno, hanno supposto che la causa dei fenomeni di isomeria ottica nei derivati del difenile, sia da ricercarsi nel fatto che la libera rotazione dei due nuclei benzenici attorno all'asse comune (tipo I) sia ostacolata dal volume e dalla distanza (ed anche accessoriamente da altre proprietà) dei gruppi sostituenti in 2—2' e 6—6'.

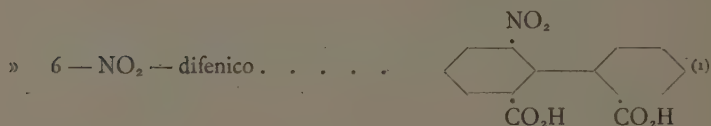
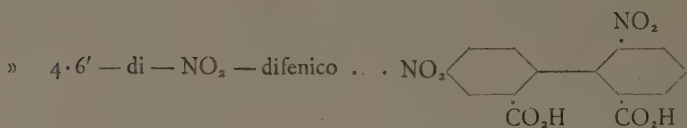
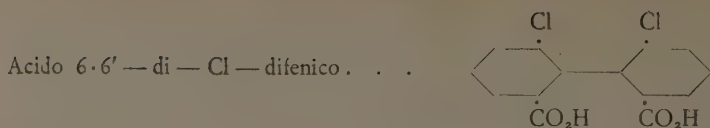
Pertanto i derivati che finora furono con sicurezza scissi in antipodi ottici sono:



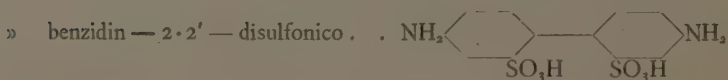
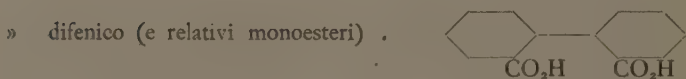
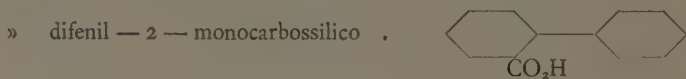
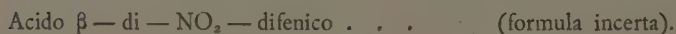
(1) « Journ. of the Chem. Soc. », London, 121, 614 (1922).

(2) « Proceedings of the Chem. Soc. », London, 30, 250 (1914).

(3) « Chemistry and Industry », 45, 884, 905 (1926).



Quelli che alle prove di scissione hanno dato risultati negativi sono:

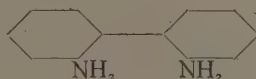


Tutti questi derivati contengono gruppi carbossilici, salvo l'ultimo che contiene gruppi sulfonici. Sono precisamente questi gruppi a funzione acida che hanno permesso di compiere (nei prodotti della prima serie) la scissione in antipodi ottici, ricorrendo al ben noto metodo della salificazione con basi attive.

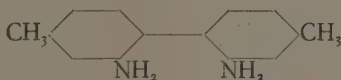
(1) A questi ora è da aggiungersi il 2·2' — di — NH₂ — ditolile scisso da Meisenheimer e Höring (l. c.).

Rimanevano a mia disposizione alcuni derivati aminici del difenile che mi ero preparato per le ricerche sui composti organici eterociclici contenenti jodio plurivalente in catena chiusa (basi difenilenjodoniche ed omologhi). Tali sostanze sono:

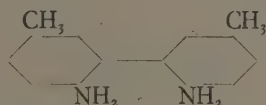
2.2' — di — NH₂ — difenile



2.2' — di — NH₂ — 4.4' — di — CH₃ —
— difenile

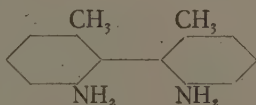


2.2' — di — NH₂ — 5.5' — di — CH₃ —
— difenile



alle quali ho aggiunto il:

2.2' — di — NH₂ — 6.6' — di — CH₃ —
— difenile

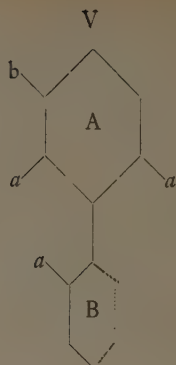
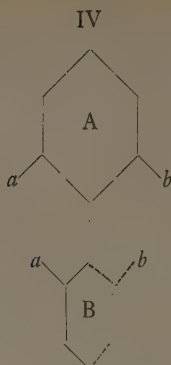
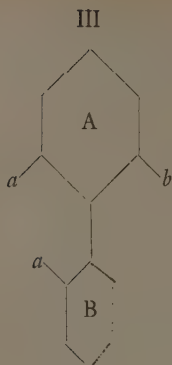


che mi sono preparato non solo per completare la serie ma perchè esso offriva interesse del tutto speciale, contenendo quattro gruppi sostituenti nelle posizioni 2—2'; 6—6' che sono quelle che più ci interessano (v. dopo).

Tutti questi composti differiscono degli acidi difenici per il fatto di contenere gruppi aminici in luogo dei carbossili.

Nessuno dei primi tre derivati mi ha, alle varie prove fatte finora, dato indizi che essi possano essere scissi in antipodi ottici. Invece l'ultimo (2—2'—di—NH₂—6—6'—di—CH₃—difenile) si è mostrato indubbiamente capace di esistere in due forme enantiomorfe.

Dall'esame dei derivati che vennero scissi e di quelli che non lo poterono essere, pare a me che si possa addivenire alla scelta della struttura da assegnarsi al difenile e suoi derivati. Essa è quella del tipo (I) nel quale la libera rotazione dei due nuclei benzenici attorno all'asse comune avviene come si effettua per i derivati della serie grassa: però se nelle posizioni 2—2'—6—6' entrano almeno tre sostituenti (di volume sufficiente e possedenti altre proprietà accessorie) tale rotazione viene ostacolata e si converte in una oscillazione reciproca dei due nuclei A e B in modo che p. es. il sostituito *a* di B è costretto ad oscillare tra *a* e *b* di A (III).



Quindi tutti i derivati trisostituiti (convenientemente scelti) nelle posizioni 2—6—2'—6' non posseggono rotazione libera: però, perché la molecola diventi asimmetrica è inoltre necessario che le posizioni 2—6 di uno dei nuclei A contengano sostituenti diversi fra loro; il terzo sostituente nel nucleo B può essere uguale o no ad uno dei sostituenti del nucleo A.

Naturalmente se tutte quattro le posizioni 2—6—2'—6' sono occupate da gruppi uguali si avrà oscillazione invece di rotazione libera, e solo quando almeno due dei quattro sostituenti saranno diversi fra loro e questi saranno distribuiti su due nuclei (IV) la molecola sarà asimmetrica.

In alcuni casi specialissimi i sostituenti nelle posizioni 3·5—3'·5' possono contribuire alla dissimmetria molecolare (uno è indicato nella V); quelli nelle posizioni 4·4' invece non possono avere alcuna influenza

Negli « American Chemical Abstracts » del 10 giugno 1927 giuntimi pochi giorni or sono, è fatto cenno ad una pubblicazione di Kenner [« Chemistry and Industry, 46, 218, (1927)]. Mi sono procurato questo lavoro e vi trovai che tutti i derivati di recente scissi, a cui Kenner accenne (acido 4·6—4'·6'—tetra—Br—difenico; 4·4'—di—CO₂H—6·6'—di—NO₂—difenico; 6·6'—di—OCH₃—difenico; 2·2'—di—NO₂—6·6'—di—Al—difenil—4·4'—dicarbossilico) stanno in perfetto accordo colla ipotesi della rotazione ostacolata; per quelli che non poterono essere scissi (acido 4·4'—di—NO₂—difenico) non è prevedibile un impedimento alla libera rotazione dei due nuclei benzenici.

PARTE SPERIMENTALE.

Il 2—2'—di—NH₂—difenile, il 2·2'—di—NH₂—4·4'—di—CH₃—difenile, il 2·2'—di—NH₂—5·5'—di—CH₃—difenile erano stati preparati come è stato detto in altra occasione ⁽¹⁾.

(1) MASCARELLI, « Rend. R. Acc. Lincei », 1907, II, 562; 1909, II, 190; 1910, II, 308.

Il 2.2'—di—NH₂—6.6'—CH₃—difenile è stato ottenuto in modo analogo dal 2—jodio—3—nitro—toluene, che, con polvere di rame⁽¹⁾ venne convertito in 2.2'—di—NO₂—6.6'—di—CH₃—difenile, il quale fu poi ridotto (con cloruro stannoso) a diamino derivato⁽²⁾.

Le prime prove di scissione vennero tentate con l'acido bromocanfor-sulfonico, il quale già in altra occasione si era mostrato assai utile per la scissione della decaidrochinolina⁽³⁾.

Dopo vari tentativi, seguiti da risultati incerti e sconcordanti, ricorsi all'acido tartarico⁽⁴⁾.

Siccome Meisenheimer e Höring (l. c.) hanno pubblicato con ogni particolare i risultati delle loro ricerche, così mi limito qui ad accennare che, mentre per nessuno dei primi tre derivati si ebbero risultati che indicassero una avvenuta scissione in antipodi ottici, nel caso del 2.2'—di—NH₂—6.6—di—CH₃—difenile si potè invece (mediante l'acido d-tartarico) ottenere un sale meno solubile (p. f. 159°—160°) dal quale, per trattamento con ammoniaca, si ebbe un prodotto che, ricristallizzato dall'alcool in cui è poco solubile fondeva a 151° e che, in soluzione cloridrica, mostrava potere rotatorio sinistro. È da ritenersi quindi che esso sia la forma levo del 2.2'—di—NH₂—6.6—di—CH₃—difenile allo stato non ancora puro ed alla quale Meisenheimer e Höring attribuiscono il p. f. 156° (superiore a quello del racemo 136°) ed il [M]_D = —74°.

Chimica agraria. — *Il comportamento dell'acido arsenico nei riguardi del potere assorbente del terreno.* Nota di C. ANTONIAZZI, presentata dal Socio A. MENOZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) ULLMANN e FRENTZEL, «Ber. D. Ch. Ges.», 38, 727 (1905).

(2) KENNER e STUBBINGS, «Journ. Chem. Soc.», London, 119, 600 (1921).

(3) MASCARELLI e NIGRISOLI, «Rend. R. Acc. Lincei», 1914, II, 276, 281; anche 1913, II, 155.

(4) Anche MEISENHEIMER e HÖRING (l. c.) trovano che l'acido bromocanforsulfonico non si presta in casi simili.

Geologia. — *I molluschi miocenici di Porto Bardia e dell'Oasi di Giarabùb (Marmarica).* Nota ⁽¹⁾ di A. DESIO, presentata dal Socio G. DAINELLI.

Dopo aver dato notizia in una nota precedente sugli echinodermi ⁽²⁾ raccolti durante in viaggio all'Oasi di Giarabùb, promosso nel 1926 dalla Reale Società Geografica Italiana, riassumerò ora brevemente il risultato delle determinazioni del materiale malacologico. Gran parte di esso proviene dagli immediati dintorni di Porto Bardia e dall'Uadi Giarabùb. Nella prima località le forme riconosciute sono le seguenti:

Gastrocaena sp. (cfr. *dubia* Pennt.).

Ostrea edulis L.

» *lamellosa* Br.

» cfr. *digitalina* var. *Rohlfsi* Fuchs.

» (*Gigantostrea*) *crassicostata* Sow.

» (*Ostreola*) *Forskåli* var. *undulator* Sacc.

Anomia ephippium var. *rugulosostriata* Br.

Chlamys Zitteli (Fuchs).

Pecten cfr. *cristato-costatus* Sacc.

» cfr. *benedictus* Lamk.

» *Fraasi* Fuchs var.

» *Ziziniæ* Blanckh.

» *Joslingi* Sow. var.

» *Blanckenhorni* Dép. e Rom.

Flabellipecten expansus (Sow.).

» *Pasinii* (Mgh.).

» *burdigalensis* (Lamk.).

» *fraterculus* (Sow.).

Arca (*Anadara*) cfr. *Noe* L.

Cardium edule L.

Tapes (*Calliotapes*) cfr. *vetulus* (Bast.).

Dosinia lupinus (L.).

Turritella sp. ind.

Conus sp. ind.

Cypraea sp. ind.

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1927.

(2) Gli echinodermi miocenici di Porto Bardia e dell'Oasi di Giarabùb (Marmarica). « Rend. R. Acc. Lincei », V, fasc. 12, p. 1021.

Questa fauna di molluschi, per quanto non molto abbondante, è sufficiente a confermare la presenza a Porto Bardia dei due piani determinati in base allo studio del materiale echinologico, e cioè il *Langhiano* (Burdigaliano) e il *Vindoboniano* (Elveziano-Tortoniano).

Molto più numerose sono le forme determinate dall'Uadi Giarabùb, ma ciò non dipende tanto dalla ricchezza della fauna, quanto dal maggior tempo dedicato alle raccolte ed alla maggiore estensione della regione esplorata. Eccone l'elenco:

Lithophagus lithophagus L.

Gastrocaena sp. (cfr. *dubia* Pennt.).

» sp. n.

Ostrea edulis L.

» » L.

» » var. *Boblayei* Desh.

» » var. *tauroloamellosa* Sacc.

» *plicatula* Gmel.

» *Vireti* Desh.

» *digitalina* var. *Roßfsi* Fuchs.

» *fimbriata* Grat.

» (*Cubitosirea*) *frondosa* var. *caudata* Munst.

» » » var. *subfimbriata* Sacc.

» (*Crassostrea*) *gryphoides* var. *crassissima* Lamk.

» » » var. *gingensis* Schloth.

» (*Ostreola*) *sollomacensis* Cossm. e Peyr.

Pycnodonta cochlear var. *navicularis* Br.

Anomia ephippium var. *sulcata* Poli.

» » var. *rugulosostriata* Br.

Placuna miocenica Fuchs.

Spondylus crassicauda Lamk.

Lima (*Mantellum*) *hians* Gmel.

Chlamys sub-Malvinae (Blanckh.).

» *multistriata* (Poli).

» *praescabriuscula* (Font.).

» *Zitteli* (Fuchs).

» cfr. *opercularis* var. *Andouini* (Payr.).

Pecten cristato-costatus Sacc.

» *Fuchsi* Font.

» *benedictus* Lamk.

» *subarcuatus* Tourn.

» *Fraasi* Fuchs var.

» cfr. *Ziziniæ* Blanckh.

» (*Manupecten*) *Puymoriae* May.

Flabellipecten Besseri Andr.

Nucula cfr. *placentina* Lamk.

Arca (*Anadara*) cfr. *diluvii* Lamk.

» » cfr. *Noe* L.

Pectunculus (*Axinaea*) *cor* Lamk.

» » » var. *rhomboidea* Bors.

» » cfr. *pilosus* (L.).

» » cfr. *bimaculatus* Poli.

Cardita sp. ind.

Chama gryphoides (L.).

» sp. n.

Miltha (*Eomiltha*) *calliperyx* (Tourn.).

Phacoides cfr. *borealis* (L.).

» (*Linga*) cfr. *columbella* (Lamk.).

Cardium sp. ind.

Chione (*Ventricoloidea*) cfr. *multilamella* (Lamk.).

Meretrix (*Callista*) cfr. *erycinoides* (Lamk.).

Dosinia lupinus (L.).

Arcopagia laminiifera Cossm. e Peyr.

Astarte cfr. *Grateloupi* Desh.

Mactra (*Pseudoxyperas*) cfr. *Künstleri* Cossm. e Peyr.

Corbula revoluta Br.

» cfr. *Basteroti* Hoern.

» (*Agina*) *gibba* var. *curta* Loc.

Bolma (*Ormastraliium*) *speciosa* (Mich.).

Oxystele orientalis Cossm. e Peyr.

Trochus sp. ind.

Gibbula sp. ind.

Natica cfr. *millepunctata* Lamk.

Ampullospira scalaris (Bell. e Micht.).

Turritella terebralis Lamk.

» » var. *gradata* Menk.

» (*Archimediella*) *pithagoraica* Hilb.

» » *dertonensis* May.

» (*Peyrotia*) *Desmarestina* var. *mediosubcarinata* Myl.

» (*Haustator*) cfr. *vermicularis* Br.

Protoma cathedralis (Brongn.).

» » var. n.

» *quadriplicata* (Bast.).

» *mutabilis* Sow.

Vermetus sp. ind.

Cerithium (*Ptychocerithium*) *Bronni* Partsch.

» (*Vulgocerithium*) *dertonense* Mayer.

Terebralia bidentata var. *fusiformis* (Schff.).

Pirenella plicata var. *molensis* (Schff.)

Strombus (*Canarium*) *Bonellii* Brongn.

» » » var. *praecedens* (Schff.).

Cypraea sp. ind.

Semicassis sp. ind.

Murex (*Muricanta*) sp. (aff. *subasperrimus* d'Org.).

Voluta sp. n. Migliorini.

Mitra sp. ind.

Volubilites (*Neoathleta*) cfr. *obliquus* Bell.

Clavatula gradata (Defr.).

Conus (*Rhizoconus*) cfr. *Virginalis* Br.

» (*Lithoconus*) cfr. *Mercati* Br.

» (*Dendroconus* sp. n.

Haminea cornea (Lamk.).

Nell'Uadi, Giarabùb come e meglio che a Porto Bardia, sono dunque rappresentati il *Langhiano* e il *Vindoboniano*, ma la maggior parte dei molluschi — come degli echini — appartiene all'*Elveziano*.

Le forme comuni alle due località sono relativamente poche, ma ciò credo dipenda soprattutto dalla scarsità del materiale raccolto a Porto Bardia. Degne di ricordo sono solamente la *Clamys Zitteli* e la *Dosinia lupinus*. Più numerose sono le forme di Giarabùb comuni con Siua e cioè complessivamente 16, di cui però 7 non determinate da una parte o dall'altra con sicurezza. Riguardo all'ambiente non ho che confermare quanto già dissi a proposito della fauna echinologica, che cioè si tratta di sedimenti litorali e sublittorali.

Mineralogia. — *Sulla presenza della scorodite in alcune miniere di wolframio in Portogallo* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di M. PIAZZA, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Provenienti dalla miniera portoghese della Cerva, situata nella parte più orientale della regione wolframifera a NW del Douro, furono regalati al Museo di Mineralogia di questa R. Università due campioni: un grosso cristallo irregolare di wolframite ed un pezzo di wolframite cristallina di colore grigio bruno quasi nerastro in taluni punti tendenti al roseo, probabilmente per passaggio alla hübnerite.

Questo campione presenta inoltre sparsi noduletti di quarzo e nella parte superiore e da un lato uno strato di piccolo spessore costituito da cristallini di colore verde azzurrognolo con simmetria nettamente rombica. Per l'esame chimico, qualitativo solamente per la piccola quantità di materiale a disposizione, e per l'esame cristallografico sono stati determinati come cristalli di scorodite.

La scorodite è stata rinvenuta nelle più note località di solito in gruppi stelliformi, od in incrostazioni, meno frequentemente in cristalli imperfetti, associata per solito a pirite, mispichel, ematite, limonite, tetraedrite, farmacosiderite e talvolta a simplesite come a Riu Planu, Sardegna ⁽³⁾; in giacimenti di limonite o ematite come è più facile o in miniere di stagno o di tetraedrite, e talvolta, più di rado, associata a filoni di cobalto o a filoni auriferi.

Una sola volta è ricordata da Zippe ⁽⁴⁾ nella descrizione di minerali provenienti da Schlackenwald e Schönfeld l'associazione della scorodite, oltre che a topazio e ad arsenopirite, a piccole druse di wolframite.

Del Portogallo ricorda il Calderon ⁽⁵⁾ alcune druse verdi provenienti da Arizona ed altri campioni di località ignota, sempre in croste o in aggregati raggiati, mai in cristalli.

In un'enumerazione di minerali portoghesi il Bello ⁽⁶⁾ accenna alla presenza della scorodite nella miniera di Panasqueira, insieme alla ancora più rara ferberite.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1927.

(3) A. PELLOUX, *Scorodite di Riu Planu is Castangias*. «As. Min. Sarda», XXVII, n. 6, p. 14, 1922.

(4) ZIPPE, *Die Mineralien Böhmens nach ihren geognostischen Verhältnissen*, ecc. «Verh. der Ges. d. Nat. Mus. Jahrg.», 1841, s. 45 ff.).

(5) S. CALDERON, *Los minerales de España*. Vol. II, p. 301.

(6) A. BELLO, *Minerales Portuguezas*. «Boll. Soc. Portug. Sc. Nat.», 21 nov. 1908, 2, (3), 1.

Il giacimento di Panasqueira è un tipico giacimento wolframifero della regione degli scisti cambriani a sud del Douro, in esso si associano al minerale di wolframio la pirite, l'arsenopirite, la calcopirite e meno frequentemente altri minerali. La formazione dalla scorodite è spiegata per gli altri tipi di giacimenti, ricordati in precedenza, con la costante presenza dell'arsenopirite, la quale si trasformerebbe in scorodite per l'azione ossidante delle acque superficiali. La stessa origine si deve, secondo me, attribuire alla scorodite della Cerva e a quella di Panasqueira, perchè anche in queste località è sempre presente l'arsenopirite. È del resto nota l'associazione dell'arsenico col wolframio.

Sono riuscita a staccare dal campione in esame alcuni cristallini ed ho eseguite accurate misure goniometriche su sette di essi.

Taluni raggiungono la lunghezza di circa mezzo centimetro, tali altri sono minori; di solito lo sviluppo secondo l'asse Z è poco diverso di quello secondo gli altri due assi.

Il colore è verde azzurro con lucentezza vitrea, subtrasparente.

Notevole dicroismo: γ = verde un po' giallastro, α = azzurro verdastro. Il peso specifico determinato è 3.25. Tale valore piuttosto elevato si avvicina a 3.23, valore determinato per la scorodite di Cobalt, Ontario⁽¹⁾.

I cristalli, spezzati all'estremità negativa dell'asse Z, presentano abito nettamente piramidale, somigliantissimo a quello determinato da Jeremejew per i cristalli della miniera di Blagodatnyj negli Urali⁽²⁾.

I cristalli della Cerva risultano dalla combinazione delle seguenti forme semplici: $\{111\}$, $\{121\}$, $\{110\}$, $\{100\}$, $\{010\}$, $\{201\}$ e inoltre delle nuove forme $\{471\}$, $\{540\}$, $\{580\}$.

Le forme già precedentemente note sono tutte costantemente presenti meno la $\{110\}$ osservata in cinque dei sette cristalli; la $\{471\}$ compare in due cristalli, e i due nuovi prisimi solamente una volta nello stesso cristallo. È da notare che le forme predominanti sono identiche a quelle dei cristalli di scorodite di Blagodatnyj.

Hanno fra tutte le forme maggiore sviluppo la piramide $\{111\}$, il prisma $\{120\}$ ed il macropinacoide $\{100\}$.

La facce della piramide sono talvolta spezzate o presentano i sollevamenti triangolari già ricordati da Rath per i cristalli di Dernbach⁽³⁾.

Le facce del prisma $\{120\}$ sono piuttosto lucenti e danno buone immagini ed anche il prisma $\{110\}$, quando è presente, pur non avendo notevole sviluppo è costituito da facce che danno buone immagini. Il brachi-

(1) R. P. D. GRAHAM, *Note on the occurrence of Scorodite, etc., at Cobalt, Northern Ontario, Canada*. « Trans. of the R. S. of Canada », 1913, VII.

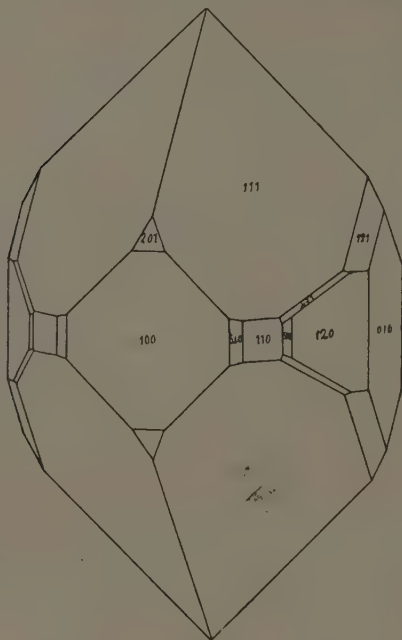
(2) P. JEREMEJEV, *Scorodite aus der Blagodatnyj-Grube am Ural*. « Verh. russ.-min. Ges. », 1885, (2).

(3) RATH, *Scorodite von Dernbach, Nassau*. « Jb. Min. », p. 396, 1876.

pinacoide ha facce di dimensioni minori del macropinacoide ed è costantemente striato verticalmente.

La piramide $\{121\}$ ha facce poco sviluppate, ma lucenti e senza striature; il prisma orizzontale $\{201\}$, sempre presente con sviluppo secondario e con faccette talvolta striate parallelamente allo spigolo $[(100):(201)]$.

In un cristallo si possono osservare distintamente due nuovi prismi; rappresentati, uno da una faccettina non liscia nè splendente, ma sufficientemente estesa, tra la (110) ridotta ad un sottile bagliore e la (120) . Si



può ritenere con abbastanza sicurezza che si tratta del prisma $\{580\}$ nuovo per la scorodite.

Angolo $(010):(580) = 36^\circ 22'$ misurato $35^\circ 52'$ calcolato.

L'altro prisma è rappresentato anche da una sottile troncatura di spigolo tra (110) e (100) alla quale ritengo di potere attribuire il simbolo $\{540\}$.

Angolo $(010):(540) = 55^\circ 15' \frac{1}{2}$ misurato $55^\circ 48'$ calcolato.

Si può inoltre osservare una troncatura dello spigolo $(111):(120)$ in uno dei cristalli, in un altro tale troncatura acquista una maggiore estensione per cui si può procedere a delle misure. Per mezzo del goniometro si può riconoscere che la faccia è in zona anche tra (110) e $(\bar{1}21)$. E perciò il simbolo di tale forma determinato mediante le zone, perchè ne rap-

presenta il punto nodale è {471}. Anche per questa piramide v'è sufficiente concordanza tra valori angolari calcolati e misurati.

Angolo (120): (471) = $7^{\circ} 29' 30''$ misurato $7^{\circ} 53'$ calcolato.

Angolo (111): (471) = $31^{\circ} 4'$ misurato $30^{\circ} 54'$ calcolato.

Non è stata mai rinvenuta la {001} neanche come troncatura di spigolo, invece si osservano ad occhio nudo e meglio al goniometro, non costantemente, ma abbastanza spesso, delle troncature di spigoli in corrispondenza delle faccettine delle forme {011} e {101}.

Per calcolare i valori degli angoli ho adoperato delle costanti da me determinate in base agli angoli (111): ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$) = $77^{\circ} 14' 40''$ e (111): ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$) = $65^{\circ} 18'$. Esse risultano: $a:b:c = 0.86435:1:0.95474$; questi valori si avvicinano a quelli dati da Jeremejew⁽¹⁾ per i cristalli di Blagodatnyj; 0.869016:1:0.967339 e di più a quelli, determinati dal Rath⁽²⁾, per i cristalli di Dernbach: 0.86730:1:0.95580.

Tabella dei valori angolari misurati e calcolati.

Angoli	N	Limiti misure	Medie	Valore calcolato	Differenze
(100): (111)	10	$50^{\circ} 25'$ a $51^{\circ} 39'$	$51^{\circ} 6'$	$51^{\circ} 23'$	— $17'$
(111): ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$)	10	$65^{\circ} 12' 30''$ a $65^{\circ} 43' 40''$	$65^{\circ} 18'$	$65^{\circ} 18'$	—
(111): ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$)	7	$77^{\circ} 5'$ a $77^{\circ} 25'$	$77^{\circ} 14' 40''$	$77^{\circ} 14' 40''$	—
(111): (121)	5	$18^{\circ} 46'$ a $19^{\circ} 33'$	$19^{\circ} 21'$	$19^{\circ} 23'$	— $2'$
(121): (010)	5	$37^{\circ} 31'$ a $37^{\circ} 45'$	$37^{\circ} 37'$	$37^{\circ} 58'$	— $21'$
(120): (010)	14	$29^{\circ} 5'$ a $30^{\circ} 36'$	$30^{\circ} 2'$	$30^{\circ} 3'$	— $1'$
(120): (110)	5	$18^{\circ} 45'$ a $19^{\circ} 36'$	$19^{\circ} 11' 30''$	$19^{\circ} 7'$	+ $4' 1/2'$
(110): (100)	6	$40^{\circ} 23'$ a $41^{\circ} 15'$	$40^{\circ} 50'$	$40^{\circ} 50'$	—
(580): (010)	1	—	$36^{\circ} 22'$	$35^{\circ} 52'$	+ $30'$
(540): (010)	1	—	$55^{\circ} 15' 30''$	$55^{\circ} 48'$	— $32' 1/2'$
(100): (201)	7	$23^{\circ} 42'$ a $24^{\circ} 10'$	$24^{\circ} 15'$	$24^{\circ} 21'$	— $20' 45''$
(111): (201)	1	—	$36^{\circ} 44'$	$36^{\circ} 43'$	+ $1'$
(111): (120)	2	$38^{\circ} 21'$ a $3^{\circ} 38' 40''$	$38^{\circ} 29' 50''$	$38^{\circ} 47'$	— $17' 10''$
(111): (471)	1	—	$31^{\circ} 4'$	$30^{\circ} 54'$	+ $10'$
(120): (471)	1	—	$7^{\circ} 29' 30''$	$7^{\circ} 53'$	— $23' 30''$

(1) JEREMEJEW, loc. cit.

(2) RATH, loc. cit. — NB. Il DANA citando la stessa fonte per le costanti riporta dei valori un poco diversi.

Biologia. — *Ricerche sui cromatofori dei cefalopodi* ⁽¹⁾. Nota di E. SERENI, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. FANO.

Lo studio del « sistema effettore pigmentario », secondo il termine introdotto dall'Hogben, ha conosciuto in questi ultimi anni un momento di fortuna e di voga, in seguito alle ricerche condotte dallo stesso autore per dimostrare l'influenza esercitata su questo sistema dalle diverse ghiandole endocrine, e principalmente dall'ipofisi e dal surrene.

Alcune osservazioni compiute durante l'esecuzione di esperienze, nelle quali, esaminando l'influenza dell'adrenalina e di diversi preparati ipofisari sulla colorazione di alcuni teleostei, ho avuto campo di convincermi della mancanza di ogni specificità delle reazioni provocate da queste sostanze ³⁾, mi indussero a prendere in esame i cromatofori dei cefalopodi, dei quali è nota da gran tempo la molteplice e complessa varietà di reazioni. Queste ricerche si sono venute via via allargando, per il sorgere di sempre nuovi problemi: sicchè i risultati dei quali oggi do notizia non permettono ancora che delle conclusioni necessariamente provvisorie e naturalmente soggette a revisione col procedere delle ricerche.

Le ricerche sono state compiute principalmente su *Octopus vulgaris*, *Eledone moschata*, *Loligo vulgaris*, ma anche su *Sepia officinalis*, *Sepiola elegans* ed altre specie: su animali interi in vivo e su pezzi di pelle staccata (quasi sempre, pezzi di tentacoli) in vitro.

I risultati ottenuti sono, brevemente riassunti e trascurando per il momento i dati della letteratura, i seguenti:

Influenza della temperatura. — Ho sperimentato per ora soltanto su braccia isolate. Quando queste siano sospese in acqua di mare e si proceda ad un riscaldamento assai graduale, fra i 25° ed i 30° C. si osserva spesso, ma non sempre, un certo grado di esaltazione dell'attività pulsatoria dei cromatofori che diminuisce e poi cessa poco sopra i 30° C. Seguitando ad innalzare la temperatura, fra 37° e 39° si inizia una espansione generale dei

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia della Stazione zoologica di Napoli.

(2) Nella seduta del 19 giugno 1927.

(3) Mentre io eseguivo queste ricerche, il Di Mattei comunicava all'Accademia Medica di Roma i risultati di sue ricerche analoghe eseguite sulla rana, e dai quali anch'egli concludeva a negare ogni carattere di specificità della reazione.

cromatofori, preceduta da pulsazioni vivacissime, e che non raggiunge mai un grado molto notevole. Questa espansione è reversibile, almeno nei primi stadi, e quando i cromatofori non siano stati esposti troppo a lungo alla temperatura elevata.

Se invece si sottomette la pelle a un raffreddamento graduale, già fra $+10^{\circ}$ e $+5^{\circ}$ si osserva una retrazione completa dei cromatofori: sotto $+5^{\circ}$ C. appare una evidente diminuzione della eccitabilità elettrica e la colorazione provocata dallo stimolo non si presenta con gli abituali caratteri di rapidità ma assai rallentata in ambedue le sue fasi.

Questi stessi fenomeni si osservano fino a -3° , alla quale temperatura i cromatofori sono ancora alquanto eccitabili. Non ho dati sicuri sull'azione di temperature più basse: soltanto in un caso, in un braccio sospeso in olio di paraffina e raffreddato fino a -6° C., potei osservare una notevole espansione dei cromatofori, che si mantenne poi, durante il successivo riscaldamento, fino a $+5^{\circ}$ circa.

Influenza della pressione osmotica. — I cromatofori sono relativamente poco sensibili alle variazioni della pressione osmotica. Mentre l'acqua distillata e le soluzioni più diluite provocano una espansione notevole, completa in pochi minuti, e che si mantiene per lunghissimo tempo, anche in acqua di mare diluita fino a presentare una pressione osmotica eguale a $4/10$ della normale, essi non presentano che una espansione iniziale non molto notevole e mantengono la loro eccitabilità per molte ore.

Quanto alle soluzioni più concentrate dell'acqua di mare, in quelle di concentrazione doppia o maggiore, si ha in pochi minuti una espansione notevole e durevole: in quelle nelle quali la concentrazione è soltanto 1.5 o 1.75 quella dell'acqua di mare, dopo una più o meno notevole espansione iniziale, si ha un lento impallidimento: e la eccitabilità elettrica si mantiene a lungo.

Influenza di vari ioni. — Tutti i sali studiati sono stati impiegati in soluzioni isotoniche all'acqua di mare, ed ho determinato il tempo necessario allo stabilirsi di una espansione massima e più o meno durevole dei cromatofori, espressione di una contrattura delle fibre radiali di questi. Del resto non molto differenti sono le conclusioni che si potrebbero trarre prendendo in esame qualche altro elemento, p. es. il momento di inizio della contrattura o la durata complessiva di questa o il momento della scomparsa della eccitabilità.

È opportuno però notare che l'azione dei diversi sali presenta non soltanto delle differenze quantitative, ma anche qualitative, sicchè un confronto della loro azione non è sempre possibile ed agevole: basti qui indicare che alcuni sali, oltre che un'azione contratturante, presentano anche un'azione favoritrice delle «pulsazioni» dei cromatofori.

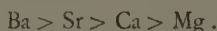
Per quel che riguarda i cationi, ho usato la soluzione dei cloruri e talvolta anche dei solfati.

Tutti i metalli alcalini hanno mostrato di avere un'azione contratturante, massima per il K, minima per il Na. Gli altri metalli si ordinano secondo la serie



a proposito della quale è da notare che i sei cationi si possono riunire in tre gruppi di due ciascuno, K e Rb, NH_4 e Cs, Li e Na; e che i due metalli di ciascun gruppo esercitano un'azione d'intensità assai vicina, sicchè è possibile osservare talvolta dei casi nei quali l'ordine di intensità di azione dei due metalli di un gruppo è invertito.

Quanto ai metalli alcalino-terrosi (pure esaminati dall'azione dei cloruri) la serie è la seguente:



L'azione contratturante è qui evidentissima per Ba: assai meno intensa per Sr e Ca: mentre Mg non solo non possiede un'azione contratturante; ma anzi provoca un completo impallidimento della pelle, vale a dire una completa retrazione dei cromatofori.

Assai meno chiare sono le condizioni per quel che riguarda gli anioni: l'intensità di azione dei quali varia assai da caso a caso: presenta invece differenze non molto notevoli fra l'uno e l'altro anione, sicchè le inversioni e gli spostamenti sono assai frequenti. In ogni modo la seguente graduazione non si allontana troppo dal vero:



È interessante notare che fra gli ioni che si trovano normalmente nell'acqua di mare, solo Mg non ha azione contratturante, e da questo, come pure da alcune prove appositamente istituite, sembra si possa concludere che è questo ione che principalmente si oppone alla potente azione contratturante del K nell'acqua di mare, la quale anche da questo punto di vista rappresenta una soluzione perfettamente equilibrata. Questo equilibrio è peraltro piuttosto labile: chè basta aggiungere all'acqua di mare 1 % di una soluzione isotonica di KCl per ottenere una discreta espansione dei cromatofori.

In soluzione isotonica di saccarosio, i cromatofori perdono rapidamente la loro eccitabilità e presentano una modica ma assai durevole espansione. Ambedue i fenomeni sono completamente e rapidamente reversibili.

Influenza dei veleni in vitro. — Fra i diversi veleni dei quali ho studiato l'azione in vitro, i cloruri di acetilcolina, colina e pilocarpina ed il salicilato di fisostigmina provocano una espansione dei cromatofori abbastanza durevole e di intensità progressivamente minore dal primo all'ultimo. Anche l'istamina provoca una discreta espansione. L'atropina riesce ad impedire o a ritardare la espansione provocata dalle prime tre sostanze. La

cocaina riesce, in elevata concentrazione, a impedire o ritardare l'espansione dei cromatofori provocata da tutte le sostanze sopraindicate.

Anche la nicotina provoca una rapida ed intensissima espansione: ma, secondo quello che è stato visto da altri autori, sembra trattarsi di un'azione legata alla sua forte alcalinità.

Le sostanze ora indicate agiscono, nel provocare la espansione, su un substrato differente da quello sul quale agiscono i sali. Dopo infatti che si è risolta la contrattura, p. es. da pilocarpina, è possibile ottenere una nuova contrattura da nicotina: e dopo di questa, ancora una da KCl: ed infine in condizioni favorevoli ancora una da BaCl₂.

L'azione della verarina è analoga a quella sui muscoli; già dopo brevissimo tempo essa modifica il modo di reagire dei cromatofori agli stimoli, prolungando enormemente la loro risposta.

Influenza dei veleni in vivo. — Gli stessi veleni ed altri ancora ho iniettato nel circolo di animali vivi, ottenendo alcuni risultati che mi sembra possano contribuire alla soluzione del problema della innervazione dei cromatofori.

L'adrenalina provoca un quadro sintomatico caratteristico, con rapidissima enorme e durevole espansione dei cromatofori, che, secondo alcuni caratteri, sembrerebbe di origine almeno in parte centrale. Spesso infatti l'espansione è, per alcuni periodi, limitata nettamente a un territorio di innervazione e questo fenomeno non appare facilmente spiegabile sulla base di un'azione periferica.

L'ergotamina provoca un rapido impallidimento, che dura assai a lungo.

La colina, la acetilcolina, la fisostigmina provocano un lento ma completissimo impallidimento. Meno facile è il riconoscere l'azione dell'atropina, per la quale assai breve è la distanza fra la dose attiva e la dose rapidamente mortale; ma sembra che essa non dia notevoli modificazioni della colorazione, fuori che la comparsa di continue e leggere « onde ».

Come ho detto all'inizio, questi risultati debbono essere notevolmente ampliati e perfezionati, prima di permettere di trarre una conclusione, tanto più data la notevole disparità dei risultati ottenuti con alcune sostanze in vivo ed in vitro. Nè si può dimenticare che qualsiasi conclusione tratta dai risultati ottenuti con i farmaci rappresenta in un certo senso una sorte di circolo vizioso. Purtuttavia mi sembra non sia priva d'interesse la constatazione avvenuta della validità di alcuni ben noti antagonismi farmacologici in un campo così lontano da quelli nei quali siamo abituati a riconoscerli.

Zoologia. — *Sullo strato perintestinale del mesointestino dei Balanidi.*
Nota di L. PATANÈ, presentata dal Corrisp. A. RUSSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia vegetale. — *Contributo allo studio delle fluorescenze del clorocroma ai raggi ultravioletti.* Nota di G. TESTI-DRAGONE, presentata dal Socio P. R. PIROTTA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia dello sviluppo. — *Sul tempo di sviluppo delle correlazioni umorali-nervose. Ricerche sugli Anfibi* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di G. COTRONEI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

La presente Nota si propone di riassumere brevemente, e soprattutto di collegare ricerche da me eseguite sullo sviluppo embrionale e larvale degli Anfibi anuri. Punto fondamentale di queste ricerche, che desidero mettere in rilievo, è la perfetta corrispondenza che esiste tra l'iniziarsi, in una determinata fase dello sviluppo, delle correlazioni umorali e di quelle nervose. Come riferimento di quelle umorali io esamino l'influenza degli ormoni tiroidei. È già da molti anni che io mi occupo di tali quistioni e in ricerche del 1920-21-22 ⁽³⁾ rilevai che l'assorbimento di sostanze attive tiroidee avviene solo al termine dell'assorbimento vitellino e che ciò corrisponde all'iniziarsi di nuove condizioni metaboliche, quando cioè si iniziano le correlazioni umorali e nervose. Non starò a riferire le esperienze di innesti, di isolamenti di parti embrionali, che mi condussero alla conclusione ora enunciata. Successivamente (1925-27) ho ripreso tali studi sull'influenza correlativa umorale-nervosa nello sviluppo larvale.

Io credo che abbia una grande importanza biologica insistere su alcuni fatti che valgono a precisare la concomitanza avanti riferita.

Se nell'acqua ambiente dove si sviluppano embrioni di Anfibi anuri — Rana, Rospo — (Giacomini, Cotronei) si mette del succo tiroideo ci accorgiamo che questo succo non manifesta nessuna azione acceleratrice, fino al momento in cui non sia assorbito il vitello, e le larve non siano in grado di assumere alimento. Mi sono preoccupato di precisare se questo fatto è semplicemente dovuto a determinate possibilità delle vie di assorbimento o, non si tratti piuttosto di un riflesso di condizioni metaboliche generali,

(1) Dall'Istituto di Anatomia comparata della Regia Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1927.

(3) Questi « Rendiconti », 1920, vol. 29, I semestre, fasc. 10; e 1921, vol. 30, 2° sem., fasc. 10: « Archivio Zoologico », vol. 10, 1922.

rispecchianti l'impossibilità di utilizzare, precedentemente, gli ormoni tiroidei. Quest'ultimo caso è proprio quello che esprime il vero. Infatti con esperienze di innesti, se uniamo una larva più giovane con una più avanti nello sviluppo, osserviamo che l'influenza di un trattamento tiroideo si manifesta nella larva meno avanti nello sviluppo soltanto al termine dell'assorbimento vitellino.

Da ciò concludiamo che durante il periodo di auto-differenziamento, che è collegato con l'assorbimento vitellino, le cellule non hanno bisogno o meglio non sono in grado di risentire un'azione umorale. Una bella verifica di questa concezione la si desume dallo studio del differenziamento istologico della tiroide. Noi possiamo ritenere che il sorgere della funzione tiroidea si verifichi con la produzione del colloide. Orbene ciò corrisponde appunto con il termine dell'assorbimento vitellino. Se colleghiamo le esperienze e le osservazioni avanti esposte concludiamo che la tiroide si sviluppa funzionalmente solo quando le varie cellule dell'organismo sono in grado di risentirne l'azione, come abbiamo veduto con le esperienze di somministrazione di succo di tiroide. Se passiamo allo studio delle correlazioni nervose che succedono al periodo dell'autodifferenziamento siamo colpiti nel notare una identica corrispondenza con la fase biologica di cui ci occuperemo. Queste correlazioni nervose si stabiliscono anche esse al termine dell'assorbimento vitellino. Se infatti asportiamo in giovani embrioni di Anfibi anuri (Rana, Rospo) dei tratti troppo estesi del midollo spinale del tronco, osserviamo che lo sviluppo embrionale procede normalmente e si forma la larva, ma coll'esaurimento del vitello interviene la morte dell'animale. Se invece l'asportazione di parte del midollo del tronco non va oltre certi limiti la larva può superare il periodo in cui si iniziano queste correlazioni nervose, ma osserviamo però che il successivo sviluppo larvale (accrescimento) si verifica in grado minore rispetto ai girini normali. Questo a partire dalla fase di esaurimento del vitello. Se qualche breve ritardo notiamo nella prima fase (embrionale) ciò è semplicemente un riflesso della operazione. Dunque vediamo anche qui che le correlazioni nervose, almeno quelle che hanno influenza sui fenomeni di accrescimento e di morfogenesi (processi differenziativi e di metamorfosi), si iniziano al termine dell'assorbimento vitellino. Dunque vi è una perfetta simultaneità tra l'iniziarsi delle correlazioni umorali, per lo meno di alcune secrezioni interne (ormoni tiroidei), e di quelle nervose. Stabilito questo principio, desunto dai risultati sperimentali non è azzardato il supporre, come del resto già supposti in precedenti ricerche, che l'iniziarsi di queste correlazioni è la conseguenza del differenziamento istologico e quindi degli intimi rapporti funzionali che soltanto in un determinato momento si stabiliscono tra sistema nervoso e organi a secrezione interna. Questo momento funzionale negli Anfibi anuri, noi lo abbiamo fissato nell'esaurimento del vitello, quando cioè la larva può mettersi in un più intimo rapporto con l'ambiente esterno e cominciano le

modalità metaboliche proprio inerenti al periodo larvale. Mi sia consentito di rilevare che queste sono le conclusioni a cui giunsi fin dalle mie ricerche del 1920-21-22. Queste conclusioni si si riferiscono agli Anfibî anuri (*Rana esculenta* e *Bufo vulgaris*). Ricerche eseguite sugli Anfibî urodeli sul *Triton cristatus* (in parte queste ricerche furono seguite sotto la mia guida dalla signorina Gasperini) mi dimostrano, per ora, la verifica di una parte almeno dei fatti sopra citati. Anche negli urodeli la funzione della tiroide si inizia al termine dell'assorbimento vitellino. Mi sembra lecito supporre, dopo quanto ho esposto, che anche le correlazioni nervose si iniziano nello stesso tempo, ma naturalmente io aspetto i risultati di esperienze che mi propongo di compiere. Sarà pure interessante estendere le osservazioni a tutti quei Vertebrati in cui si può nettamente distinguere una fase di assorbimento vitellino, indipendente cioè dalle altre influenze ormonali e nervose materne, per vedere se le conclusioni teoriche a cui giungo con le mie ricerche possono avere un valore generale.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1927 (Anno V).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Matematica. — *Sulla divergenza dei tensori.* Nota⁽¹⁾ del
CorrISP. U. CISOTTI.

I. — DIVERGENZA DI UN TENSORE m^{plo} . — Sieno $X_{i_1 i_2 \dots i_m}$ le componenti contravarianti di un tensore m^{plo} , riferito alla metrica definita dalla forma

$$ds^2 = \sum_i^n a_{ik} dx_i dx_k,$$

e $X_{|k}^{i_1 i_2 \dots i_{m-1} i_m}$ le componenti del suo tensore derivato covariantemente secondo la forma stessa. Posto:

$$(1) \quad Y_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}} = \sum_k^n X_{|k}^{i_1 i_2 \dots i_{m-1} k},$$

risulta definito, mediante le componenti contravarianti, un tensore $m-1^{plo}$. Tale tensore, di componenti contravarianti $Y_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}}$, definirò⁽²⁾ *divergenza del tensore m^{plo}* , di componenti contravarianti $X_{i_1 i_2 \dots i_{m-1} i_m}$.

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1927.

(2) L'APPELL [*Mét. Ration.*, T. V. (*Calcul tensoriel*) Paris; Gauthier-Villars; 1926, pp. 60-61] osserva che si possono definire più divergenze da uno stesso tensore, dipendentemente dall'indice che viene saturato con l'indice di derivazione. Come si vede qui è l'ultimo indice che viene saturato.

Per $m = 1$ da (1) scende l'invariante

$$Y = \sum_k X_k^k,$$

che è notoriamente la divergenza del vettore (o tensore semplice) di componenti contravarianti X^k (1).

Per $m = 2$ da (1) scende

$$Y^i = \sum_k X_k^{ik},$$

che definisce il vettore divergenza del tensore doppio di componenti contravarianti X^{ik} (2).

2. - ALTRA ESPRESSIONE DELLA DIVERGENZA. — Applicando la formula di derivazione covariante (3) si ha:

$$X_k^{i_1 i_2 \dots i_{m-1} k} = \frac{\partial X_{i_1 i_2 \dots i_{m-1} k}}{\partial x_k} + \sum_{i_p}^m \sum_j^n X_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} j i_{p+1} \dots i_{m-1} k} \left\{ \begin{matrix} j k \\ i_p \end{matrix} \right\},$$

ovvero, mettendo in particolare evidenza il termine della prima sommatoria del secondo membro corrispondente a $p = m$, si ottiene:

$$\begin{aligned} X_{jk}^{i_1 i_2 \dots i_{m-1} k} &= \frac{\partial X_{i_1 i_2 \dots i_{m-1} k}}{\partial x_k} + \sum_i^n X_{i_1 i_2 \dots i_{m-1} j} \left\{ \begin{matrix} j k \\ k \end{matrix} \right\} + \\ &+ \sum_{i_p}^{m-1} \sum_j^n X_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} j i_{p+1} \dots i_{m-1} k} \left\{ \begin{matrix} j k \\ i_p \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Sommando rispetto a k da 1 a n , e tenendo presente (1), si ricava:

$$\begin{aligned} (2) \quad Y_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}} &= \sum_k^n \frac{\partial X_{i_1 i_2 \dots i_{m-1} k}}{\partial x_k} + \sum_j^n X_{i_1 i_2 \dots i_{m-1} j} \left\{ \begin{matrix} j k \\ k \end{matrix} \right\} + \\ &+ \sum_{i_p}^{m-1} \sum_j^n X_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} j i_{p+1} \dots i_{m-1} k} \left\{ \begin{matrix} j k \\ i_p \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Ma è, tenendo presente (4) che

$$\sum_k^n \left\{ \begin{matrix} j k \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x_j},$$

(1) LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma, Stock, 1925, p. 174; oppure la traduzione inglese, London and Glasgow, Blackie & Son, 1927, p. 153.

(2) Loc. cit.: ed. it., p. 177, form. (19); ed. ingl., p. 155.

(3) Loc. cit.: ed. it., p. 168 form. (4); ed. ingl., p. 146.

(4) Loc. cit.: ed. it., p. 130, form. (26); ed. ingl., p. 112.

essendo $a = \|a_{ik}\|$,

$$\begin{aligned} \sum_j X^{i_1 i_2 \dots i_{m-1} j} \left\{ \begin{matrix} j k \\ k \end{matrix} \right\} &= \sum_j X^{i_1 i_2 \dots i_{m-1} j} \sum_k \left\{ \begin{matrix} j k \\ k \end{matrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_j X^{i_1 i_2 \dots i_{m-1} j} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Portando quest'espressione nella (2) la somma delle due prime sommatorie del secondo membro si può sostituire con

$$\begin{aligned} \sum_k \left[\frac{\partial X^{i_1 i_2 \dots i_{m-1} k}}{\partial x_k} + \frac{1}{\sqrt{a}} X^{i_1 i_2 \dots i_{m-1} k} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x_k} \right] &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sqrt{a} X^{i_1 i_2 \dots i_{m-1} k} \right], \end{aligned}$$

per cui (2) in definitiva può scriversi:

$$\begin{aligned} (3) \quad Y^{i_1 i_2 \dots i_{m-1}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sqrt{a} X^{i_1 i_2 \dots i_{m-1} k} \right] + \\ &+ \sum_p^{m-1} \sum_j X^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} j i_{p+1} \dots i_{m-1} k} \left\{ \begin{matrix} j k \\ i_p \end{matrix} \right\}, \quad \text{per } m > 1, \end{aligned}$$

mentre, per $m = 1$, si ottiene la nota espressione⁽¹⁾ della divergenza di un vettore:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sqrt{a} X^k \right].$$

Per $m > 1$ mostra (3) che il calcolo della divergenza di un tensore contiene, accanto alla prima sommatoria, che conserva ancora la forma della divergenza di un vettore, dei termini lineari nelle componenti del tensore ma la cui valutazione è piuttosto complicata.

3. — ESPRESSIONE SEMPLIFICATA DELLA DIVERGENZA PER TENSORI EMISIMMETRICI. — Il contributo dovuto a questi termini scompare se il tensore è emisimmetrico; in tal caso si ha⁽²⁾:

$$X^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} j i_{p+1} \dots i_{m-1} k} + X^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} k i_{p+1} \dots i_{m-1} j} = 0;$$

per ciò e pel fatto che⁽³⁾

$$\left\{ \begin{matrix} j k \\ i_p \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} k j \\ i_p \end{matrix} \right\},$$

(1) Loc. cit.: ed. it., p. 176, form. (17''); ed. ingl., p. 154.

(2) Loc. cit.: ed. it., p. 79; ed. ingl. p. 66.

(3) Loc. cit.: ed. it., p. 128; ed. ingl., p. 111.

le ultime sommatorie della (3) danno contributo complessivo nullo, per cui risulta in definitiva:

$$(4) \quad Y_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sqrt{a} X_{i_1 i_2 \dots i_{m-1} k} \right].$$

Questa formula è una estensione a tensori m^{pli} emisimmetrici di altra già nota per tensori doppi⁽¹⁾.

Astrofisica. — *Osservazioni dell'eclisse parziale di sole del 29 giugno 1927 eseguite in Arcetri.* Nota ⁽²⁾ del Corrisp. G. ABETTI.

All'Osservatorio di Arcetri i tempi dei contatti si poterono osservare, con tempo bello, alla torre solare sull'immagine diretta di 17 cm., data dall'obbiettivo sul piano della fessura dello spettrografo e all'equatoriale di 18 cm. della R. Marina, per proiezione, su di un'immagine pure di 17 cm. I risultati sono raccolti nella seguente tabella dove si trovano anche i tempi calcolati dal sig. A. Colacevich con i dati dell'*American Ephemeris*.

	Tempo medio Europa centrale			
	Torre solare oss.: G. Abetti	Eq. R. Marina oss.: A. Colacevich	Calcolo	O — C
Principio	5 ^h 12 ^m 3 ^s	— — —	5 ^h 12 ^m 4 ^s	— 1 ^s
Fine	7 3 30	7 3 35	7 3 27	+ 3 ^s ; + 8

Devesi notare che trovandosi il sole soltanto 5° al di sopra dell'orizzonte al principio dell'eclisse, sul suo lembo molto frastagliato, non si poté osservare l'istante del primo contatto con precisione pari a quella con cui si poté notare la fine.

Ruotando lo spettrografo per modo che la fessura risultasse tangente al lembo nei punti del bordo dove ebbero luogo i contatti ne ho determinati gli angoli di posizione che si possono ritenere precisi entro il mezzo grado.

(1) Loc. cit.: ed. it., p. 177, form. (19'); ed. ingl., p. 155 oppure APPELL; loc. cit., p. 61, formula (31').

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1927.

	Angoli di posizione		
	Osservati	Calcolati	O — C
Principio	275°.5	274°.4	+ 1°.1
Fine	64.4	64.9	— 0.5

Durante un'eclisse parziale di sole con fase abbastanza notevole è possibile osservare lo spettro della cromosfera in condizioni migliori che nella piena luce del sole, come già hanno notato A. Fowler nell'eclisse parziale del 17 aprile 1912⁽¹⁾ ed altri osservatori.

Semplici considerazioni geometriche e l'esperienza indicano, che già ad una fase di 0.6 si può osservare, in vicinanza delle cuspidi della falce solare, l'apparizione delle righe di emissione con più contrasto di quello che si ha nella piena luce del sole, mentre lo spettro completo dello strato invertente compare con una grandezza dell'eclisse di 0.8⁽²⁾. Poichè in questa eclisse la fase massima ad Arcetri era di 0.74, si poteva sperare di vedere con la torre gli strati cromosferici meglio di quanto si osservano comunemente.

Vi è incertezza sulla posizione più efficiente della fessura rispetto all'immagine solare, come è stato già notato dal prof. Fowler e dai suoi collaboratori⁽³⁾, poichè la visibilità delle righe luminose dipende, e dalla ridotta illuminazione del cielo, e dal fatto che le cuspidi della cromosfera si proiettano lungo il bordo della luna più di quelle della fotosfera. La posizione migliore della fessura sembrerebbe dunque essere quella di tangenza al bordo della luna, ma in questo caso la lunghezza di fessura illuminata è soltanto quella dovuta alla parte di cromosfera che si proietta al di là delle cuspidi della fotosfera e che sarà tanto minore quanto più piccola è la fase. Per fase di eclisse intorno ai limiti dianzi accennati era prevedibile che una posizione della fessura tangente al bordo solare alle cuspidi della fotosfera dovesse essere più conveniente abbracciando così la fessura una regione maggiore della cromosfera.

Attorno alla fase massima si puntò quindi la fessura alternativamente tangente al lembo della luna ed al lembo del sole nei loro punti di intersezione osservando specialmente la inversione della riga H_{α} .

L'inversione aumentò notevolmente di intensità, ed altre righe luminose cominciarono ad apparire soltanto attorno al massimo della fase con posi-

(1) « Monthly Notices R. A. S. », vol. 72, p. 538, 1912.

(2) « Nature ». Supplemento al n. 3007, 18 giugno 1927, p. 91.

(3) « Monthly Notices R. A. S. », vol. 75, p. 117, 1915.

zione della fessura tangenziale al bordo del sole avendosi così la conferma, sia che la fase di 0.75 è circa il limite per una maggiore e migliore visibilità dello strato invertente, sia che la posizione della fessura più efficiente è quella della tangenza alle cuspidi della fotosfera.

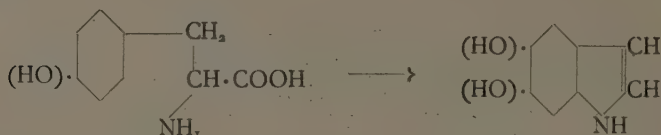
All'approssimarsi della fase massima, quando il punto al bordo, in angolo di posizione 70° , veniva coperto dal disco lunare con fessura tangente al bordo del sole si osservò una notevolissima eruzione. Le due componenti H_{α_2} nel punto di tangenza si presentavano egualmente espanse per circa 5 unità Ångström; l'espansione avendo tutto l'aspetto di una esplosione o « bomba » come già altra volta fu notato ⁽¹⁾, con velocità dell'idrogeno dell'ordine di ± 200 km. Verso angoli di posizione crescenti, cioè nella parte di cromosfera visibile fuori del disco lunare, la riga H_{α} era completamente luminosa, contorta e spezzata in più parti e per parecchie unità Ångström verso il violetto e verso il rosso. Data la rapidità del fenomeno non fu possibile fotografarlo, ma la sua apparenza è ben rappresentata in uno simile osservato e disegnato dal Secchi (cfr. figg. 200 e 201 in « Le Soleil », II partie, Paris, 1877, p. 115). Evidentemente si trattava di una protuberanza al bordo, in corrispondenza di un gruppo di macchie che proprio il giorno dell'eclisse usciva dal bordo all'angolo di posizione di 70° . Il giorno precedente, nelle regolari osservazioni fatte all'equatoriale di Amici, si era notata alle 18^h (t. m. E. C.) una vivissima protuberanza, appunto a 70° , con tre punte, della base complessiva di $1''$ per un'altezza di $60''$. Il giorno dopo l'eclisse, il 30 giugno, non vi era al bordo più alcuna perturbazione.

Il gruppo di macchie in parola, a $+ 16^\circ$ di latitudine, il giorno 29 giugno era già alla sua terza apparizione, avendo mostrato anche nelle due precedenti notevoli attività ed estensione. Nella prima apparizione il gruppo si sviluppava rapidamente in due grandi macchie piuttosto regolari, con numerose eruzioni fra i due nuclei e seguenti, che si videro come protuberanze al tramontare del gruppo il 18 maggio. Nella seconda apparizione il gruppo usciva al lembo Est costituito da una sola macchia di notevole grandezza seguita da eruzioni visibili, il 2 giugno sugli spettroeliogrammi presi alla torre come protuberanze al lembo e nei giorni seguenti (6-8 giugno) come eruzioni luminose in lungo seguito (circa 25° di longitudine) al nucleo principale. Un grande flocculo oscuro in forma di arco lo precedeva all'Ovest. Nella terza apparizione, appunto il 29 giugno, già si è detto della attiva eruzione al lembo, nei giorni seguenti (4-6 luglio), gli spettroeliogrammi mostrano il gruppo formato da tre nuclei principali, seguito da un treno di eruzioni o flocculi luminosi abbastanza attivi, e al Sud un grande flocculo oscuro in forma di arco con una estremità a contatto dei flocculi luminosi. Dopo il 6 luglio, e fino al tramontare del gruppo, il 14 luglio, la sua attività andò rapidamente diminuendo.

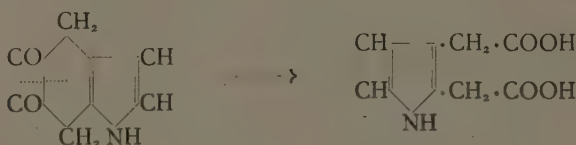
(1) Questi « Rendiconti », vol. III, ser. VI, p. 595, maggio 1926.

A me pur troppo sono mancati i mezzi per confermare l'esattezza della mia previsione fatta nove anni or sono, ma quello che non ho potuto fare io è stato quest'anno realizzato brillantemente da due scienziati inglesi.

H. S. Raper, dell'Università di Manchester, ha trovato infatti che la tirosina, per azione della tirosinasi, fornisce in una prima fase 5-6 diossindolo⁽¹⁾:

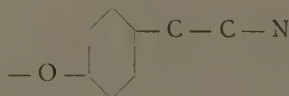


e successivamente A. E. Oxford e H. S. Raper⁽²⁾ hanno confermato l'esattezza di questa struttura facendone la sintesi: i corrispondenti derivati o-dimetilati si sono mostrati perfettamente identici fra di loro. Si osservi inoltre che il 5-6-diossindolo non rappresenta altro che la forma tautomerica del dichetone, che può venire spezzato con tutta facilità per dare derivati pirrolici:



Ora, quando si pensi che l'acido α -carbopirrolico, l' α -metilpirrilchetone, l' α - α -dimetilpirrolo ed altri omologhi, possono, in seguito ai processi enzimatici che si compiono nei tessuti viventi, perdere le catene laterali e fornire le stesse pigmentazioni del pirrolo stesso (Rondoni), riesce facile intendere anche il meccanismo della trasformazione della tirosina in melanine.

Come è facile prevedere, un simile comportamento è da aspettarsi anche da altre sostanze aromatiche che nella loro molecola contengono l'aggruppamento analogamente costituito:



(1) « Biochem. J. », 21 (1927), 89; « British Chemical Abstracts », 1927, (marzo), p. 278.

(2) « Journ. Chem. Society », (1927), p. 417. « Chem. Zentralblatt », (1927), I, p. 2910.

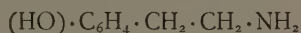
ed anzi, a questo modo, è possibile trovare altresì un nesso fra le diverse teorie che sono state proposte e sostenute, da parte di vari autori, per spiegare la genesi delle melanine.

Secondo O. von Fürth esse deriverebbero dalla tirosina. Jäger invece ammette che questi pigmenti privi di ferro che si riscontrano negli organismi sono dovuti alla adrenalina; secondo questo autore anche il pigmento degli ammalati di morbo di Addison deriverebbe dall'adrenalina ovvero da un prodotto da cui questa prende origine, che normalmente in essa si trasforma, ma che in condizioni patologiche viene ossidato con formazione di melanine ⁽¹⁾.

Infine secondo B. Bloch, dermatologo a Zurigo, le melanine deriverebbero dalla ossitirosina (dopa) in seguito all'azione di un fermento speciale che egli chiama dopaossidasi ⁽²⁾.

Si vede subito che *tirosina, adrenalina, ossitirosina, contengono tutte la catena caratteristica che sopra ho riferita.*

A proposito dell'ipotesi di Bloch, anche prescindendo dal fatto che, a quanto io mi sappia, la ossitirosina ricavata dalle piante, finora non è stata riscontrata nell'organismo animale, farò osservare che bisogna tenere ben conto anche della specificità degli enzimi ossidanti; così Neuberg ha trovato ⁽³⁾ e Mawas l'ha confermato recentemente ⁽⁴⁾, che i fermenti ricavati dai tumori melanotici lasciano inalterata la tirosina; essi intaccano invece la p-ossifenilettilammina:



in cui è del pari presente la catena cui prima ho accennato, ma che dalla tirosina differisce per un carbossile in meno e per la mancanza di un atomo di carbonio asimmetrico.

Invece, come ha posto in rilievo il Rondoni, solamente i composti pirrolici forniscono con una certa regolarità la pigmentazione della pelle e dei peli; gli estratti dei tumori anneriscono il pirrolo (Rondoni, Saccardi, Brancati) e d'altra parte il pirrolo annerisce i tumori non solo in vitro ma anche in vivo (D'Agata).

Inoltre bisogna tenere presente che il melanogeno ricavato da Eppinger da ammalati di melanosarcoma ⁽⁵⁾ presenta in modo marcatissimo le reazioni delle urine di animali cui vennero somministrati derivati del pirrolo; mentre invece Saccardi ha trovato che in seguito alla somministrazione

(1) « Virchow's Arch. », 198 (1909), p. 62.

(2) « Biochem. Zeit. », 162 (1925), Heft 3/6.

(3) Ibid., 8 (1909), p. 8.

(4) « C. r. d. Soc. Biol. », 88 (1923), p. 332.

(5) « Biochem. Zeit. », 28 (1910), 181.

della «dopa» di Bloch, le urine manifestano soltanto reazioni analoghe a quelle della alcaptonuria e che sono dovute, come è noto, non a derivati pirrolici ma a composti di natura fenica.

Tenendo conto infine del fatto, cui prima ho accennato, che gli estratti dei tumori melanotici non colorano la tirosina mentre invece anneriscono prontamente il pirrolo, è molto probabile che in questi casi la formazione della melanina sia dovuta a processi di ossidazione meno complicati, alla ossidazione cioè di prodotti, molto diffusi nell'organismo e che, a differenza degli amminoderivati aromatici prima considerati, contengono nella loro molecola già preformata la catena pirrolica.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Sul teorema della derivazione per serie.* Nota ⁽¹⁾ di G. LAMPARIELLO, presentata dal Socio F. SEVERI.

In una Memoria del sig. Maxime Bôcher, inserita negli «Annals of Mathematics», vol. VII, dal titolo *Introduction to the theory of Fourier's series* è stabilita una proposizione relativa alla derivabilità delle serie trigonometriche.

Tale proposizione vale per qualunque serie di funzioni; essa si enuncia così:

Se la serie

$$(1) \quad u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots$$

di funzioni derivabili in un intervallo (a, b) converge in un punto $x = x_0$, interno ad (a, b) , e se la serie delle derivate di tali funzioni

$$(2) \quad u'_1(x) + u'_2(x) + u'_3(x) + \dots$$

converge uniformemente in (a, b) , allora la serie data converge uniformemente in (a, b) . La somma della serie (2) è la derivata della somma della serie (1) per ogni x di (a, b) .

La dimostrazione che qui ne svilupperò può presentare interesse in quanto, generalmente, i trattatisti si appoggiano sulla integrabilità termine a termine della serie (2). Ma allora bisogna supporre che le derivate dei singoli termini della serie (1) siano integrabili in (a, b) , nel senso di

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1927.

Riemann o in quello del Lebesgue, e inoltre si è costretti a prendere in considerazione, nel corso del ragionamento, la serie delle costanti arbitrarie provenienti dalla integrazione. Tutto ciò è estraneo al teorema.

Suppongo $a < b$ e indico con $F_n(x)$ la somma dei primi n termini della serie (1), con $f_n(x)$ ed $f(x)$ rispettivamente la somma dei primi n termini e la somma della serie (2). Per ipotesi esiste il limite per $n \rightarrow \infty$ di $F_n(x_0)$; sia esso $F(x_0)$. Per la supposta convergenza uniforme della serie (2), prefissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si può determinare un indice p tale che, per $m > n > p$, si abbia, qualunque sia x di (a, b)

$$(3) \quad |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{ovvero} \quad |f_m(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon.$$

Considero la serie

$$(4) \quad (u_1(x) - u_1(x_0)) + (u_2(x) - u_2(x_0)) + (u_3(x) - u_3(x_0)) + \dots$$

Se $\Phi_n(x, x_0)$ è la somma dei suoi primi n termini, si ha

$$\begin{aligned} \Phi_m(x, x_0) - \Phi_n(x, x_0) &= F_m(x) - F_m(x_0) - (F_n(x) - F_n(x_0)) = \\ &= F_m(x) - F_n(x) - (F_m(x_0) - F_n(x_0)), \end{aligned}$$

e applicando il teorema del valor medio alla funzione $F_m(x) - F_n(x)$, nell'intervallo (x_0, x) ,

$$\Phi_m(x, x_0) - \Phi_n(x, x_0) = (x - x_0) (f_m(\xi_{m,n}) - f_n(\xi_{m,n})),$$

essendo $\xi_{m,n}$ un punto interno all'intervallo ora detto.

Dunque

$$(5) \quad |\Phi_m(x, x_0) - \Phi_n(x, x_0)| < (b - a) |f_m(\xi_{m,n}) - f_n(\xi_{m,n})| < 2\varepsilon(b - a)$$

per $m > n > p$ e per ogni x dell'intervallo (a, b) .

La (5) intanto dimostra la convergenza uniforme della serie (4) nell'intervallo (a, b) e conseguentemente l'esistenza del limite per $n \rightarrow \infty$ di $F_n(x)$ anche per $x \neq x_0$.

Se $\Phi(x, x_0) = F(x) - F(x_0)$ è la somma della (4), dalla (5) passando al limite per $m \rightarrow \infty$ e tenendo fisso n , si ricava

$$(6) \quad |F(x) - F(x_0) - (F_n(x) - F_n(x_0))| \leq 2\varepsilon(b - a)$$

per ogni $n > p$ e qualunque sia x di (a, b) .

La (6) si può scrivere anche

$$|F(x) - F_n(x) - (F(x_0) - F_n(x_0))| \leq 2\varepsilon(b - a).$$

D'altra parte, poichè $F_n(x_0)$ tende ad $F(x_0)$ per $n \rightarrow \infty$, al numero ε già prefissato corrisponde un indice q tale che per $n > q$ si abbia

$$|F(x_0) - F_n(x_0)| < \varepsilon.$$

Concludo che

$$|F(x) - F_n(x)| < 2\varepsilon(b-a) + \varepsilon = \varepsilon(2(b-a) + 1)$$

per ogni n maggiore del più grande degli indici p e q e per ogni x di (a, b) .

La convergenza uniforme della (1) essendo così dimostrata, considero il rapporto incrementale

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0}.$$

Siccome la serie al secondo membro è convergente uniformemente in ogni intervallo che escluda completamente il punto $x = x_0$, poichè $u_n(x)$ è derivabile in $x = x_0$, e poichè inoltre la serie delle derivate $u'_n(x_0)$ è convergente, si può fare il passaggio al limite, per $x \rightarrow x_0$, sotto il segno di sommatoria e si ha:

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x_0).$$

Questa eguaglianza valendo per ogni x_0 dell'intervallo (a, b) , il teorema è dimostrato.

Matematica. — *La formola di Green nel campo complesso e l'estensione del teorema di Cauchy alle funzioni di due variabili complesse.* Nota di PIA NALLI e G. ANDREOLI, presentata ⁽¹⁾ dal Corresp. L. TONELLI.

Abbiamo data recentemente in questi « Rendiconti » ⁽²⁾ la definizione di integrale doppio di una funzione di due variabili complesse, esteso ad una superficie.

La riportiamo qui.

Siano

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

le due variabili complesse, $f(z_1, z_2)$ la funzione, S una superficie *completamente aperta* (in caso contrario la spezzeremmo in un numero finito di parti completamente aperte) contenuta nello spazio a quattro dimensioni i cui punti hanno le coordinate (x_1, y_1, x_2, y_2) .

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1927.

(2) Cfr. anche, per definizioni fondamentali in tal campo, *Sugli integrali doppie delle funzioni di var. complesse* E. PASCAL, « Rendic. R. Acc. Scienze », Napoli 1912.

La S sia rappresentata dalle equazioni

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(u, v) & , & & y_1 &= \psi_1(u, v), \\ x_2 &= \varphi_2(u, v) & , & & y_2 &= \psi_2(u, v), \end{aligned}$$

dove i secondi membri sono definiti in un dominio Ω del piano (u, v) e le coppie $(x_1, x_2), (x_1, y_2), (y_1, x_2), (y_1, y_2)$ sono in Ω a variazione limitata e superficialmente continue. Ciò esprimeremo brevemente dicendo che in Ω la coppia complessa (z_1, z_2) è a variazione limitata e superficialmente continua.

Diviso Ω in un numero finito di domini limitati da linee C , si formi la somma

$$\sum f \Delta_C(z_1, z_2)$$

estesa a tutte le linee C . In essa f è un valore di $f(z_1, z_2)$, considerata come funzione di (u, v) in Ω , nel dominio chiuso da C , $\Delta_C(z_1, z_2)$ è l'incremento della coppia (z_1, z_2) relativo a tale dominio, cioè

$$\Delta_C(z_1, z_2) = \frac{i}{2} \int_C z_1 d\bar{z}_2 - \bar{z}_2 d\bar{z}_1.$$

La somma che abbiamo formata tende ad un limite quando tendono a zero le aree dei domini nei quali Ω è stato diviso.

Tale limite, che indicheremo con

$$\int_S f(z_1, z_2) d\bar{z}_1 d\bar{z}_2,$$

sarà chiamato integrale doppio esteso ad S di $f(z_1, z_2)$. Ora estenderemo nel campo complesso la formola di Green.

Supponiamo che la superficie S completamente aperta sia contenuta in una regione R a quattro dimensioni nella quale una funzione $P(z_1, z_2)$ è regolare.

Sia L la frontiera di S formata da uno o più circuiti; si ha allora

$$\int_S \frac{\partial P}{\partial z_1} d\bar{z}_1 d\bar{z}_2 = \int_L P d\bar{z}_2$$

purchè si fissi opportunamente il verso sopra ogni circuito di L .

Infatti, per la regolarità della funzione $P(z_1, z_2)$ in R , fissato ad arbitrio un numero $\epsilon > 0$ se ne potrà determinare un altro δ in modo che, quando $(z_1, z_2), (z'_1, z'_2)$ sono due punti di R tali che

$$|z_1 - z'_1| < \delta \quad , \quad |z_2 - z'_2| < \delta$$

sia

$$P(\zeta_1, \zeta_2) = P(\zeta'_1, \zeta'_2) + \frac{\partial P}{\partial \zeta'_2}(\zeta_1 - \zeta'_1) + \frac{\partial P}{\partial \zeta'_1}(\zeta_2 - \zeta'_2) + H$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta'_1} = \frac{\partial P}{\partial \zeta'_2} + K$$

essendo

$$|H| < \epsilon \{ |\zeta_1 - \zeta'_1| + |\zeta_2 - \zeta'_2| \}$$

e

$$|K| < \epsilon.$$

Dividiamo ora il dominio Ω in domini parziali $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ limitati dalle linee C_1, C_2, \dots, C_m . In corrispondenza S resterà divisa nelle porzioni S_1, S_2, \dots, S_m limitate dalle linee L_1, L_2, \dots, L_m corrispondenti a C_1, C_2, \dots, C_m .

La divisione di Ω sia tale che se $(u, v), (u', v')$ sono due punti di uno stesso dominio parziale, sia

$$|\zeta_1(u, v) - \zeta_1(u', v')| < \delta,$$

$$|\zeta_2(u, v) - \zeta_2(u', v')| < \delta.$$

In S_r fissiamo un punto $(\zeta_1^{(r)}, \zeta_2^{(r)})$; per un altro punto (ζ_1, ζ_2) di S_r sarà

$$P(\zeta_1, \zeta_2) = P(\zeta_1^{(r)}, \zeta_2^{(r)}) + \frac{\partial P}{\partial \zeta_1^{(r)}}(\zeta_1 - \zeta_1^{(r)}) + \frac{\partial P}{\partial \zeta_2^{(r)}}(\zeta_2 - \zeta_2^{(r)}) + H_r,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial P}{\partial \zeta_1^{(r)}} + K_r,$$

dove

$$|H_r| < \epsilon \{ |\zeta_1 - \zeta_1^{(r)}| + |\zeta_2 - \zeta_2^{(r)}| \}$$

e

$$|K_r| < \epsilon.$$

Sarà dunque

$$\int_{S_r} \frac{\partial P}{\partial \zeta_1} d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{\partial P}{\partial \zeta_1^{(r)}} \int_{S_r} d\zeta_1 d\zeta_2 + \int_{S_r} K_r d\zeta_1 d\zeta_2.$$

Ma

$$\int_{S_r} d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{1}{2} \int_{L_r} \zeta_1 d\zeta_2 - \zeta_2 d\zeta_1 = \int_{L_r} \zeta_1 d\zeta_2,$$

ed essendo

$$\int_{L_r} \left[P(\tilde{\gamma}_1^{(r)}, \tilde{\gamma}_2^{(r)}) + \frac{\partial P}{\partial \tilde{\gamma}_1^{(r)}} (\tilde{\gamma}_1 - \tilde{\gamma}_1^{(r)}) + \frac{\partial P}{\partial \tilde{\gamma}_2^{(r)}} (\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_2^{(r)}) \right] d\tilde{\gamma}_2 = \frac{\partial P}{\partial \tilde{\gamma}_1^{(r)}} \int_{L_r} \tilde{\gamma}_1 d\tilde{\gamma}_2$$

avremo

$$\int_{S_r} \frac{\partial P}{\partial \tilde{\gamma}_1} d\tilde{\gamma}_1 d\tilde{\gamma}_2 = \int_{L_r} P(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) d\tilde{\gamma}_2 + \int_{S_r} K_r d\tilde{\gamma}_1 d\tilde{\gamma}_2 - \int_{L_r} H_r d\tilde{\gamma}_2.$$

Facendo qui $r = 1, 2, \dots, m$ e sommando membro a membro:

$$\int_S \frac{\partial P}{\partial \tilde{\gamma}_1} d\tilde{\gamma}_1 d\tilde{\gamma}_2 = \int_L P(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) d\tilde{\gamma}_2 + \sum_{r=1}^m \int_{S_r} K_r d\tilde{\gamma}_1 d\tilde{\gamma}_2 - \sum_{r=1}^m \int_{L_r} H_r d\tilde{\gamma}_2,$$

dove L è la frontiera di S su ogni circuito della quale viene fissato un conveniente verso.

Ma tenendo conto che $|K_r| < \varepsilon$, per il fatto che la coppia $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)$ è a variazione limitata, il modulo della prima somma che figura nel secondo membro della precedente eguaglianza non supera il prodotto di ε per una quantità fissa. Lo stesso si può dire del modulo della seconda somma, per il fatto che è

$$|H_r| < \varepsilon \{ |\tilde{\gamma}_1 - \tilde{\gamma}_1^{(r)}| + |\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_2^{(r)}| \},$$

sotto condizioni molto larghe di continuità e derivabilità in Ω delle funzioni

$$\gamma_1(u, v) = \varphi_1(u, v) + i\psi_1(u, v),$$

$$\gamma_2(u, v) = \varphi_2(u, v) + i\psi_2(u, v),$$

e per opportune divisioni di Ω in domini parziali (per esempio, con due sistemi di rette paralleli agli assi Ou, Ov).

Ne viene che si ha

$$\int_S \frac{\partial P}{\partial \tilde{\gamma}_1} d\tilde{\gamma}_1 d\tilde{\gamma}_2 = \int_L P(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) d\tilde{\gamma}_2.$$

Come conseguenza: si può estendere al caso di due variabili il teorema di Cauchy per le funzioni di una sola variabile.

Lasciando ad R il significato che abbiamo dato, se $f(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)$, regolare in R , si può mettere in R sotto la forma $\frac{\partial P}{\partial \tilde{\gamma}_1}$ o $\frac{\partial P}{\partial \tilde{\gamma}_2}$, con P regolare in R ,

e se S ed S' sono due superficie contenute in R ed aventi la stessa frontiera, si ha

$$\int_S f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 = \int_{S'} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2.$$

Ciò accade, per esempio, se per tutti i punti di R che hanno una stessa \tilde{x}_2 , \tilde{x}_1 varia in una regione semplicemente connessa della quale fa parte un punto fisso $\tilde{x}_1^{(0)}$, perchè allora

$$f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \frac{d}{d\tilde{x}_1} \int_{\tilde{x}_1^{(0)}}^{\tilde{x}_1} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_1.$$

Analisi matematica. — *Sulle trasformazioni (m, n) tra $m + n + 4$ integrali di due equazioni alle derivate parziali del secondo ordine in due variabili indipendenti.* Nota del dott. B. COLOMBO, presentata⁽¹⁾ dal Socio corrisp. G. FUBINI.

In una mia Nota⁽²⁾ ho dimostrato che una trasformazione (m, n)

$$(1) \quad \theta = C(x, y) \tilde{\zeta} + A_1(x, y) \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial x} + A_2(x, y) \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x^2} + \dots + A_m(x, y) \frac{\partial^m \tilde{\zeta}}{\partial x^m} + B_1(x, y) \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial y} + B_2(x, y) \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial y^2} + \dots + B_n(x, y) \frac{\partial^n \tilde{\zeta}}{\partial y^n} \quad (m, n \geq 1)$$

può mutare al massimo $m + n + 2$ integrali generici (in un senso ben precisato) di un'equazione

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x \partial y} + \alpha(x, y) \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial x} + \beta(x, y) \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial y} + \gamma(x, y) \tilde{\zeta} = 0$$

in integrali di un'equazione analoga, senza mutare necessariamente ogni integrale della prima in un integrale della seconda.

In questa Nota, che estende la precedente, dimostro che una trasformazione (1) può mutare al massimo $m + n + 4$ integrali generici di una equazione (2) in integrali di un'equazione più generale

$$(3) \quad \lambda(x, y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \mu(x, y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + \nu(x, y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \rho(x, y) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sigma(x, y) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \tau(x, y) \theta = 0,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1927.

(2) *Sulle trasformazioni (m, n) che mutano $m + n + 2$ integrali di un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine in due variabili indipendenti in integrali di un'equazione analoga*, « Rend. R. Accademia Naz. dei Lincei », vol. V, serie 6^a, 1° sem., fasc. 10, p. 759.

senza mutare necessariamente ogni integrale della (2) in un integrale della (3).

Infatti se la (1) muta un integrale $\tilde{\alpha}$ della (2) in un integrale θ della (3), si annulla il primo membro della (3) stessa, in cui si sia operata la sostituzione (1); esso contiene le derivate della $\tilde{\alpha}$ all'ordine massimo $m + 2$ rispetto ad x ed all'ordine massimo $n + 2$ rispetto ad y , sicchè è riducibile ad una espressione $(m + 2, n + 2)$, mediante la (2), che permette di eliminare le derivate miste; si ha insomma:

$$(4) \quad L(x, y) \tilde{\alpha} + H_1(x, y) \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial x} + H_2(x, y) \frac{\partial^2 \tilde{\alpha}}{\partial x^2} + \dots + H_{m+2}(x, y) \frac{\partial^{m+2} \tilde{\alpha}}{\partial x^{m+2}} + \\ + K_1(x, y) \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial y} + K_2(x, y) \frac{\partial^2 \tilde{\alpha}}{\partial y^2} + \dots + K_{n+2}(x, y) \frac{\partial^{n+2} \tilde{\alpha}}{\partial y^{n+2}} = 0,$$

con

$$(5) \quad H_{m+2} = \lambda A_m, \quad K_{n+2} = \nu B_n \quad (3).$$

Se la (1) muta $m + n + 5$ integrali $\tilde{\alpha}_b$ di (2) in integrali di (3), è vera la (4) per $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_b$; esiste cioè un sistema di $m + n + 5$ equazioni lineari omogenee, a cui soddisfano le $m + n + 5$ funzioni H, K, L , le quali riescono identicamente nulle, supposto diverso da zero il determinante dei coefficienti:

$$(6) \quad \left| \tilde{\alpha}_b \frac{\partial \tilde{\alpha}_b}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde{\alpha}_b}{\partial x^2} \dots \frac{\partial^{m+2} \tilde{\alpha}_b}{\partial x^{m+2}} \frac{\partial \tilde{\alpha}_b}{\partial y} \frac{\partial^2 \tilde{\alpha}_b}{\partial y^2} \dots \frac{\partial^{n+2} \tilde{\alpha}_b}{\partial y^{n+2}} \right| \quad (h = 1, 2, \dots, m + n + 5).$$

Di conseguenza la (4) è un'identità, e, in grazia delle (5), le funzioni λ e ν sono identicamente nulle, poichè A_m e B_n devono ritenersi essenzialmente diverse da zero. Si ha pertanto il:

TEOREMA. *Se la (1) muta $m + n + 5$ integrali $\tilde{\alpha}_b$ della (2), tali che il determinante (6) sia diverso da zero, in integrali della (3), muta ogni integrale della (2) in un integrale della (3), e quest'ultima equazione ha le stesse linee caratteristiche dell'altra.*

Si tratta ora di far vedere che il teorema precedente perde la sua validità, quando si sostituisca il numero $m + n + 5$ con un numero più piccolo (e perciò ovviamente il determinante (6) con una matrice analoga), ossia di dimostrare il:

TEOREMA. *Se la (1) muta $m + n + 4$ integrali $\tilde{\alpha}_b$ della (2) in integrali della (3), non muta necessariamente ogni integrale della (2) in un integrale della (3), anche supposta diversa da zero la matrice*

(3) Supponendo che la (3) sia ancora un'equazione del tipo (2), cioè che si abbia $= \nu = 0$, il primo membro della (4) si riduce ad una espressione $(m + 1, n + 1)$.

$$(7) \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \gamma_b}{\partial x} \frac{\partial^2 \gamma_b}{\partial x^2} \dots \frac{\partial^{m+2} \gamma_b}{\partial x^{m+2}} \frac{\partial \gamma_b}{\partial y} \frac{\partial^2 \gamma_b}{\partial y^2} \dots \frac{\partial^{n+2} \gamma_b}{\partial y^{n+2}} \end{matrix} \right\| \quad (b = 1, 2, \dots, m+n+4) \quad (1).$$

A tal fine basta addurre un esempio: La trasformazione (m, n)

$$(8) \quad \theta = \frac{\partial^m \gamma}{\partial x^m} + \frac{\partial^n \gamma}{\partial y^n}$$

muta le funzioni $1, x, x^2, \dots, x^{m-1}, y, y^2, \dots, y^{n-1}$ in 0 ; muta x^m, y^n rispettivamente in $m!, n!$; muta x^{m+1}, y^{n+1} in $(m+1)! x, (n+1)! y$; infine muta $x^{m+2} + y^{n+2}$ in $\frac{(m+2)!}{2} x^2 + \frac{(n+2)!}{2} y^2$. La (8) muta

adunque $m+n+4$ integrali di $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = 0$, tali da rendere diversa da zero la matrice (7) (come è facile verificare), in integrali di

$$(9) \quad (n+2)! \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - (m+2)! \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (2);$$

inoltre, per il teorema già dimostrato, non muta ogni integrale di $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = 0$ in un integrale dell'equazione (9), che non ha le stesse linee caratteristiche.

Osservazione. - Se la (1) muta $m+n+4$ integrali γ_b di (2), tali da rendere diversa da zero la matrice (7), in integrali di (3), si annulla il primo membro M della (4), ch'è una espressione $(m+2, n+2)$, per queglii $(m+2) + (n+2)$ integrali γ_b di (2); in grazia al teorema di Darboux, si conclude che la trasformazione $\theta = M$ muta ogni integrale di (2) nell'integrale di un'equazione analoga. Ad ogni trasformazione (m, n) , tale da mutare $m+n+4$ integrali generici di (2) in integrali di un'equazione (3), che non abbia le stesse linee caratteristiche, corrisponde così una trasformazione $(m+2, n+2)$, tale da mutare ogni integrale di (2) nell'integrale di un'equazione dello stesso tipo, cioè colle stesse linee caratteristiche, senza ridursi alla trasformazione $\theta = 0$ (identicamente) (3).

(1) Si può aggiungere, ricordando i risultati della Nota precedente, che, se la (1) muta effettivamente $m+n+4$ integrali generici della (2) in integrali della (3), senza mutare ogni integrale della (2) in un integrale della (3), quest'ultima equazione non ha le stesse linee caratteristiche dell'altra.

(2) In luogo di $x^{m+2} + y^{n+2}$ si può considerare un integrale generico $\varphi(x) + \psi(y)$ di $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = 0$, sostituendo conseguentemente la (9) coll'equazione

$$\varphi(n+2)(y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \varphi(m+2)(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0.$$

(3) Così pure si stabilisce che ad ogni trasformazione (m, n) , tale da mutare $m+n+2$ integrali generici di (2) in integrali di un'equazione analoga, senza mutare rispettivamente ogni integrale in un integrale, corrisponde una trasformazione $(m+1, n+1)$, tale da mutare ogni integrale di (2) nell'integrale di un'equazione analoga, senza ridursi alla trasformazione $\theta = 0$ (identicamente).

Astrofisica. — *Stime di grandezza della cometa Pons-Winnecke* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di A. COLACEVICH, presentata dal Corrispondente G. ABETTI.

Nelle notti dal 20 al 30 giugno fu osservata in Arcetri la cometa Pons-Winnecke. Stime di grandezza vennero da me eseguite mediante confronti con le stelle della B. D. ad occhio nudo; con un binocolo da campagna (obiettivo di 5 cm. e 10 ingrandimenti), e con l'equatoriale della R. Marina (obiettivo di 20 cm. ed ingrandimento di circa 40 volte).

Le notti, durante il tempo delle osservazioni, furono tutte serene e limpide e la cometa alta a sufficienza (il 30 giugno avendosi un'altezza minima di circa 20°). Dopo il 30 le osservazioni cessarono in causa delle cattive condizioni del cielo e nei giorni seguenti per la piccola altezza della cometa.

Nella tabella seguente sono elencate le osservazioni distinguendo quelle riguardanti il nucleo e quelle dell'insieme della cometa. Le grandezze delle stelle di confronto furono ricavate dal catalogo della B. D., da quello Draper e da quello di Potsdam e ridotte poi alle grandezze di Potsdam mediante i dati di Müller (*Photometrie der Gestirne*, p. 452). Vennero adottate le medie dei due cataloghi di Potsdam e Draper e in mancanza di entrambi vennero prese le grandezze date dalla B. D.

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri. Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1927.

TABELLA I.

1927 Giugno	Stelle di confronto della B. D.	Osservazioni Cometa = C	Grandezza osservata	Note
22 ^d .95	a) + 33°.3499	$C = a$	8.5	equatoriale; insieme
	b) 38.3507	$b - 1 - C - 2 - c$	8.2	» »
	c) 38.3509	—	—	—
23 .95	a) 32.3531	$C < a$ di 0.75 gr.	6.9	binocolo; insieme
	b) 31.3735	$b - 1 - C - 1 - c$	7.9	equatoriale; insieme
	c) 31.3738	$d = e < C$ di 0.2 gr.	8.4	» »
	d) 31.3727	—	—	—
	e) 31.3724	—	—	—
24 .95	a) 23.3935	$C = a$	6.8	binocolo; insieme
	b) 25.4149	$C < b$ di 0.5 gr.	8.1	equatoriale; insieme
	c) 25.4151	—	—	—
26 .00	a) 12.4411	$C = a$	5.9	binocolo; insieme
	b) 12.4378	$b - 1 - C - 2 - c$	5.9	» »
	c) 17.4370	$C < d$ di 0.2 gr.	9.3	equatoriale; nucleo
	d) 15.4228	$C > e$ di 0.3 »	8.2	» insieme.
	e) 15.4232	$C < f$ di 0.2 »	7.1	» »
	f) 15.4227	$C > g$ di 0.1 »	7.9	» »
	g) 14.4395	—	—	—
26 .95	a) 3.4473	$C < a$ di 0.1 gr.	5.2	equatoriale; insieme
	b) 3.4461	$C < b$ di 0.3 »	5.7	» »
	c) 4.4606	$C = c$	5.8	» »
	d) 5.4697	$b - 1 - C - 2 - d$	6.1	» »
	e) 6.4758	$e - 1 - C - 1 - f$	8.5	» nucleo
	f) 6.4759	$C < g$ di 0.2 gr.	8.1	» »
	g) 6.4746	$b - 1 - C - 1 - i$	4.7	occhio nudo
	h) 9.4746	—	—	—
	i) + 9.4732	—	—	—
29 .05	a) — 14.6209	$C < a$ di 0.3 gr.	4.9	occhio nudo
	b) 14.6149	$b - 1 - C - 1 - c$	5.7	binocolo; insieme
	c) 13.6027	$C = d$	5.3	—
	d) 14.6102	—	—	—
30 .06	a) 19.6227	$C = a + b$	5.7	binocolo; insieme
	b) — 19.6228	(non separate al binocolo)	6.0	occhio nudo

Facendo la media delle diverse osservazioni giornaliere si ha la seguente tabella riassuntiva:

TABELLA II.

1927 Giugno	I n s i e m e			Nucleo
	occhio	binocolo	equatoriale	equatoriale
22 ^d .95	—	—	8.3	—
23 .95	—	6.9	8.2	—
24 .95	—	6.8	8.1	—
26 .00	—	5.9	7.7	9.3
26 .95	4.7	—	5.7	8.3
29 .05	4.9	5.5	—	—
30 .06	6.0	5.7	—	—

Il nucleo della cometa si presentava molto stellare specialmente fino al' 26 giugno compreso.

Quanto alla forma si può dire che la cometa aveva un accenno di coda osservabile all'equatoriale. La testa appariva come una nebulosità circolare di un raggio di 4' (22 giugno) e la coda invece, estesa in angolo di posizione di 20°, aveva una lunghezza dal nucleo di 8' (22 giugno). Erano poi visibili, ma difficilmente, due ampie volute semicircolari che partendo dalla testa contornavano la coda spingendosi anche oltre e allontanandosi dal nucleo per circa 20'.

La poca luminosità del nucleo e la estensione della nebulosità spiegano che non fu possibile al prof. G. Abetti di ottenere traccia dello spettro della cometa con il riflettore prismatico di 30 cm. Una fotografia della cometa fatta dallo stesso prof. Abetti con l'equatoriale di Amici (obiettivo 36 cm. con lente di correzione di 11 cm.) la sera del 29 giugno conferma le apparenze sopra descritte.

Chimica. — *Complessi dell'uranile con acidi polifenolici.*
Nota ⁽¹⁾ di L. FERNANDES, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

In precedenti lavori ho studiato i complessi di numerose sostanze organiche, aromatiche ossidrilate con acidi inorganici e in particolare con quelli del gruppo del molibdeno.

Gli acidi molibdico, volframico e uranico si comportano in modo assai simile; il molibdeno, presenta però sempre una tendenza maggiore a dar luogo a questo tipo di complessi.

L'uranio nei composti uranilici presenta analogie, da questo punto di vista, sia con gli acidi del suo gruppo, sia con alcuni elementi bivalenti quali il cobalto, il nichel, il manganese ecc., elementi che sono pure caratterizzati dalla tendenza di combinarsi con alcune sostanze polifenoliche per dar luogo ai complessi interni.

I complessi dell'uranile con l'acido gallico sono stati da me preparati ⁽²⁾ gli uranilsalicilati furono studiati da G. Canneri e da me ⁽³⁾, e molto recentemente R. Weiland ⁽⁴⁾ ha confermato i nostri risultati preparando sali di alcune basi organiche dello stesso anione.

Pure da me furono preparati i composti dell'uranile con il pirogallolo, la pirocatechina ⁽⁵⁾, l'ossidrochinone ⁽⁶⁾, la diossinaftalina e l'aldeide protocatechica.

In una mia recente Nota ⁽⁷⁾, sopra i complessi polifenolici degli acidi solfossimolibdici io aveva notato come si possa in base alla costituzione del composto organico, stabilire una scala nella tendenza a dare complessi interni.

Mentre che due ossidrili in posizione orto determinano un legame molto stabile, i composti invece contenenti un ossidrile vicino a un carbosile sono generalmente molto meno stabile dei precedenti.

I complessi dell'acido salicilico presentano appunto per questa ragione un grado assai basso di stabilità. Attualmente ho preso in considerazione i complessi coll'acido ortossinaftolico per avere una conferma a questa ipotesi. Per stabilire cioè se la stabilità del complesso è indipendente dal nu-

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1927.

(2) « Gazz. Chim. Ital. », 43, 514-520 (1923).

(3) « Gazz. Chim. Ital. », 44, 770, (1924).

(4) « Z. Anorg. Allg. Chem. », 160, 190, (1927).

(5) « Gazz. Chim. Ital. », LV, 424, (1925).

(6) « Gazz. Chim. Ital. », LVI, 416, (1926).

(7) « Gazz. Chim. Ital. », LVII, 567, (1927).

cleo organico, ed è unicamente legata al numero ed alla posizione degli ossidridi e dei carbossili.

Per colmare inoltre una lacuna nella conoscenza di questi composti ho studiato quelli dell'acido protocatechico che a causa dei suoi ossidridi vicini presenta una tendenza a dar luogo ai complessi interni, di gran lunga superiore a quella dell'acido salicilico.

Per aggiunta di acido ortossinaftolico ad una soluzione di acetato di uranile, si ottiene una colorazione rossa che va accentuandosi con l'aggiunta di carbonato alcalino. Se questa aggiunta si arresta quando la soluzione è diventata neutra o debolmente alcalina, allora si può separare il complesso; a seconda della sua solubilità o per semplice raffreddamento della soluzione o per evaporazione di esso. Se si aggiunge invece un forte eccesso di alcali il complesso viene decomposto e precipita il pirouranato.

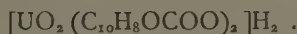
Nel caso invece dei composti dell'acido protocatechico si ha una stabilità tale che per aggiunta di idrati alcalini in eccesso non si ottiene nessun precipitato.

PARTE SPERIMENTALE

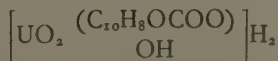
(in collaborazione con F. Palazzo).

ORTOSSINAFTOLURANATI — Questi composti furono preparati per aggiunta dell'acido ortossinaftolico all'acetato di uranile, e per neutralizzazione della soluzione col carbonato della base. Si ottiene una soluzione rossa dalla quale si separa poi il composto cristallizzato.

In queste condizioni sperimentali si formano sempre dei composti contenenti due molecole di acido organico per una di uranile, composti che derivano dall'acido



In condizioni particolari però e cioè in soluzione debolmente acida ed in presenza di forte eccesso di uranile si separano dei cristalli gialli del tipo



i quali possiedono però una complessità estremamente più piccola dei precedenti ed il colore stesso ne è prova sufficiente.

1. — *Ortossinaftoluranato di potassio* $[\text{UO}_2 (\text{C}_{10}\text{H}_8\text{OCOO})_2] \text{KH} .$

Ad una soluzione circa normale di acetato di uranile fu aggiunto in quantità stechiometriche l'acido ortossinaftolico. La soluzione rossa così ottenuta fu riscaldata sino a completa dissoluzione di quest'ultimo, venne poi aggiunto a poco per volta del carbonato di potassio sino a reazione debol-

mente alcalina. Questa soluzione venne filtrata e svaporata lentamente a bagnomaria.

Cominciarono dopo poco a separarsi alla superficie del liquido delle croste nere cristalline. Il sale fu spremuto e lavato con acqua fredda ed alcool. A caldo è abbastanza facilmente solubile nell'acqua, a freddo pochissimo. Nell'alcool e nell'etere è completamente insolubile.

Per l'analisi un campione venne arroventato in crogiuolo di platino e il residuo costituito di pirouranato di potassio venne sciolto in acido nitrico e con ammoniaca venne precipitato in pirouranato di ammonio. Nella soluzione di questo venne dosato il potassio come solfato.

Trovato %	U 34.5	K 5.2
Calcolato »	» 34.9	» 5.7

2. — *Ortossinaftoluranato di sodio* $[\text{UO}_2(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{OCOO})_2] \text{NaH} \cdot 4\text{H}_2\text{O}$.

Questo sale presenta un aspetto assai simile a quello del precedente, per evaporazione della soluzione preparata pure in modo analogo si separano dei cristalli minuti color marrone grigiastro assai più solubili di quelli del sale potassio.

Trovato %	U 31.38	Na 3.18	H ₂ O 11.5
Calcolato »	» 31.30	» 3.02	» 11.8

3. — *Ortossinaftoluranato di guanidina* $[\text{UO}_2(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{OCOO})_2] \text{GuH}$.

Ad una soluzione satura a caldo, del sale di potassio fu aggiunto del nitrato di guanidina. In un primo tempo si separò un precipitato amorfo color rosso mattone, il quale lasciato a sè per circa due o tre giorni si trasformò in un prodotto cristallino aderente alle pareti del recipiente, di color rosso cupo.

Questo composto è assai meno solubile dei sali alcalini specialmente a freddo, è assai solubile in alcool e insolubile in etere.

Per l'analisi di questo composto una parte di essa venne calcinata in crogiuolo di platino e il residuo pesato dette la percentuale dell'uranio, l'azoto fu dosato col metodo gasvolumetrico.

Trovato %	U 33.7	N 6.15
Calcolato »	» 33.4	» 6.0

4. — *Ortossinaftoluranato di bario* $\left\{ [\text{UO}_2(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{OCOO})_2]_2 \right\} \left\{ \begin{matrix} \text{Ba} \\ \text{H}_2 \end{matrix} \right.$.

Per aggiunta di cloruro di bario ad una soluzione bollente del sale di potassio fu ottenuto soltanto un leggero intorbidamento. Filtrata la soluzione,

per raffreddamento, si separò da essa un precipitato microcristallino color giallo ocra, quasi insolubile a freddo. Il prodotto spremuto e lavato fu analizzato in modo simile ai sali alcalini. Eseguita la calcinazione del sale, passato in soluzione il residuo e precipitato il pirouranato venne nella soluzione, dosato il bario come solfato.

Trovato	%	U	33.6	Ba	9.5
Calcolato	»	»	33.4	»	9.7

5. — *Monotossinafioluranato di potassio* $\left[\text{UO}_2 \begin{smallmatrix} (\text{C}_{10}\text{H}_8\text{OCOO}) \\ \text{OH} \end{smallmatrix} \right] \text{KH}$.

Ad una soluzione concentrata di acetato di uranile venne aggiunto in piccola quantità l'acido organico e poi carbonato di potassio in quantità tale da far restare ancora debolmente acida la soluzione. Lasciata questa a sè in un cristallizzatore si separarono dei grossi cristalli gialli aghiformi la cui composizione corrisponde a quella della formula sopra riportata. In acqua questo sale dà luogo ad una colorazione rossa, dovuta probabilmente al fatto che in soluzione si forma un equilibrio fra questo e il composto dell'altro tipo.

Trovato	%	U	46.5	K	7.1
Calcolato	»	»	46.5	»	7.6

PROTocatechicouranati. — Come ho già accennato questi composti, in merito ai due ossidridi vicini, possiedono una complessità e quindi una stabilità molto superiore a quella dei precedenti e non vengano quindi decomposti da nitrati alcalini neppure in soluzione concentrata.

6. — *Protocatechicouranato di guanidina* $[\text{UO}_3 (\text{C}_6\text{H}_3\text{O}_2\text{COO})] \text{GuH}$.

Per aggiunta di acido protocatechico alla soluzione di acetato di uranile, si ottenne una soluzione leggermente colorata in rosso. Questa soluzione venne addizionata a caldo di carbonato di guanidina fino a reazione neutra. Fu ottenuto quasi subito un intorbidamento e poi un precipitato cristallino dovuto alla separazione del complesso. Questo fu spremuto, lavato e analizzato come i precedenti.

Trovato	%	U	47.3	N	7.8
Calcolato	»	»	47.6	»	7.5

7. — *Protocatechicouranato di guanidina*
 $[\text{UO}_3(\text{C}_6\text{H}_3\text{O}_2\text{COO})]\text{C}_6\text{H}_7\text{NH}_2\text{H} \cdot 3\text{H}_2\text{O}$.

Una soluzione alcoolica di anilina fu aggiunta come nella precedente preparazione ad una soluzione di acetato di uranile e acido protocatechico; si separarono subito dei fiocchi-marroni che per prolungato riscaldamento dell'acqua madre si trasformarono in una polvere microcristallina color rosso mattone.

Trovato	%	U 40.2	N 2.5	H ₂ O 9.18
Calcolato	»	» 40.6	» 2.38	» 9.21

8. — *Protocatechicouranato di potassio* $[\text{UO}_3(\text{C}_6\text{H}_3\text{O}_2\text{COO})]\text{KH} \cdot \text{H}_2\text{O}$.

La soluzione di carbonato potassico aggiunta a quella di acido protocatechico e acetato di uranile, non dette sul momento nessun precipitato. Dopo un poco di tempo si separarono dei sottili cristalli marroni di composizione analoga ai precedenti.

Trovato	%	U 48.25	K 7.51	H ₂ O 5.01
Calcolato	»	» 48.01	» 7.86	» 4.67

9. — *Diprotocatechicouranato di guanidina*
 $[\text{UO}_2(\text{C}_6\text{H}_3\text{O}_2\text{COO})_2]\text{GuH} \cdot 12\text{H}_2\text{O}$.

Una soluzione molto concentrata a caldo di acido protocatechico venne addizionata di acetato di uranile di quantità molto inferiore a quella stechiometrica e poi di carbonato di guanidina in piccola quantità. Dopo poco tempo per raffreddamento della soluzione si separarono dei cristalli gialli lucenti di aspetto completamente diverso da quello dei sali precedenti. La stabilità di questo sale è pure assai inferiore.

Trovato	%	U 28.15	N 4.67	H ₂ O 24.4
Calcolato	»	» 28.0	» 4.93	» 25.41

Chimica agraria. — *Il comportamento dell'acido arsenico nei riguardi del potere assorbente del terreno*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di C. ANTONIANI, presentata dal Socio A. MENOZZI.

L'analogia di comportamento che lega i composti dell'acido fosforico a quelli dell'acido arsenico lascerebbe già *a priori* supporre una identità di comportamento dei due anioni anche di fronte al potere assorbente del terreno. Mancano tuttavia indagini sperimentali al riguardo, epperò ho creduto di compiere una serie di esperienze intese ad indagare la possibilità e la misura dell'assorbimento dell'arsénico da parte del terreno ed altresì a ricercare se, in modo analogo a quanto si manifesta per taluni cationi assorbiti dal terreno, sia possibile tra i due anioni PO_4 ed AsO_4 un'azione di scambio. Una tale possibilità, oltre che interessare dal punto di vista scientifico e pratico, avrebbe potuto costituire il fondamento di un metodo per la determinazione dell'acido fosforico dei composti di assorbimento, forma che oggidi si ammette come più facilmente accessibile ai vegetali.

L'assorbimento dell'anione AsO_4 da soluzioni di arseniato sodico e di acido arsenico. — Furono sperimentati tre campioni di terreno di origine alluvionale, di diversa composizione chimica come appare dai dati che seguono:

Terreno n. 1	Terreno n. 2	Terreno n. 3
umidità 26.6	28.5	32.6 per mille
sostanze organiche . . 47.6	57.2	30.1 » »
calcare 31.1	212.5	assenza
sabbia 810 —	841 —	640 — » »
argilla 190 —	159 —	360 — » » ⁽³⁾

impiegandosi una soluzione di arseniato disodico contenente gr. 1.846 di As_2O_5 per litro ed una soluzione di acido arsenico contenente gr. 1.538 di As_2O_5 per litro. La misura dell'assorbimento venne dedotta dalla variazione

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agrario di Milano. Maggio, 1927.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1927.

(3) La sostanza organica è dedotta dalla perdita alla calcinazione, previo ripristino dei carbonati. Sabbia ed argilla vennero determinate col levigatore Apiani, ritenendosi come argilla le particelle dotate di velocità di caduta $<$ di 0.2 mm./sec., come sabbia le particelle dotate di velocità di caduta superiore.

di concentrazione delle soluzioni sperimentate, poste e mantenute per 24 ore a contatto col terreno previamente essiccato a 100° C. La determinazione dell'arsenico si esegui per via ponderale, precipitandolo come pentasolfuro, sostanzialmente secondo il metodo Bunsen modificato da Nehr.

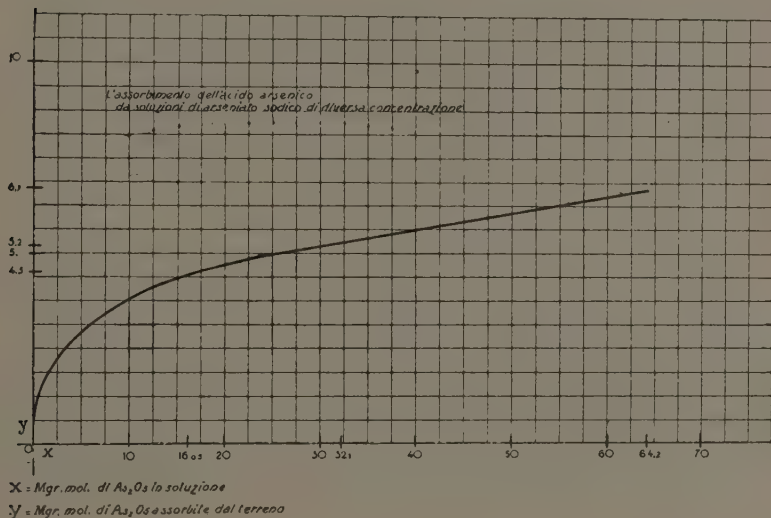
Nella tabella seguente sono raccolti i risultati conseguiti i quali dimostrano la fissazione dell'anione AsO_4 da parte del terreno.

TABELLA I.

L'assorbimento dell'arsenico da soluzioni di arseniato sodico e di acido arsenico.

Numero del terreno e quantità impiegata	Concentrazione iniziale della soluzione %	Concentrazione finale della soluzione %	Quantità complessiva di As_2O_5 posta a contatto del terreno	Assorbimento assoluto	Assorbimento relativo %
Terreno num. 1. - gr. 200 trattati con cc. 300 di soluzione di arseniato . . .	0.1846	0.1339	0.5538	0.1521	27.4
Id. Id.	0.1846	0.1346	0.5538	0.1500	27.0
Terreno num. 2. - gr. 200 trattati con cc. 300 di soluzione di arseniato . . .	0.1846	0.1308	0.5538	0.1614	29.1
Terreno num. 3. - gr. 200 trattati con cc. 300 di soluzione di arseniato . . .	0.1846	0.1316	0.5538	0.1590	28.7
Terreno num. 1. - gr. 100 trattati con cc. 200 di soluzione di acido arsenico . .	0.1538	0.1177	0.3076	0.0722	23.5
Terreno num. 2. - gr. 100 trattati con cc. 200 di soluzione di acido arsenico . .	0.1538	0.1095	0.3076	0.0886	28.8
Terreno num. 3. - gr. 100 trattati con cc. 200 di soluzione di acido arsenico . .	0.1538	0.1005	0.3076	0.1066	34.6

Le caratteristiche di comportamento dell'anione AsO_4 nel processo di fissazione nel terreno. — La fissazione dell'anione AsO_4 studiata dal punto di vista delle correlazioni che intercedono tra la misura dell'assorbimento, la quantità dell'assorbendo in soluzione, il volume di questa e la quantità di terreno colla quale si pone a contatto, si identifica coi tipici fenomeni cosiddetti di assorbimento, in quanto presenta tutte le caratteristiche che sono proprie dei fenomeni stessi. Ciò appare dai risultati sperimentali qui sotto riportati:



Variatione dell'assorbimento variando la concentrazione della soluzione. — Campione di terreno n. 2. — Soluzione di arseniato disodico cc. 200. — Terreno gr. 100.

concentrazione iniziale	concentrazione finale	assorbimento assoluto	assorbimento relativo
gr. 0.1846 %	0.1322 %	0.1048	28.3 %
» 0.3692 %	0.3091 %	0.1202	16.2 %
» 0.7384 %	0.6604 %	0.1560	10.5 %

Variatione dell'assorbimento con il volume della soluzione a parità di rapporto tra quantità di terreno e quantità di anidride arsenica. — Campione di terreno n. 1. — Terreno gr. 200.

	concentrazione iniziale	concentrazione finale	assorbimento assoluto	assorbimento relativo
Soluz. di arse- niato cc. 300:	gr. 0.1846 %	0.1339 %	0.1521	27.4 %
Soluz. di arse- niato cc. 600:	» 0.0923 %	0.0786 %	0.0822	14.2 %

Variazione dell'assorbimento variando la quantità di terreno a parità di rapporto tra volume di soluzione e quantità di anidride arsenica disciolta. — Campione di terreno n. 1. — Soluzione di arseniato disodico cc. 300.

	concentrazione iniziale	concentrazione finale	assorbimento assoluto	assorbimento relativo
terreno gr. 200	gr. 0.1846 %	0.1339 %	0.1521	27.4 %
» » 100	» 0.1846 %	0.1568 %	0.0834	15.0 %
» » 50	» 0.1846 %	0.1667 %	0.0537	9.4 %

Particolare interesse offre l'assorbimento dell'arsenico nei riguardi delle variazioni che esso subisce in rapporto alla concentrazione della soluzione. La curva dell'unito diagramma, che traduce tali variazioni, oltre che essere in accordo colle curve del van Bemmelen per le azioni di assorbimento della silice colloidale e con quelle riscontrate da Pratolongo per i fenomeni di assorbimento del terreno, presenta lo stesso andamento della curva che W. Biltz ⁽¹⁾ trovò sperimentalmente per l'assorbimento dell'acido arsenioso da parte del gel di ossido ferrico.

L'intensità dell'assorbimento dell'anione AsO_4 in confronto all'anione PO_4 .
— Le esperienze compiute non hanno rivelato analogia alcuna di comportamento tra i due anioni per quanto concerne la misura dell'assorbimento. Le correlazioni che si ammettono tra l'intensità dell'assorbimento e la valenza dello ione assorbito ⁽²⁾, non hanno trovato conferma nel comportamento dei due anioni sperimentati: questi, pure essendo equivalenti, sono assorbiti in diversa misura, come dimostrano i dati seguenti:

Campione di terreno n. 2. — Quantità impiegata gr. 100. — Trattamento con soluzioni equimolecolari di fosfato disodico e arseniato disodico, contenenti rispettivamente gr. 0.1141 di P_2O_5 e gr. 0.1846 di As_2O_5 . — Quantità di soluzione impiegata cc. 200.

(1) « Berichte », XXXVII, 3138-3150 (1904).

(2) A. DE DOMINICIS, *Assorbimento di cationi e anioni da parte del terreno agrario*. (« Staz. Sper. Agr. It. », vol. 47, p. 449 e sgg.).

	concentrazione iniziale	concentrazione finale	assorbimento assoluto	assorbimento relativo
P_2O_5 . . gr.	0.1141 %	0.0278 %	0.1726	75.6 %
As_2O_5 . . »	0.1846 %	0.1322 %	0.1048	28.3 %

Azioni di scambio nell'assorbimento dei due anioni PO_4 ed AsO_4 . —
Le esperienze vennero compiute su di un campione di terreno della seguente composizione:

Umidità	32.60 per mille
Sostanze organiche	71.40 » »
Calcare	5.48 » »
P_2O_5 totale	1.35 » »
Sabbia	815 — » »
Argilla	185 — » »

I risultati conseguiti sono riportati qui di seguito. Non appare tra essi scambio alcuno tra i due anioni.

Gr. 500 di terreno trattato con cc. 1000 di acqua di- stillata.		Gr. 500 di terreno trattato con cc. 1000 di soluzione di arseniato.	
Composizione del filtrato:		Composizione del filtrato:	
Anidride arsenica gr.	— —	gr.	0.1569 %
Anidride fosforica	tracce		tracce
Calcio (Ca^{++}) »	0.0047	»	0.0187 »
Magnesio (Mg^{++}) »	0.0012	»	0.0020 »
Sodio (Na^+) »	0.0025	»	0.0489 »
Potassio (K^+) »	0.0015	»	0.0057 »

Si è però creduto opportuno indagare la possibilità di spostamento dell'acido fosforico mediante l'acido arsenico su terreno posto in precedenza a contatto di una soluzione di fosfato sodico, in condizioni cioè di contenere sicuramente fosfati di assorbimento.

Gr. 200 di terreno vennero trattati con cc. 200 di soluzione di fosfato disodico contenenti complessivamente gr. 0.1408 di P_2O_5 . Dopo 24 ore di contatto vennero separati dal terreno, mediante filtrazione, 200 cc. di soluzione; il contenuto in P_2O_5 di essa risultò di gr. 0.0412. La differenza, gr. 0.0996, rappresenta la quantità di P_2O_5 rimasta complessivamente nel terreno e nella soluzione imbibente.

A questo punto il terreno è stato sottoposto a successivi lavaggi, ciascuno compiuto con cc. 200 di acqua distillata; si asportarono con tale trattamento le seguenti quantità di P_2O_5 :

- 1° lavaggio gr. 0.0552,
- 2° » » 0.0219,
- 3° » » 0.0033.

La quantità totale asportata risultò pari a gr. 0.0804; rimanevano quindi nel terreno gr. 0.0192 di P_2O_5 , trattenuta in combinazioni di assorbimento.

Successivamente trattato con 200 cc. di soluzione di acido arsenico (conc. 0.153 % di anidride), il terreno ha ceduto gr. 0.0092 di P_2O_5 , cioè circa la metà della quantità totale assorbita.

Con procedimento analogo e nelle stesse condizioni sperimentali, si è indagata la possibilità di spostamento dell'acido fosforico mediante soluzione di arseniato sodico.

Il risultato è stato negativo come appare dai dati qui esposti:

Terreno gr. 200;

Soluzione di fosfato disodico cc. 200 pari a gr. 0.1408 di P_2O_5 ;

P_2O_5 contenuta nella soluzione filtrata gr. 0.0352;

P_2O_5 rimasta nel terreno e nella soluzione imbibente gr. 0.1056;

P_2O_5 asportata dai lavaggi con acqua:

- 1° gr. 0.0536,
- 2° » 0.0264,
- 3° » 0.0022;

quantità totale asportata gr. 0.0822;

P_2O_5 trattenuta dal terreno in combinazioni di assorbimento gr. 0.0234;

P_2O_5 spostata da cc. 200 di soluzione di arseniato disodico: *tracce*.

Conclusioni. — Il comportamento dell'acido arsenico nei riguardi del potere assorbente del terreno è analogo a quello dell'acido fosforico. L'acido arsenico è però assorbito in misura minore.

Per quanto concerne la possibilità di scambio tra i due anioni, risulterebbe dalle esperienze compiute che l'anione PO_4 è spostato dall'anione AsO_4 in soluzioni di acido arsenico, ma non dallo stesso anione in soluzioni di arseniati.

Per le eventuali applicazioni analitiche che possono derivare da questo comportamento, mi riservo di proseguire ed approfondire le ricerche.

Ringrazio il mio maestro, prof. A. Menozzi, che mi fu di guida in questo lavoro.

Chimica Biologica. — *Trasformazione stereoisomera del glucoso per azione dell'insulina e di tessuto muscolare.* Nota di G. QUAGLIARIELLO e P. DE LUCIA ⁽¹⁾ presentata ⁽²⁾ dal Socio F. BOTTAZZI.

L'idea che il glucoso per essere utilizzato dalle cellule debba subire una trasformazione stereoisomera fu avanzata per la prima volta da Hewitt e Pryde ⁽³⁾, i quali affermarono, che se s'introduce nell'intestino dell'animale vivente una soluzione di d-glucoso in equilibrio, questo subisce una trasformazione per cui il suo potere di rotazione specifica cade da $52,0^{\circ}$ a circa 19° , ed espressero l'opinione che si trattasse del γ -glucoso, già scoperto da Fischer ⁽⁴⁾ sotto forma glucosidica e caratterizzato più tardi da Irvine ⁽⁵⁾ come d-glucoso, in cui la chiusura ciclica avviene sotto forma di ossido di etilene o di propilene.

Più tardi Winter e Smith ⁽⁶⁾ credettero di dimostrare la presenza di γ -glucoso anche nel sangue di individui normali, fondandosi non solo sul basso potere di rotazione specifica del sangue fresco deproteinizzato, ma anche sul fatto che il sangue presenta il fenomeno della mutirotazione, per cui, lasciato a sè per qualche tempo, il valore della sua rotazione specifica va lentamente aumentando, fino a raggiungere (o quasi) quello del d-glucoso in equilibrio. Inoltre, sempre secondo gli stessi A. A., nel sangue dei diabetici non si troverebbero che d-glucoso in equilibrio, ma basterebbe il trattamento insulinico per fare apparire il γ -glucoso.

I risultati di Hewitt e Pryde e quelli di Winter e Smith non sono stati confermati da nessuno dei numerosi Autori che quelle ricerche hanno ripetute ⁽⁷⁾, tanto che venivano generalmente attribuiti alla formazione di prodotti artificiali instabili, formatisi durante le varie operazioni cui i liquidi andavano sottoposti prima di essere esaminati al polarimetro.

Lo studio dell'argomento è stato ripreso da Lundsgaard e Holboll, i quali, in una serie di pubblicazioni iniziate nel 1924 e tuttora in corso ⁽⁸⁾,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1927.

(3) HEWITT e PRYDE « Bioch. Journ. » 14, p. 395, 1920.

(4) FISCHER « Ber. », 47, p. 1980, 1914.

(5) IRVINE, « Journ. Chem. Soc. », 123, p. 898, 1923.

(6) WINTER e SMITH, « Jour. Physiol. », 57, p. 100, 1922.

(7) Ved. QUAGLIARIELLO, « Arch. di Scienze Biologiche », 9, p. 459, 1927.

(8) LUNDSGAARD e HOLBOLL, « Journ. Biol. Chem. », 62, 1924; 65, 1925; 68 e 70, 1926.

non solo hanno riconfermata la esistenza nei liquidi interni degli animali normali di una forma instabile di glucoso a bassissimo potere di rotazione (a cui hanno dato il nome di *neoglucoso*), ma sono anche riusciti ad ottenerne la formazione *in vitro* dal d-glucoso in equilibrio, mediante l'azione simultanea di insulina e di tessuto muscolare fresco.

La tecnica adoperata da Lundsgard e Holboll nelle loro ricerche è estremamente semplice: essi non fanno che dializzare i liquidi organici o la soluzione di glucoso tenuta in contatto per qualche tempo con insulina e pezzetti di muscoli, e sul dializzato determinano il glucoso colla riduzione e la rotazione al polarimetro. Calcolano così delle rotazioni specifiche bassissime (circa 22°), che vanno poi progressivamente crescendo sino a raggiungere, dopo 24 ore circa, il valore normale di $52^\circ,5$.

Queste ricerche parvero a noi così persuasive, che ci sembrò giunto il momento di cercare di chiarire la natura del neoglucoso, e precisamente noi ci proponevamo di vedere se il neoglucoso, che secondo L. e H. si forma facendo agire pezzi di muscoli freschi ed insulina su una soluzione di d-glucoso, non fosse, per caso, l'acido esesofosforico di Embden.

Ma con nostra sorpresa, pur essendoci messi nelle identiche condizioni sperimentali degli Autori sopracitati, noi non siamo mai riusciti ad ottenere deviazioni del valore di rotazione specifica del d-glucoso superiori a quelle consentite dai limiti dell'errore sperimentale, nè abbiamo mai ottenuta traccia di mutirotazione.

Mentre compivamo le nostre ricerche sono comparsi sullo stesso argomento i lavori di Barbour ⁽¹⁾, Lasker e Ringer ⁽²⁾, Beard e Jersey ⁽³⁾, Anderson e Carruthers ⁽⁴⁾, i quali non sono riusciti a confermare i risultati di Lundsgaard; mentre pienamente li conferma Bolcato ⁽⁵⁾, il quale, per di più, non si è servito della dialisi per dealbuminizzare le sue soluzioni, ma di precipitanti chimici (sali di piombo e di mercurio).

Riferiamo brevemente la tecnica da noi adoperata e i risultati ottenuti.

Tecnica sperimentale. — In un matraccio della capacità di circa 500 cm³ contenente 200 cm³ di una soluzione 2,5 % di d-glucoso in equilibrio in liquido fisiologico (NaCl 0,7 o 0,9 %), si pongono da 15 a 30 g di pezzetti di muscoli appena prelevati da animali (rane, coniglio o cane) uccisi per dissanguamento (decapitazione) al momento dell'esperienza. Il liquido ha la temperatura dell'ambiente (12-15° C) nel caso di muscoli di rana, quella di 37-38° C nel caso di muscoli di mammiferi. I matracci

(1) BARBOUR, « Journ. Biol. Chem. », 67, p. 63, 1926.

(2) LASKER a. RINGER, « Journ. Biol. Chem. », 69, p. 713, 1926.

(3) BEARD a. JERSEY, « Journ. Biol. Chem. » 70, p. 167, 1927.

(4) ANDERSON a. CHARRUTHERS, « Bioch. Journ. », 20, p. 556, 1926.

(5) BOLCATO, « Arch. di Fisiol. », 24, p. 671, 1926.

ROTAZIONE SPECIFICA DI UNA SOLUZIONE DI D-GLUCOSO IN EQUILIBRIO, AGITATA PER 30'-240'
CON PEZZI DI MUSCOLI FRESCI E POI DIALIZZATA PER 30'.

	Senza insulina					Con insulina					Qualità e quantità d'insulina (1)	Quantità di muscoli adoperata gr.		
	durata dell'agitazione					diffe- renza massima	durata dell'agitazione						diffe- renza massima	
	30'	60'	120'	180'	240'		30'	60'	120'	180'				240'
Cane 1	51° 3	—	52° 3	—	—	+ 1° 0	52° 6	—	53° 6	—	+ 1°	S. 50 U.	27	
» 2	—	51° 1	51 2	—	—	+ 0 1	—	52° 6	52 1	—	— 0 5	» 50 »	27	
» 3	—	52 1	52 6	52° 1	—	+ 0 5	—	53 1	53 1	52° 5	— 0 6	» 20 »	25	
» 4	—	52 6	53 1	52 9	—	+ 0 5	—	52 8	52 8	51 9	— 0 8	R. 20 »	20	
» 5	52 8	—	51 5	52 6	—	— 1 3	50 3	—	51 9	52 1	+ 1 8	S. 20 »	15	
» 6	—	53 6	53 4	53 5	—	— 0 2	—	53 4	52 2	—	— 1 2	R. 20 »	25	
Coniglio	—	51 1	52 4	51 5	—	+ 1 3	—	52 8	50 0	51 7	— 2 8	S. 40 »	30	
Rana e. 1	—	52 9	53 3	52 0	—	+ 0 4	—	52 8	52 8	53 0	+ 0 2	R. 30 »	20	
» e. 2	—	53 2	52 9	51 8	—	— 1 4	—	51 6	52 0	52 7	+ 1 1	» 20 »	20	
» e. 3	52 7	—	53 2	52 9	—	+ 0 5	53 0	—	53 0	52 5	— 0 5	S. 20 »	25	

Senza insulina (28 determinazioni)

[α] massimo . . . 53° 6
minimo . . . 51 1
differenza . . . 2 5

Con insulina (29 determinazioni)

[α] massimo . . . 53° 6
minimo . . . 50 0
differenza . . . 3 6

(1) S — Insulina Schering; R — Insulina Roche (ileoglandolo). Tutte e due le insuline infettate negli animali si mostrarono attivissime.

vengono messi in agitatore meccanico e agitati continuamente, anche essi a temperatura ambiente o alla temperatura di 37-38° C, secondo la provenienza dei muscoli.

A vario intervallo di tempo, da 30 a 240' dall'inizio dell'esperimento, si sospende l'agitazione e si prelevano dal matraccio 25 cm³ di liquido, che si mettono a dializzare in un tubo di collodione contro un volume eguale di soluzione 0,7 o 0,9 % di NaCl. Dopo 30' di dialisi, nel liquido esterno si determina contemporaneamente il potere di riduzione (metodo di Lehmann) e la rotazione al polarimetro.

I tubi di collodione vennero preparati e provati prima dell'uso, per assicurarci della loro perfetta impermeabilità alle proteine e della buona diffusione del glucoso.

Per le determinazioni polarimetriche abbiamo usato un polarimetro di Landolt a tre campi, costruito da Schmidt e Haensch. Per ottenere luce monocromatica, tra la sorgente luminosa (una lampadina elettrica puntiforme) e l'apparecchio di polarizzazione è interposto uno spettroscopio aggiustato in modo da lasciar passare soltanto raggi compresi tra le linee *D*.

Da numerose ricerche fatte in tempi diversi, nel corso di due mesi, con soluzioni di glucoso varianti da 0,2 al 3 %, abbiamo ricavato per il nostro glucoso (glucoso puro Merck) un valore di rotazione specifica di 52°,20, i valori estremi essendo 50° e 53°,7.

Ciò premesso, riferiamo senz'altro, riassunti nella tabella a p. 115, i dati dei nostri esperimenti, facendo notare che le letture polarimetriche del dializzato furono eseguite non solo subito dopo la dialisi, ma anche dopo diverse ore (fino a 24), senza mai poter constatare traccia di mutirotazione.

CONCLUSIONI. — Come mostrano i dati sopra riferiti, noi non siamo riusciti a confermare i risultati di Lundsgaard e Holboll circa l'azione dell'insulina e dei muscoli su soluzioni di d-glucoso. Proseguiamo tuttavia le nostre ricerche nella speranza di chiarire le cause di questa divergenza.

Chimica-fisica fisiologica. — *Azione delle basse temperature sulla lente cristallina.* Nota di G. BERGAMI ⁽¹⁾, presentata dal Socio F. BOTTAZZI ⁽²⁾.

È noto che, al pari di vari altri agenti fisici, le basse temperature sono capaci di provocare mutamenti di stato nei sistemi colloidali liquidi e solidi. Nella vasta letteratura concernente i sistemi colloidali esistono vari accenni all'influenza delle basse temperature sui colloidi solidi.

Molisch (3), che fece molte ricerche sul congelamento delle piante, osservò al microscopio le modificazioni che subisce la gelatina quando la si fa congelare. La soluzione di gelatina al 2 per cento, che prima appariva omogenea, per effetto del congelamento si trasformò in un sistema somigliante a una spugna, le trabecole essendo costituite di gelatina solida, e le maglie della spugna riempite di ghiaccio; tale aspetto rimase inalterato anche dopo il disgelo.

L'aggregazione delle particelle colloidali per azione delle basse temperature è stata anche da me osservata, in accordo con le osservazioni di Menz (4) in soluzioni di gelatina preparate a caldo e lasciate raffreddare durante l'osservazione all'ultramicroscopio. Durante il raffreddamento si osserva un progressivo aumento dell'eterogeneità ottica del sistema, per la comparsa di numerose particelle dotate di scarso movimento browniano, che poi si agglutinano formando grumi immobili.

Avendo già indagato insieme col Bottazzi l'azione del freddo su sistemi colloidali liquidi organici (siero di sangue) (5), ho voluto ora estendere le ricerche alla lente cristallina, adattatissima per svelare anche le minime alterazioni della sua normale omogeneità ottica.

Sull'opacamento provocato dal freddo nella lente cristallina esistono in letteratura numerose osservazioni.

Sin dal 1882 il Michel (6) mise in evidenza una speciale forma d'intorbidamento del cristallino, la così detta cataratta post-mortale da freddo. Egli la osservò infatti nelle lenti cristalline di giovani gattini, dopo la decapitazione, e quando la temperatura ambiente era piuttosto bassa; l'intorbidamento spariva a 15°-20° C, e ricompariva a 12° C. La forma caratteristica dell'intorbidamento era quella di un disco centrale opaco, mentre la parte periferica rimaneva limpida.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Napoli.

(2) Nota presentata nella seduta del 1° giugno 1927.

(3) MOLISCH H., *Untersuchungen ueber das Erfrieren d. Pflanzen*, Jena, 1897.

(4) MENZ W., «Zeits. f. physik. Chem.», 66, p. 129, 1908.

(5) BOTTAZZI F. e BERGAMI G., «Arch. Scienze Biolog.», 6, nn. 1-2, p. 74.

(6) MICHEL A., *Ueber natürliche u. Künstliche Linsentrübung—Fest. z. dritten Säcularfeien der alma Julia Maximiliana gevidmet von der med. Facult., Wurzburg*, Bd. 1, Leipzig, 1882.

Il Daddi (1) ripetendo le esperienze del Michel, osservò il fenomeno nei gatti e nelle volpi giovani, ma non nei cani, nelle cavie e negli uccelli. L'Ewald (2) notò un leggero e superficiale opacamento in conigli strozzati.

Il Maestrini (3) nel 1915 riprese lo studio della cataratta post-mortale da freddo, estendendo le sue ricerche a varie specie di animali. Seguendo il Michel e il Daddi, chiamò cataratta post-mortale da freddo l'opacamento centrale del cristallino, che si presenta dopo un certo tempo della morte dell'animale, purchè la temperatura dell'ambiente sia sufficientemente bassa (le sue esperienze furono eseguite alla temperatura ambiente media di 10° C.). La temperatura alla quale quest'opacamento scompare, la chiamò temperatura di scomparsa, e per conseguenza temperatura di ricomparsa quella, inferiore, alla quale il fenomeno si ripresenta. Secondo le sue ricerche, fattori che influiscono sulla comparsa di questo fenomeno sono la specie animale e l'età: infatti, egli non osservò il fenomeno in alcune specie di animali ed in alcuni individui di bassa età.

In una seconda serie di esperienze, il Maestrini volle indagare l'influenza dell'ablazione della capsula lenticolare, che favorisce la comparsa dell'opacamento, e l'azione delle soluzioni saline ipertoniche e ipotoniche, venendo, in questo caso, alla conclusione che le soluzioni ipertoniche possono da sole provocare il fenomeno nei casi in cui esso non si presenta spontaneamente. A questo proposito, bisogna notare che il Troja (4) fin dal 1780 riuscì a provocare negli animali cataratte sperimentali mediante applicazioni sull'occhio di cloruro sodico e nel 1857 il Kunde (5) osservò in una rana, a cui aveva somministrato forti quantità di NaCl, un intorbidamento generale del cristallino che scompariva se la rana era rimessa in acqua. Su quest'ultimo argomento vi sono numerosi lavori fra cui quelli di Koehnhorn (6), Richardson (7), Mitchell (8), Manca e Ovio (9). Il Maestrini (10) tentò poi, ma con esito negativo, di mettere in evidenza con metodi istologici differenze strutturali tra la parte che si opaca e quella che rimane trasparente. Egli infine esclude decisamente che le basse temperature possano da sole provocare l'opacamento.

In recenti ricerche, Buglia (11) attribuisce il diverso comportamento della sostanza centrale e della corticale della lente, nell'opacamento da freddo, a differenze di composizione chimica e di concentrazione di idrogenioni.

Con le presenti ricerche si è voluto successivamente indagare su lenti cristalline di cane, di pecora e bue, l'azione:

- 1° delle sole basse temperature sulla trasparenza della lente;
- 2° di soluzioni ipertoniche e ipotoniche;

(1) DADDI L., « Arch. ital. de Biologie », 30, p. 223, 1893.

(2) EWALD I. R., « Pflüger's Archiv », 72, p. 1, 1898.

(3) MAESTRINI D., Nota I, « Archivio di Oftalmologia », 22, nn. 5-6, p. 257, 1915; Nota II, id. id., p. 267, 1915; Nota III, id. id., nn. 7-8, p. 295, 1915.

(4) TROJA M., *Lezioni intorno alle malattie degli occhi*. Napoli 1870, p. 398.

(5) KUNDE F., « Zeits. wiss. Zool. », 8, p. 466, 1857.

(6) KOEHNHORN, *De cataracta aquae inopia*-Dissert. inaug., Greypthiae, 1858 (citato da Ewald (8)).

(7) RICHARDSON, « Oesterr. Zeits. für pract. Heilk. », 45, 1860 (citato da Maestrini (7)).

(8) MITCHELL E., *ibid.*, 39, 1860, (citato da Maestrini (9)).

(9) MANCA e OVIO G., « Annali di oftalmologia », 5, p. 112, 1897.

(10) Loc. cit.

(11) BUGLIA G., « Archivio di oftalmologia », 32, p. 193, 1925.

3° di soluzioni ipertoniche e ipotoniche e delle basse temperature;
4° delle basse temperature su lenti cristalline immerse in liquidi regolatori di valore di pH diverso.

TECNICA. — Le lenti cristalline erano asportate da occhi provenienti dal macello, e mantenute per due o tre ore, dopo la morte dell'animale, in liquido di Ringer. Il raffreddamento era ottenuto mediante miscuglio frigorifero di ghiaccio tritato e soluzione satura di NaCl. Le lenti erano immerse in piccoli recipienti di vetro contenenti liquido di Ringer in cui pescava il bulbo di un termometro.

In ogni esperienza, delle due lenti dell'animale, una era raffreddata e l'altra mantenuta per confronto, alla temperatura dell'ambiente. A ogni due gradi di discesa della temperatura, si osservava rapidamente la lente estraendola dal liquido di immersione e posandola sopra una lastra di vetro coperta inferiormente da carta nera.

Nelle esperienze sull'azione di soluzioni ipertoniche ed ipotoniche si è rispettivamente usato del liquido di Ringer ipertonico ed ipotonico della seguente composizione:

Liquido di Ringer ipertonico			Liquido di Ringer ipotonico		
H ₂ O	cc.	1000	cc.	1000	
NaCl	g	27	g	3	
CaCl ₂	»	0.62	»	0.08	
KCl	»	1.26	»	0.14	
NaHCO ₃	»	0.9	»	0.05	

RISULTATI. — Dai protocolli sperimentali, che per brevità non riporto, risulta:

I. — Azione delle basse temperature.

Lenti cristalline di pecora e di bue presentano, dopo un lento raffreddamento, un disco centrale opaco a circa 1° C. Il cristallino di confronto mantenuto alla temperatura dell'ambiente (da 12° a 16° C), rimane affatto trasparente. L'opacamento del cristallino raffreddato scompare alla temperatura dell'ambiente.

Le lenti cristalline di cane, non presentano alcun intorbidamento per la semplice azione della bassa temperatura, per quanto si prolunghi (4 ore) e s'intensifichi il raffreddamento (— 5° C).

II. — Azione di soluzioni ipertoniche e ipotoniche.

Lenti cristalline di pecora e di bue immerse in liquido di Ringer ipertonico, presentano un leggero intorbidamento diffuso dopo 24 ore (a temperatura ambiente da 12° a 16° C) e un disco centrale opaco.

Le lenti di confronto, tenute immerse in liquido di Ringer isotonico, rimangono affatto trasparenti. Immergendo in liquido di Ringer ipotonico le lenti divenute opache per l'azione del liquido di Ringer ipertonico, dopo 15' queste tornano trasparenti.

Lenti cristalline di cane mantenute nelle identiche condizioni per 24 ore in liquido di Ringer ipertonico, non presentano alcun intorbidamento.

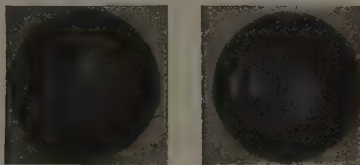
III. — Azione combinata delle basse temperature e di soluzioni ipertoniche.

Lenti cristalline di cane, immerse in liquido di Ringer ipertonico e sottoposte a raffreddamento, presentano a circa 1°C un disco centrale opaco. Lasciandole tornare alla temperatura dell'ambiente, ridiventano del tutto trasparenti.

Lenti cristalline di pecora, immerse in liquido di Ringer ipertonico, presentano alla temperatura dell'ambiente un leggero intorbidamento diffuso. Sottoposte poi a raffreddamento, presentano, a circa 4°C , un disco centrale opaco, visibilissimo malgrado l'intorbidamento generale della lente. Lasciate tornare alla temperatura dell'ambiente, scompare l'opacamento centrale, rimanendo un leggero intorbidamento diffuso. Immergendole in liquido di Ringer ipotonico a temperatura dell'ambiente, le lenti tornano del tutto trasparenti.

IV. — *Azione di liquidi regolatori di valore di pH diverso.*

Raffreddando contemporaneamente varie lenti cristalline di bue immerse



in liquidi regolatori a vario pH (da pH 3 a pH 7), si nota, in corrispondenza di pH 4.2, la massima facilità e la massima intensità di opacamento, che nella maggior parte dei casi è reversibile alla temperatura dell'ambiente.

CONCLUSIONI. — Le lenti cristalline di pecora e di bue si comportano, rispetto alle basse temperature, come il siero del sangue dializzato. Presentano infatti, a temperature poco discoste da zero, una coagulazione parziale, opacandosi nella parte centrale (v. fig. 1). Questa coagulazione è del tutto reversibile, essendo sufficiente il ritorno alla temperatura dell'ambiente perchè le lenti si chiarifichino (v. fig. 2).

Il liquido di Ringer ipertonico può da solo provocare nelle lenti cristalline di bue e di pecora un opacamento simile a quello provocato dal freddo. L'opacamento compare dopo circa 24 ore di immersione alla temperatura dell'ambiente ($12^{\circ} - 18^{\circ}\text{C}$) e scompare abbastanza rapidamente se le lenti sono immerse in liquido di Ringer ipotonico. L'influenza delle soluzioni ipertoniche probabilmente consiste in una deidratazione del colloide lenticolare.

Facendo agire insieme le basse temperature e le soluzioni ipertoniche, si riesce ad ottenere un opacamento, reversibile alla temperatura dell'am-

biente, anche nelle lenti cristalline di cane, che non si opacano nè per azione del solo freddo, nè per azione delle sole soluzioni ipertoniche.

Il liquido regolatore avente un valore di $pH = 4.2$ le lenti cristalline di bue presentano la massima facilità ed intensità di opacamento per freddo. Ciò conferma i risultati di Gullotta⁽¹⁾ che ha trovato per la lente cristallina di bue il punto isoelettrico corrispondente a $pH = 4$.

In conclusione, il colloide lenticolare del bue e della pecora si dimostra meno stabile, di fronte alle basse temperatura, di quello che sia il siero del sangue, perchè, mentre per ottenere un opacamento del secondo occorre privarlo degli elettroliti, per il primo è sufficiente l'abbassamento della temperatura. Verosimilmente ciò dipende dal fatto che la lente cristallina è un sistema colloidale più condensato che non sia il siero del sangue. Comunque sia, l'opacamento da freddo della lente cristallina è reversibile alla temperatura dell'ambiente.

Zoologia. — *Le affinità nei Petromizoni studiate secondo criteri morfologici-sistematici ed ecologici*⁽²⁾. Nota⁽³⁾ di G. COTRONEI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Con la presente nota, che continua ricerche proseguite⁽⁴⁾ in questi ultimi anni, si studiano le affinità delle tre note forme di Petromizoni del nostro paese, sia dal punto di vista di alcuni caratteri morfologico-sistematici, sia da quello dei caratteri biologici. Feci rilevare in altra Nota come alcuni caratteri sistematici differenziali fossero in realtà in dipendenza di condizioni fisiologiche (allontanamento o unione delle pinne dorsali), e nell'accennare a quelli riferentisi alle produzioni cornee della bocca espressi un giudizio di riserva, rilevando che bisognava tener conto delle condizioni di accrescimento, diverso nelle tre forme.

I caratteri morfologico-sistematici cui con la presente mi riferisco vengono appunto valorizzati perchè essi non sono caratteri transitori, ma costantemente differenziali nelle varie fasi del ciclo vitale.

Un carattere sistematico largamente usato nello studio dei Pesci è quello basato sul numero e la disposizione dei miomeri, orbene applicando tale studio alle forme dei Petromizoni è risultato che il numero dei miomeri preanali è identico nel *Petromyzon fluviatilis* e nel *Petromyzon Planeri*, è notevolmente diverso nel *Petromyzon marinus*. In tale studio però, per poter

(1) GULLOTTA S., « Boll. d. Soc. It. di Biol. Sperim. », vol. I, n. 1, p. 42, 1926.

(2) Dall'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(3) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1927.

(4) Queste ricerche sono state continuate usufruendo di fondi avuti dalla R. Accademia dei Lincei (fondo Treccani). Esprimo pertanto i miei vivi ringraziamenti.

valorizzare il carattere, ho dovuto procedere ad una ricerca preliminare: dimostrare che almeno per gli stadi che piglio a confrontare non esiste uno spostamento dall'ano rispetto ai miomeri. Cosicchè la ricerca sistematica è stata integrata e preceduta dalla dimostrazione di questo fatto.

È noto che in molti pesci durante lo sviluppo e durante la metamorfosi si ha uno spostamento dell'ano, che fa variare il numero dei miomeri preanali. È risultato specialmente che nei fenomeni di accorciamento che si notano nella metamorfosi dei Murenoidi si ha uno spostamento dell'ano, che non è soltanto apparente, come effetto di accorciamento della porzione del tronco cui corrisponde il tubo digerente, ma che è in relazione ai mutati rapporti morfologici, cosicchè aumenta il numero dei miomeri compresi fra l'ano e l'estremità caudale (Sella). In altri Teleostei, Raffaele mise in luce uno spostamento dell'ano dalla parte anteriore a quella posteriore, ciò che si verifica anche nei Murenoidi, ma nei primi periodi.

Nelle seguenti osservazioni ho preso in considerazione larve (ammoceti) di *Petromyzon Planeri* in stadio di avanzato accrescimento, e adulti sessualmente maturi della stessa forma. Ho esaminato poi individui di *Petromyzon fluviatilis* prima e dopo l'assunzione dell'abito di nozze. Così pure ho fatto per il *Petromyzon marinus*. Di quest'ultima forma ho avuto la fortuna di esaminare anche un esemplare di cm. 29.8, misura che corrisponde alle massime da me ottenute per il *Petromyzon fluviatilis*.

Ecco senz'altro le medie da me ottenute:

Petromyzon Planeri:

Larve, media su 10 individui dei miomeri preanali	74.1
Adulti sessualmente maturi media su 10 individui dei miomeri preanali	73.8

Petromyzon fluviatilis:

Esemplari prima della maturità sessuale media su 15 individui dei miomeri preanali	75
Adulti sessualmente maturi media su 15 individui dei miomeri preanali	75.26

Petromyzon marinus:

Individuo di piccole dimensioni, lungo cm. 29,8 numeri dei preanali	88.
Esemplari prima della maturità sessuale media su 7 individui dei miomeri preanali	88.7
Maschio maturo numero dei miomeri preanali	87
Femmina sessualmente matura (reperto ottenuto quest'anno) numero dei miomeri preanali	88

Queste osservazioni ci dimostrano: 1° il numero dei miomeri preanali rimane costante sia nella fase dei metamorfosi (*Petromyzon Planeri*) sia nella fase di accorciamento inerente alla maturità sessuale. 2° Ci dimostrano ancora che mentre il numero dei miomeri preanali è indentico nel

Petromyzon Planeri e nel *Petromyzon fluviatilis* è notevolmente diverso nel *Petromyzon marinus*, questa differenza essendo indipendente dal maggiore accrescimento raggiunto dal *Petromyzon marinus*.

Un altro carattere differenziale tra il *Petromyzon marinus* da una parte e il *Petromyzon Planeri* e il *Petromyzon fluviatilis* dall'altra è già noto in letteratura come dedotto dalla disposizione e numero dei denti cornei. Osservazioni da me compiute mi permettono ora di valorizzare questo carattere, inquantochè l'esame del piccolo esemplare di *Petromyzon marinus* mi dimostra che si tratta di caratteri che non dipendono da ragioni di accrescimento. Il Borri specialmente valorizzò un carattere desunto dai denticoli labiali. Borri ha dimostrato che nel *Petromyzon marinus* non si ha una vera dentatura labiale indipendente dalla rimanente dentatura, mentre invece nel *Petromyzon fluviatilis* e nel *Petromyzon Planeri* si ha una vera corona di denticoli labiali, staccata e indipendente dalle altre produzioni cornee del cavo boccale. Nel piccolo esemplare di *Petromyzon marinus* da me esaminato, i denticoli labiali si presentano perfettamente disposti come negli esemplari più grandi della stessa forma; inoltre nel piccolo esemplare si ha un numero e una disposizione di denti cornei che corrisponde agli individui di grosse dimensioni. I denti cornei del *Petromyzon marinus* sono più numerosi che nel *Planeri* e nel *fluviatilis*.

In conclusione lo studio delle produzioni cornee, anche tenuto conto dei fenomeni della muta, mentre ravvicina il *Petromyzon fluviatilis* e il *Petromyzon Planeri*, mostra un netto distacco con il *Petromyzon marinus*, così come risultava dalle diligenti osservazioni del Borri.

Le osservazioni avanti esposte si prestano per le seguenti considerazioni, pur rimanendo in un campo rigorosamente obbiettivo. Esistono dei caratteri morfologico-sistematici differenziali, quelli avanti riferiti, tra *Petromyzon marinus* da una parte e *Petromyzon fluviatilis* e *Petromyzon Planeri* dall'altra, ma se invece ci riferiamo all'ecologia delle tre forme, siamo costretti a ravvicinare *Petromyzon fluviatilis* e *marinus* e separarli dal *Petromyzon Planeri*. In una serie di note già pubblicate in questo periodico io ho fatto risaltare le peculiari caratteristiche della ecologia delle tre forme di Petromizonti del nostro Paese; sulla base ecologico-comparativa impostai appunto le mie ricerche e mi sia consentito di rilevare che fui il primo a riprendere lo studio dei Petromizonti sotto questo punto di vista. Non è il caso ora di ripetere le osservazioni allora riferite. Caratteristiche fondamentali delle due forme di maggiori dimensioni (*Petromyzon fluviatilis* e *Petromyzon marinus*) sono la migrazione verso il mare dopo la metamorfosi, la ripresa di nutrizione e poi a distanza di tempo la montata in condizione di digiuno, per finire il loro ciclo vitale in condizioni di atrofia per la maturazione delle cellule sessuali. Nel *Petromyzon Planeri* invece si ha coesistenza o immediata successione tra metamorfosi e maturità sessuale

senza fenomeni di migrazioni. Collegati con queste differenze ecologiche vi sono importanti fatti anatomici correlativi che ho altrove rilevato. Il *Petromyzon fluviatilis* e il *Petromyzon Planeri* hanno caratteri morfologico-sistematici simili ma biologici differenti. Sono una stessa specie? Si tratta soltanto di razze biologiche differenti? I caratteri sistematici del *Petromyzon marinus* sono differenti. Si può logicamente pensare che questa rappresenta una buona specie. È suggestivo graduare i caratteri comuni e differenziali di questo gruppo di animali. Qualche morfologo evoluzionista direbbe: il *Petromyzon fluviatilis* è una razza (o specie) biologica del *Petromyzon Planeri*, che assume nuovi caratteri in rapporto con una differente ecologia. Questa razza (o specie) biologica è una nuova specie in formazione, il *Petromyzon marinus* è questa buona specie già formata. Noi non ci fermeremo, però, in questo campo ipotetico, fino a quanto non sarà possibile tradurre l'ipotesi in un'attuazione sperimentale, perocchè ogni deduzione di derivazioni potrebbe in ultima analisi risultare completamente arbitraria, ma ciò non vuol dire che non si possano graduare le affinità e le differenze delle tre forme studiate: affinità e differenze che non sono meno interessanti per tutte quelle complesse quistioni che dal loro studio scaturiscono.

Zoologia. — *Sullo strato perintestinale del mesointestino dei balanidi* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del dott. L. PATANÈ presentata dal Corrispondente A. Russo.

Sin dal 1923 ⁽³⁾ il Monterosso, occupandosi della struttura del mesointestino di *Balanus perforatus* (Bruguère) vi rilevava l'esistenza di un particolare strato di cellule, che era passato inosservato ai precedenti autori, i quali si erano occupati dell'intestino dei Cirripedi. Tale strato, formante come una corona attorno alla tunica muscolare dell'intestino, fu da questo A. denominato in un primo momento « strato peritoneale ».

Successivi studi, diretti a precisare sia la fine struttura che il significato funzionale dello strato cellulare da lui scoperto, portarono questo A. alla conclusione ⁽⁴⁾ che esso è di somma importanza per l'economia dell'animale, in quanto ai suoi elementi spetta la funzione di assumere le

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Catania, diretto dal prof. Achille Russo.

(2) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1927.

(3) Rimovimento dell'epitelio e significato delle pieghe nella mucosa dell'intestino di *Balanus perforatus* (Bruguère). « Archivio Italiano di Anatomia e di Embriologia » vol. 20, fascicolo 2, 1923.

(4) Su di un particolare strato cellulare esistente attorno al mesointestino dei Balanidi. Memoria presentata alla Regia Accademia dei Lincei nel 1927. Per gentile concessione dell'Autore, ho preso visione della Memoria nelle bozze di stampa.

sostanze assorbite dall'epitelio della mucosa intestinale e distribuirle ai tessuti circostanti.

Nel citato lavoro l'A. comunicando i risultati delle sue più recenti indagini, cambia il nome dello strato in parola da « peritoneale » in « perintestinale » o « perienterico », per non pregiudicare l'origine di esso, in mancanza di osservazioni adeguate, sullo sviluppo embrionale e larvale della specie studiata.

L'A. descrive minutamente la forma e il significato di speciali organiti che si trovano entro la cellula perintestinale, cioè il *parasoma*, i *corpuscoli*, i *filamenti prossimali*, i *granuli* ed i *vacuoli basali*.

Il *parasoma* è una sferetta di sostanza quasi del tutto omogenea, posta per lo più vicino e sopra il nucleo della cellula; la sua funzione sarebbe di assumere le sostanze che la cellula perintestinale assorbe dall'epitelio intestinale,

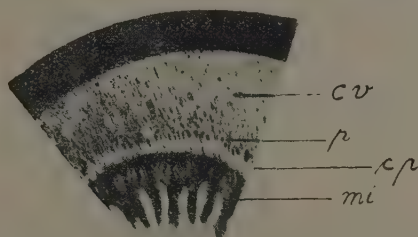


Fig. 1^a.

Settore d'una sezione trasversa del mesointestino di (*Balanus porcatus*mi), mucosa intestinale; (cp), strato delle cellule perintestinales; (p), parasoma; (cv), cellule banali (connettivo vescicolare). (Microfotografia).

elaborarle nel suo interno e quindi espellerle in forma di corpicciuoli di volume variabile: a questi il Monterosso assegna il nome di *corpuscoli*. I *filamenti prossimali* sono fibrille di natura ergastoplasmica, che si trovano nella metà basale delle cellule perintestinales. I *granuli* sono minute formazioni rotondeggianti intracitoplasmiche, che si notano, ma non sempre, di preferenza tra i filamenti prossimali. Alla base delle cellule si trova un *vacuolo* (qualche volta due, tre) detto *basale* per la sua posizione; non è però costantemente rilevabile.

Data l'importanza e la novità dei reperti ora accennati, ho creduto non privo d'interesse ricercare l'esistenza dell'assisa cellulare in parola, nonché le eventuali differenze morfologiche dei suoi elementi in altre specie del genere *Balanus*.

A tal riguardo, ho potuto notare, contrariamente a quanto qualche autore mostra di credere, che, da specie a specie, lo studio dell'anatomia micro-

scopica dei Balanidi, mostra per molti organi, ed in special modo per il tubo digerente (compreso lo strato perintestinale), differenze di struttura e di forma così nette, da mettere in grado il ricercatore, che acquisti, con sufficiente pratica, familiarità con la morfologia interna di questi organismi, di diagnosticare la specie, potrebbe quasi dirsi, in qualsiasi sezione microscopica.

Sarebbe stata mia intenzione, investigare il problema dell'esistenza dello strato perintestinale nel maggior numero possibile di specie del genere ricordato. Praticamente però ho trovato difficoltà, per il momento insormontabili, alla raccolta di molte forme. Le coste di Catania sono, è vero, ricchissime di *Opercolati*, ma un numero molto sparuto di specie del genere *Balanus* ho potuto, fino ad ora, trovarvi. Vi predomina in modo assoluto *Balanus perforatus* (Bruguière); sono anche comuni *B. irigonus* (Darwin) e *B. eburneus* (Gould); le due ultime specie non erano state ancora segnalate per questa regione. Non escludo che possano esserne altre, ma nelle ricerche che fino ad ora ho fatto, ho rinvenuto solamente quelle già accennate. Ho tentato di avere del materiale da altre regioni, ma le forme che mi furono inviate, son proprio quelle che esistono su queste coste. Per caso potei avere pochissimi esemplari viventi di *Balanus porcatus* (Da Costa), che trovai attaccati alla chiglia di un grosso piroscavo fermo temporaneamente nel nostro porto.

Balanus porcatus (Da Costa). — Lo strato perintestinale è molto evidente. I suoi elementi, che costituiscono una elegante corona attorno al tubo digerente, sporgendo al di fuori della tunica muscolare, assumono molto spesso la forma di clava, che considererò quindi come caratteristica di tali cellule in questa specie (fig. 2).

Osservate a piccolo ingrandimento, dopo fissazione col liquido Tellysniczki o Carnoy e successiva colorazione con *Ematossilina ferrica* ed *Eosina*, presentano generalmente nella parte distale una massa compatta nera, che a più forte ingrandimento si risolve in un numero, spesso considerevole, di corpuscoli per lo più sferici, colorati in nero e di grandezza varia. Nelle cellule, poco numerose, che sono povere di corpuscoli, si rileva spesso tra questi il *parasoma*, perfettamente sferico ed a superficie liscia. Nelle altre l'abbondanza dei corpuscoli pare non ne permetta il rinvenimento, giacchè, come si può presumere, essi lo mascherano. Colorando con *Ematossilina Ehrlich* ed *Eosina* tanto i corpuscoli che il *parasoma*, restano pressochè incolori; colorando invece con *Ematossilina ferrica* ed *Eosina* possono alcune volte assumere la sola *Eosina* o si dà il caso che i corpuscoli restino incolori anche con questo ultimo metodo di colorazione (fig. 2).

Prevalentemente il *parasoma* si trova, quando lo si può bene individuare, accanto ed al disopra del nucleo, ma tale posizione non è costante, potendo anche essere situato, a fianco o al di sotto di esso, ciò che, del resto, avviene molto di rado.

Una notevole caratteristica di questa specie è che la maggior parte delle cellule perintestinali sono binucleate. I due nuclei di ogni cellula, quasi sempre sferici, piuttosto grossi, con aspetto quasi vescicolare, possono essere contigui o separati da uno spazio più o meno grande; ma generalmente si trovano entrambi nella metà distale dell'elemento.

Notevole è anche il contenuto cromatinico di essi: spesso si trova una massa di cromatina staccata dalla membrana nucleare, in posizione centrale. Essa si comporta in maniera degna di nota rispetto alle tinte in uso nella tecnica microscopica, giacchè, oltre a colorarsi con *Ematossilina*, può essere attaccata elettivamente dall'*Eosina*, in uno o in entrambi i nuclei, che sono presenti nell'unica cellula. Nelle cellule mononucleate, la cromatina mostra



Fig. 2ª. — *Balanus porcatus*.

Sezione trasversale del mesointestino. Mf = mucosa intestinale; M = muscolatura; N = nuclei; C = corpuscoli; P = parasoma.

per lo più affinità con l'*Ematossilina ferrica*, ma non è raro trovarne colorata nettamente dall'*Eosina*.

Potrebbe darsi che la eosinofilia osservata sia da attribuirsi al fatto, che l'accennata massa di sostanza intranucleare a comportamento acidofilo risulti, anzichè di cromatina, di sostanza nucleolare.

Dato però il numero limitatissimo di esemplari avuti a disposizione, non ho potuto investigare come avrei voluto, tale reperto.

Quando il nucleo, anzichè presentare l'anzidetta massa di sostanza, staccata dalla membrana, ha la struttura ordinaria, il nucleo è generalmente ben evidente, contrariamente a quanto si verifica in *Balanus perforatus*, in cui anzi la presenza di tale elemento è una eccezione (Monterosso).

Nelle cellule binucleate, i corpuscoli (fig. 1 c) che si rinveggono costantemente nel protoplasma, si dispongono spesso attorno ai nuclei in modo da dare in sezione, nell'assieme, l'aspetto della cifra 8, oppure s'interpongono fra di essi, in fitta serie perpendicolare all'asse maggiore dell'elemento perintestinale.

Frequentemente sono stati riscontrati i *filamenti ergastoplasmici* basali, che sono però più delicati di quelli di *B. perforatus*. Non è stata rara l'osservazione dei *granuli* qualche volta numerosi, e di *vacuoli basali*, dei quali talora se ne osserva uno solo abbastanza grande, perfettamente sferico; altre volte ne sono presenti due, tre, piccoli, contigui.

Balanus trigonus (Darwin). — Lo strato perintestinale è presente anche in questa specie e, sebbene non abbia l'evidenza e la regolarità da cui è contra-

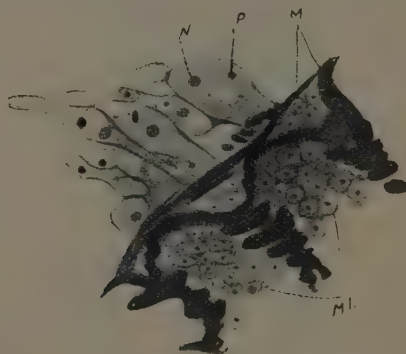


Fig. 3ª. — *Balanus trigonus*.

Sezione quasi trasversale del mesointestino. Ml = mucosa intestinale; M = muscolatura; P = peritroca; N = nucleo.

segnato nella specie precedente, si arriva a ben distinguerlo, quando si confrontino i suoi caratteri con quelli del tessuto ad esso contiguo.

Il protoplasma con i metodi comuni di fissazione (Tellyesniczki, Carnoy), si presenta generalmente con struttura spumosa: ciò che basterebbe a differenziare le cellule peritrocali dalle altre, nelle quali questa struttura è raramente accennata. La compattezza del citoplasma è del resto varia nelle cellule perintestinali, forse in relazione con i diversi momenti fisiologici attraversati da esse.

Generalmente, nei preparati colorati con *Ematossilina ferrica* ed *Eosina*, gli elementi perintestinali si colorano più intensamente del parenchima circostante, perchè sono più acidofili di questo. Un altro carattere distintivo consiste nella forma clavata, quasi cilindro-conica, delle cellule perintestinali. Queste posseggono un nucleo unico subsferico, che occupa una posizione

variabile, potendo rinvenirsi sia nella regione distale, sia nella media e inferiore, e che per lo più è provvisto di nucleolo molto piccolo (fig. 3).

La presenza del *parasoma* non appare costante. Infatti, colorando con *Ematossilina ferrica* ed *Eosina*, si rilevano alcuni elementi perintestinali con un parasoma piuttosto piccolo, che raramente ha forma sferica, e altri in cui il parasoma non si vede. In sua vece si scorge ora un corpo nero, piccolissimo, quasi puntiforme, ora una formazione incolore, pressochè sferica; essa si può sempre ben delimitare rispetto al citoplasma circostante ed è spesso fornita di un punto nero quasi centrale. Non è possibile per il momento, affermare se, in questi casi, si tratti di parasoma in stadi morfo-fisiologici diversi.

I *corpuscoli*, piuttosto piccoli, tendenti alla forma sferica, ammassati presso l'estremità distale della cellula, spesso abbastanza numerosi, sono talora visibilissimi e si colorano fortemente con l'*Ematossilina ferrica*. Granuli fibrille basali e vacuoli sono stati pure osservati, ma con difficoltà e non frequentemente.

Balanus eburneus (Gould) —. Anche in questa specie si trova lo strato perintestinale e risulta da elementi per lo più allungati e sottili.

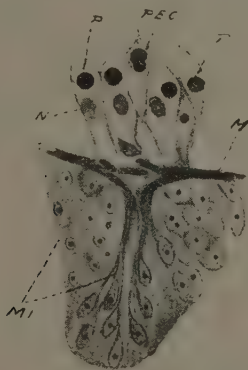


Fig. 4^a. — *Balanus eburneus*.

Sezione trasversale del mesointestino. MI = mucosa intestinale; M = muscolatura; N = nucleo; P = parasoma; PEC = parasoma emettente un corpuscola.

La loro caratteristica più importante è la costante presenza di un *parasoma* ben evidente, perfettamente sferico nella maggior parte dei casi, di dimensioni considerevoli, posto di regola nella regione apicale (fig. 4). Alcuni elementi posseggono due parasomi di dimensioni quasi eguali. Il parasoma è facilmente visibile anche nelle cellule che si trovano attorno allo stomaco, ed ai ciechi vicini.

I corpuscoli possono o no essere presenti. In genere sono piccoli, sferici e si colorano facilmente con *Ematossilina ferrica*. L'emissione di essi dal parasoma si può seguire nelle varie cellule con notevole facilità. È opportuno aggiungere, che in tutti gli esemplari di questa specie (fig. 4 PEC) che ho studiato, i caratteri della cellula perintestinale, del parasoma e dei corpuscoli, sono di una costanza veramente rilevante, sebbene sia risultato in modo evidente, dall'osservazione del contenuto intestinale, che i vari individui si trovavano in diversi momenti del processo digestivo.

Colorando con *Ematossilina Ehrlich* ed *Eosina*, il parasoma ed i corpuscoli, come in *B. perforatus* e *Balanus porcatus*, restano incolori.

Il nucleo, irregolarmente sferico, si osserva con qualche difficoltà e si presenta, fornito, per lo più, di nucleolo. Trovasi al di sotto del parasoma oppure, ma più di rado, nella regione distale.

Non si poté constatare la presenza degli altri organiti caratteristici della cellula perintestinale (*fibrille basali*, *granuli*, *vacuoli*).

Dalle presenti ricerche, che estendono e confermano quelle del Monterosso si possono trarre le seguenti conclusioni:

1° Lo strato perintestinale è presente in tutte le specie esaminate: *Balanus porcatus*, *B. trigonus*, *B. eburneus*.

2° Nelle cellule di questo strato si può considerare costante, o quasi, la presenza del parasoma.

3° La cellula perintestinale presenta in ogni specie particolarità morfologiche e strutturali diverse.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1927 (Anno V).

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Biologia. — *Termotropismo e costanti dei colpoidi*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾
del Socio Straniero A. L. HERRERA⁽³⁾.

I colpoidi si rassomigliano alle cellule mobili ed agli organismi microscopici per il loro termotropismo positivo: essi si avvicinano ad un radiatore situato a sinistra (fig. 1 *B*) strisciando e contorcendosi come anebe. Se il radiatore elettrico si porta a destra, essi cambiano ben presto di direzione (fig. 1 *A*). La scatola di Petri è perfettamente livellata come attesta il livello *n*. Questo effetto sorprendente è dovuto all'aumento dell'osmosi, alla maggiore intensità delle correnti che premono sulla membrana e delle reazioni chimiche nel lato più riscaldato. Come per gli esseri viventi non vi è alcuna forza vitale direttrice.

I colpoidi mostrano inoltre alcune costanti pseudo-fisiologiche: per poterle studiare si prepara una soluzione tipo di soda:

Soda caustica in cilindri di Merck	gr. 12
Acqua	» 100
Nero per sapone	» 1

(1) *Imitazione degli infusori*: vedi A. L. HERRERA, *Aspetti di lotta e di parassitismo nella imitazione degli infusori*, «R. Acc. Linc.», 1926, vol. IV, fasc. 9, pp. 343-348.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 agosto 1927.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto degli Alti Studi Biologici di Messico *D. F.*

Si prepara inoltre una soluzione tipo di gasolina (gr. 100) ed olio d'oliva recente gr. 30 ⁽¹⁾. Si fanno variare quindi le altre condizioni prendendo come fine dell'esperienza la paralizzazione dei movimenti degli ameboidi e dei colpoidi.

Per mantenere la temperatura ottima di 10° si circonda la scatola di Petri con ghiaccio. Gli errori e le irregolarità sono dovute alle difficoltà di cogliere esattamente la fine dei movimenti di tutti i colpoidi, ed alle variazioni inevitabili della viscosità dell'olio. Si mettono sempre 30 ccm³

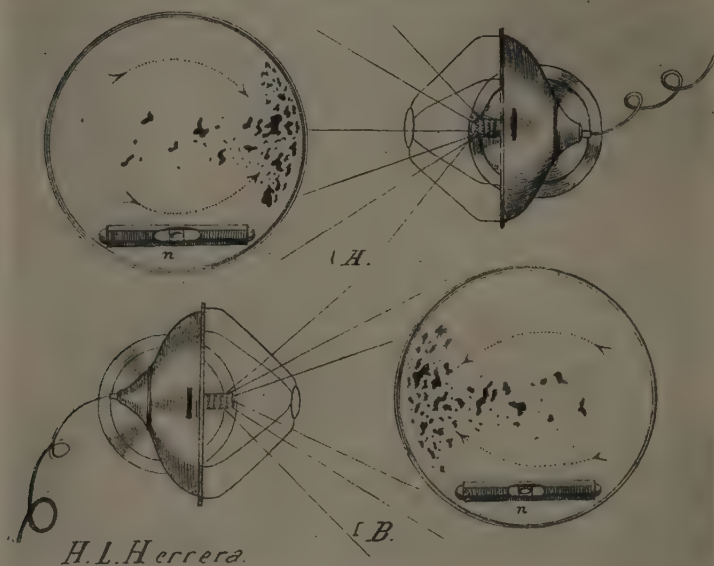


Fig. 1.

della soluzione d'olio e gasolina nella scatola di Petri e gr. 0.100 della soluzione di soda esattamente pesata. Ogni esperienza richiede una o due ore: l'insieme di quelle qui comunicate hanno durato alcuni mesi. Queste costanti imitano assai bene quelle delle amebe naturali ed altri organismi. Qui come altrove esiste una proporzionalità fra le forze fisico-chimiche ed i fenomeni studiati. I risultati possono essere rappresentati graficamente con delle curve (fig. 2, 3, 4, 5): ancora una volta i fatti della vita vengono riprodotti in laboratorio con grande approssimazione. Queste esperienze possono essere estese all'azione dei sali, della luce, elettricità ecc.

(1) L'olio d'oliva impiegato nelle mie esperienze viene acquistato da F. Betus e Fils di Bordeaux.

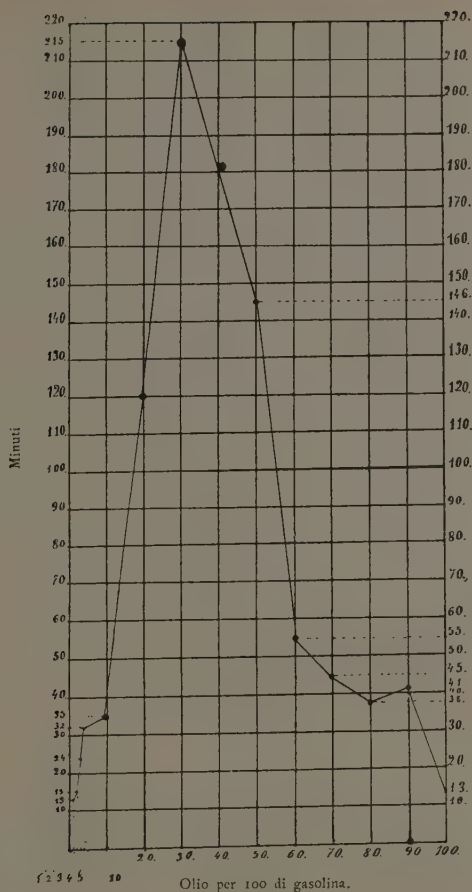


Fig. 2.

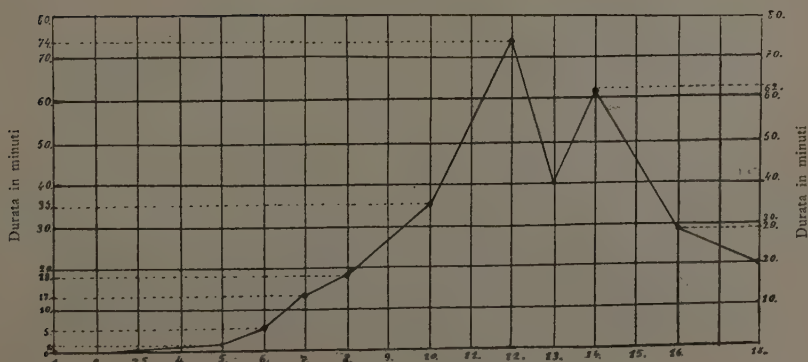


Fig. 3. - Azione della soda.

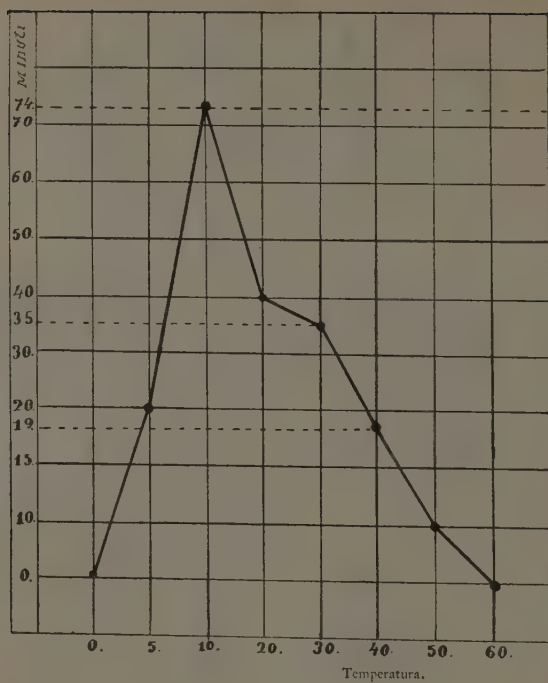


Fig. 4.

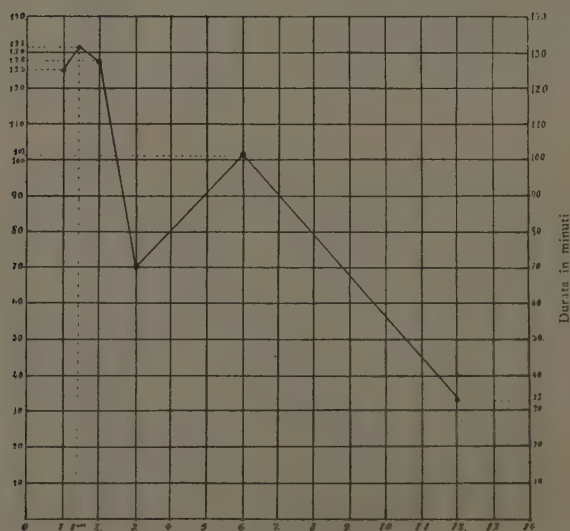


Fig. 5. - Azione del Lattosio.

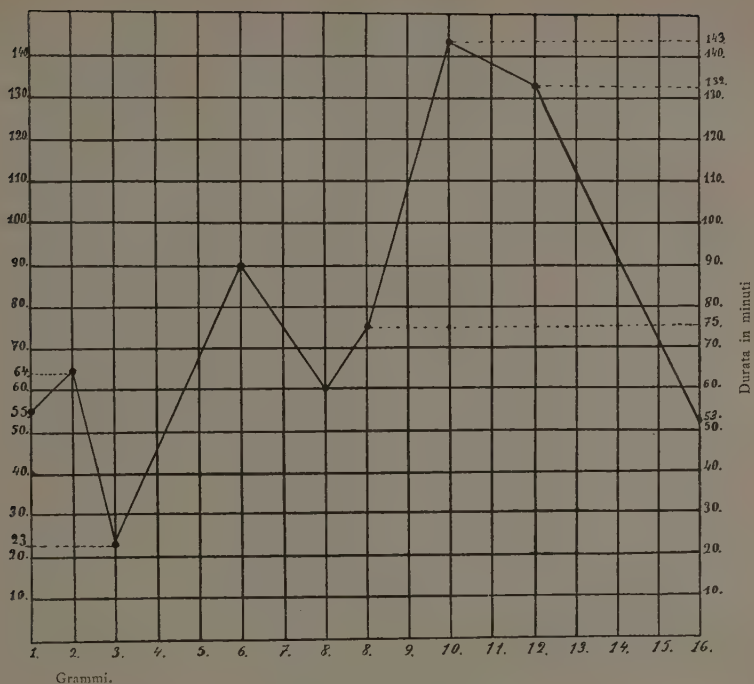


Fig. 6. — Azione della Gomma.

COSTANTI DEI COLPOIDI E AMEBOIDI.

N. dell'esperienza	Temperatura fig. 4	Durata dei movimenti in minuti	Osservazioni
5596	0°	0'	Come per gli esseri viventi i col- poidi sono sensibili ad una tem- peratura minima (0°) ad una massima (60°) e ad un'ottima (10°).
5599	5°	20'	
5600	10°	74'	
5602	20°	40'	
5603	30°	35'	
5605	40°	19'	
5606	50°	10'	
5607	60°	0'	

Olio (fig. 2).

N. dell'esperienza	Temperatura	Sostanza	Durata dei movimenti in minuti	Osservazioni
5612	10°	1	13	La quantità di gasolina è stata di 100 ccm ³ per tutte queste esperienze (5612-5634). Il rapporto preferibile è di 30 ccm ³ di olio d'olivo per 100 di gasolina. Con 10 di gasolina e 50 di olio la durata dei movimenti è di 25', attivissimi, i colpoidi, si succhiano avidamente in gruppi di 5 e 10 o più. Nei punti di succhiamento si osservano delle crepe come degli avallamenti della pellicola oleosa.
5613	10°	2	15	
5614	10°	3	24	
5615	10°	4	32	
5616	10°	10	35	
5620	10°	20	120	
5621	10°	<u>30</u>	<u>215</u>	
5623	10°	40	180	
5628	10°	50	146	
5629	10°	60	55	
5630	10°	70	45	
5632	10°	80	38	
5633	10°	90	41	
5634	10°	100	13	

Gomma arabica (fig. 6).

5654	10°	1	55	Al disopra di 16 gr. per 100 della soluzione tipo di soda è inutile aggiungere altra gomma. I colpoidi in movimento l'espellono sotto forma di un tubo membranoso. La dose più conveniente è di 10 gr. di gomma arabica polverizzata per 100 della soluzione di soda tipo.
5656	10°	2	64	
5657	10°	3	23	
5659	10°	6	90	
5660	10°	8	60	
5670	10°	8	75	
5673	10°	<u>10</u>	<u>143</u>	
5678	10°	12	132	
5681	10°	16	53	

Soda (fig. 3).

5641	10°	1	0	La proporzione più conveniente di soda è di 12 per 100 di acqua e 1 gr. di nero per sapone. È la soluzione tipo, base di tutte le esperienze.
5642	10°	2	0	
5642 bis	10°	3.5	0	
5642 bis	10°	5	0	

Segue Soda (fig. 3).

N. dell'espe- rienza	Temperatura	Sostanza	Durata dei movimenti in minuti	Osservazioni
5643	10°	6	5	
5645	10°	7	13	
5645	10°	8	18	
5645	10°	10	35	
5645	10°	12	74	
5647	10°	13	40	
5649	10°	14	62	
5651	10°	16	29	
5652	10°	18	20	

Lattosio (fig. 5).

5685	10°	1	125	La dose preferibile è di 1.400 per 100 di soluzione tipo di soda. Il lattosio aumenta la pressione osmotica e produce colpoidi enormi a forma di ferro di cavallo che si succhiano alle loro estremità.
5688	10°	1.400	131	
5689	10°	2	128	
5690	10°	3	70	
5691	10°	6	101	
5693	10°	12	33	

Albumina.

5698	10°	0.200	88	L'ovoalbumina di Merck polverizzata aumenta troppo la viscosità dei colpoidi e rallenta i loro movimenti. Dopo 24 ore i colpoidi come nuclei cellulari emettono dei cordoni albuminici, come del protoplasma.
5700	10°	0.400	60	
5704	10°	0.500	52	
5706	10°	1	38	
5707	10°	2	38	
5708	10°	4	28	

Bisognerà fare ancora numerose esperienze per ben comprendere l'azione degli agenti e delle diverse sostanze sui colpoidi colle variazioni della tensione superficiale, pressione osmotica, viscosità, peso, effetti elettro-capillari ecc.

Patologia vegetale. — *Ulteriori ricerche sull'applicazione dell'analisi fluoroscopica ai tessuti vegetali normali e patologici.* Nota ⁽¹⁾ del Socio Corrisp. L. PETRI.

La prosecuzione delle ricerche sull'applicazione del metodo d'analisi fluoroscopica ai tessuti vegetali normali e patologici mi ha permesso di chiarire e completare alcuni dei risultati già accennati nelle precedenti pubblicazioni da me fatte su questo argomento.

L'estratto alcoolico di clorofilla, carotina e xantofilla da foglie uccise con acqua bollente, contiene sempre una parte della sostanza fotoluminescente, contrariamente a quanto avevo ritenuto in una prima serie di ricerche. La presenza della sostanza in questione è nascosta all'analisi fuoroscopica, dalla particolare fluorescenza rosso-bruna della clorofilla ed anche nell'estratto acquoso, ottenuto dalla soluzione alcoolica bruta di clorofilla, la ricerca riesce spesso negativa a causa della tenue sospensione di clorofilla che si stabilisce nello stesso estratto acquoso. Separando con benzolo la clorofilla dalla carotina e dalla xantofilla, si può esstrarre con l'acqua dalla soluzione alcoolica di queste due sostanze il composto a luminescenza azzurro-violacea.

Giacchè l'estrazione di questa sostanza con l'alcool dai tessuti non è così rapida ed abbondante come avviene con l'acqua, così dall'estratto alcoolico di carotina non se ne ottiene che una piccola quantità e ciò spiega il risultato negativo delle prime ricerche eseguite su estratto alcoolico poverissimo della sostanza eccitabile dai raggi ultravioletti. Circa la natura chimica di quest'ultima, i tentativi per isolarla in una dose che permettesse di studiarne i caratteri qualitativi, non hanno raggiunto per ora risultati soddisfacenti, ma applicando l'analisi fluoroscopica, secondo il metodo descritto altra volta, a numerosi composti vegetali organici, ho potuto constatare che la sostanza in questione non può esser riferita che al gruppo, numeroso ed estremamente diffuso nelle piante, dei glucosidi.

A questo riferimento non solo ha condotto l'analisi fluoroscopica comparativa della sostanza in questione e di alcuni glucosidi notoriamente dotati di una ben marcata fluorescenza, ma anche il fatto che tanto l'elevata temperatura (170° C a secco) come l'azione dell'acido solforico diluito e degli alcali non alterano la proprietà di emettere radiazioni luminose sotto l'eccitazione dei raggi ultravioletti. Questa relativa stabilità del gruppo fluorogeno e la solubilità della sostanza nell'acqua e nell'alcool, l'azione riducente

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1927.

ottenuta in alcune prove fatte su carta da filtro, in cui per diffusione capillare erasi isolata la sostanza stessa, lasciano il convincimento che si tratti effettivamente di un glucoside, e molto probabilmente, di un gruppo di glucosidi, giacchè è presumibile che esistano delle differenze di natura chimica e fisica, nelle diverse piante, relativamente alla sostanza fotoluminescente, come del resto risulta anche dall'analisi spettroscopica delle radiazioni emesse dai fotogrammi di foglie di piante diverse. Ricerche spettroscopiche preliminari dimostrano infatti che rispetto allo spettro dato dalla luminescenza azzurro-violetta della esculina pura, gli spettri del fotogramma delle foglie di *Olea europaea*, di *Nerium oleander*, di *Poa* sp. e di *Plantago major*, sono costituiti da radiazioni di una lunghezza d'onda leggermente minore. Inoltre lo spettro relativo alle foglie di olivo si presenta discontinuo con tre linee d'assorbimento, mentre gli spettri relativi alle altre piante suddette e all'esculina pura appaiono continui.

L'applicazione dell'analisi fluoroscopica ai succhi estratti per diffusione capillare dai tessuti vegetali presenta dunque il vantaggio di porre in evidenza, in modo rapido e facile, i glucosidi, o altre sostanze affini, fotoluminescenti, e i risultati ottenuti sino ad ora permettono di ritenere che queste sostanze, nelle piante provviste di clorofilla, sieno molto più diffuse di quanto potevasi credere; anzi è molto probabile che le ulteriori ricerche, estese a numerosissimi rappresentanti delle più diverse famiglie, dimostrino come un carattere costante dei tessuti verdi, o capaci di formare clorofilla nei loro plastidi, la presenza di simili sostanze.

Molto interessante a questo riguardo è il fatto di aver ottenuto un risultato positivo con le alghe cloroficee unicellulari, nelle quali, il processo della fotosintesi costituendo la parte preponderante dell'attività vitale dell'organismo, la presenza costante di sostanze fluorescenti, oltre alla clorofilla, rende presumibile qualche funzione utile che queste abbiano nelle reazioni fotodinamiche che intervengono nel processo di captazione e di utilizzazione dell'energia luminosa. La proprietà d'intercettare le radiazioni più rifrangibili dello spettro ha fatto considerare i glucosidi e altri composti dotati di fluorescenza, come mezzi di protezione della clorofilla e del citoplasma contro l'azione dannosa di queste stesse radiazioni. Una simile interpretazione è senza dubbio in accordo anche con la localizzazione di queste sostanze nei tessuti periferici degli organi aerei delle piante superiori; ma ciò non esclude che fra una parte delle sostanze fluorescenti e il citoplasma o il plasma dei plastidi esistano dei legami tali da rendere possibile una reazione fotodinamica. Il fatto che in alcune piante (alghe, conifere) non si trovano grandi quantità libere di tali sostanze e che la loro estrazione può avvenire soltanto con l'aiuto di un alcali o di un acido, è in appoggio all'ipotesi che esse contraggano legami con gli albuminoidi del plasma.

Questa possibilità acquista un interesse generale se considerata in relazione a tutti i processi fisiologici, nei quali l'attività cellulare viene eccitata

dalle radiazioni luminose. Un particolare interesse presenta poi la questione se questa viene considerata dal punto di vista della patologia vegetale.

La costatazione, rilevata anche dal Gola⁽¹⁾, che i glucosidi a proprietà spiccatamente fluorescenti non sono dannosi ai tessuti che li contengono, corrisponde al vero per tutti i tessuti nei quali la sostanza fluorescente è contenuta in cellule nelle quali il citoplasma è ridotto al minimo e si trova in uno stato di vitalità estremamente attenuata o completamente esaurita, ma non si può escludere la possibilità di reazioni fotochimiche dannose quando la sostanza eccitabile dalle radiazioni più rifrangibili dello spettro entri in particolare combinazione con alcuni costituenti del plasma.

Una simile questione ha una grande importanza nello studio del processo di necrosi che nelle foglie è prodotta dall'illuminazione eccessiva in generale e dal così detto *colpo di sole* in particolare.

Una delle condizioni già posta in evidenza dal Gola, e che rende possibile un'azione fotolitica nel caso d'illuminazione sopraottimale, è costituita dalla penuria d'acqua dei tessuti esposti alla luce. Nel caso delle necrosi, prodotte in natura dalla luce diretta del sole, una simile condizione è determinata dalle radiazioni stesse che, elevando rapidamente la temperatura del tessuto, provocano un'eccessiva perdita d'acqua per traspirazione, per cui la luce agisce su cellule in parte plasmolizzate⁽²⁾.

Non è bene stabilito se la semplice disidratazione del plasma, e quindi anche del complesso fotodinamico, possa rendere maggiore l'intensità dell'azione di quest'ultimo oltre un limite di tolleranza, o possa esaltare la sensibilità del plasma stesso, oppure ne diminuisca la resistenza all'azione fotolitica⁽³⁾. In relazione forse alla prima questione, presenta un certo interesse il fatto che l'intensità della luminescenza dei campi di diffusione capillare di succhi fogliari su carta da filtro, sotto l'eccitazione della luce di Wood, è minore in alcuni casi quando la carta è bagnata, e raggiunge un massimo quando l'acqua è del tutto evaporata. Il fatto è forse in relazione al numero maggiore di molecole della sostanza che nell'unità di superficie si trovano esposte all'energia eccitatrice e quindi a un più gran numero di elettroni che, secondo la teoria di Bohr, subiscono uno spostamento di orbita nell'unità di tempo.

(1) GOLA G., *La luce come fattore antagonista della vita vegetale*, in «Atti della Società Italiana per il progresso delle Scienze», 1925.

(2) L'intervento della luce, del calore e dell'eccessiva traspirazione nella produzione delle necrosi per l'azione dei raggi solari sulle foglie è stato posto bene in evidenza anche dalle ricerche di LUTMAN in «Phytopathology», XII, 1922, p. 305.

(3) Le recenti esperienze della Moldenhauer-Broocks («Protoplasma» I, 1926, p. 305), sugli effetti della luce di differenti lunghezze d'onda sulla permeabilità della cellula vivente, sono pure da prendersi in considerazione nelle ricerche sulla possibile azione dannosa della luce.

Facendo evaporare l'acqua dal campo di diffusione capillare mediante l'innalzamento della temperatura, lo spettro delle radiazioni visibili, emesse dal campo stesso allo stato secco, si sposta sul violetto ⁽¹⁾.

Il tentativo di misurare l'intensità delle radiazioni emesse dalla superficie di un campo di diffusione capillare di succhi fogliari sotto l'eccitazione della luce di Wood, adoperando il metodo elettroscopico, non ha dato risultati soddisfacenti, essendo molto più sensibile ed esatto il metodo fotografico. Per applicare il metodo elettroscopico, la carta da filtro, su cui per capillarità si era diffuso il succo estratto dalle foglie, veniva posta, inclinata di 45°, in una camera di ionizzazione verticale, munita alla sommità di un elettroscopio molto sensibile, e lateralmente di un'apertura rettangolare chiusa da una lamina di quarzo, attraverso la quale penetravano le radiazioni ultraviolette. La velocità di scarica dell'elettroscopio venne seguita tanto quando nella camera d'ionizzazione era stata posta della carta da filtro pura, come quando quest'ultima era sostituita dal campo di diffusione capillare dei succhi fogliari. Naturalmente era stata determinata in precedenza la perdita a vuoto e l'ordine delle determinazioni successive venne invertito in due serie di esperienze.

Il risultato di questi tentativi ha dimostrato che le radiazioni emesse sotto l'eccitazione dei raggi ultravioletti hanno un potere ionizzante dell'aria inapprezzabile.

Molto interessante è il fatto che i fotogrammi di tessuti fogliari necrosati dalla luce solare o dai raggi ultravioletti presentano alla luce di Wood una zona anulare luminescente ristretta e di una luminosità poco intensa, mentre i fotogrammi di tessuti fogliari necrosati da gas tossici (SO_2) mostrano una zona luminescente molte volte più larga e con radiazioni intense.

Le esperienze sono state eseguite con foglie ustionate tanto artificialmente che in piena aria. Le necrosi con luce artificiale (raggi ultravioletti a bassa temperatura) vennero prodotte su foglie eziolate per eliminare l'azione fotolitica della clorofilla.

(1) Nel caso quindi di ricerche fluoroscopiche comparative, il disseccamento dei diversi campi di diffusione capillare deve avvenire in condizioni rigorosamente eguali per tutti.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla quadratura delle superficie piane e curve.*
Nota⁽¹⁾ di R. CACCIOPOLI, presentata dal Socio Corrispondente
G. SCORZA.

Tenterò, in questa breve Nota, di stabilire i principî di una teoria della misura delle superficie piane e curve, e più generalmente delle varietà a due o più dimensioni immerse in uno spazio lineare.

La risoluzione del problema della quadratura delle superficie, formulato in tutta la sua estensione da Lebesgue⁽²⁾, è in parte almeno, come ogni processo di estrapolazione, governata dall'arbitrio. Si tratta in sostanza di prolungare un funzionale oltre il suo primitivo campo di definizione (superficie poliedriche, superficie della geometria elementare, più generalmente superficie *regolari*).

Una prima limitazione si consegue, osservando che il funzionale in quistione è inferiormente semicontinuo, con l'imporre che si conservi questa proprietà: nasce così, fra le definizioni possibili, quella proposta da Lebesgue.

Adotterò quest'ultima per le superficie piane (chiamo qui *superficie piana* una qualunque regione del piano, comunque deformata e ripiegata su se stessa, analiticamente rappresentata da due equazioni parametriche), per le quali essa è imperiosamente suggerita dall'intuizione geometrica. Giungerò così alle definizioni di area di una porzione qualunque di superficie piana, ed infine di *elemento d'area*. A questo punto mi sembra si presenti spontanea una definizione dell'elemento d'area di una superficie curva (immersa in uno spazio lineare a tre o più dimensioni) analoga a quella che si dà per le superficie regolari. Definirò pertanto l'area di una superficie come l'integrale (di Stieltjes) dell'elemento d'area.

Accennerò brevemente, per ultimo, alle estensioni, del resto immediate, dei procedimenti esposti, alle varietà a più di due dimensioni.

La teoria di cui mi propongo qui tracciare uno schema è la naturale estensione di quella delle curve rettificabili; come quest'ultima sulle nozioni di funzione di una variabile a variazione limitata e assolutamente continua, essa si fonda su quelle di *coppia di funzioni di due variabili* a variazione limitata e assolutamente continua.

Degli sviluppi che questa trattazione esige e delle quistioni che solleva spero potermi occupare in qualche lavoro più esteso.

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 agosto 1927.

(2) *Intégrale, longueur, aire* (« Annali di Matematica », 1902) Ch. IV.

1. L'insieme di un numero finito di triangoli del piano xy , a due a due privi di punti interni comuni, sarà qui chiamata una *rete triangolare* del piano xy o più brevemente una *rete*.

Una funzione delle due variabili x ed y , definita nei punti di una rete, e lineare in ognuno dei triangoli di questa, sarà detta *quasi-lineare*.

Due funzioni continue $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ essendo definite in un dominio D , si dirà che le equazioni

$$(a) \quad X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y)$$

definiscono una *superficie piana* S , contenuta nel piano XY , e di cui D è il *dominio base*.

La superficie S non deve identificarsi con l'insieme dei punti (X, Y) che le appartengono; due suoi punti riguardandosi come distinti fra loro, anche se coincidono sul piano XY , sempre che mediante le formole (a) essi corrispondano a due punti distinti del piano xy .

Se il dominio base D è una rete in cui ambo le funzioni φ e ψ sono quasi-lineari, la superficie S è una *superficie poliedrica* (piana). L'area di questa, cioè la somma delle aree dei triangoli del piano XY corrispondenti mediante le (a) a quelli della rete, sarà detta la *variazione totale della coppia* (φ, ψ) .

2. Sia I un insieme aperto del piano xy , contenuto in un dominio rettangolare R ; in I siano definite due funzioni continue $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$. Decomponiamo arbitrariamente R in un numero finito di triangoli non sovrapponentisi, e diciamo Σ la rete costituita dai triangoli interni ad I , f e g due funzioni continue quasi-lineari in Σ . Al tendere a zero del massimo fra i lati dei triangoli in cui è decomposto R , la rete Σ invade l'insieme aperto I , ogni punto del quale finisce dunque con l'appartenere definitivamente al dominio di definizione di f e g . Possiamo così, definendo opportunamente f e g , farle tendere in infiniti modi alle date funzioni φ e ψ rispettivamente.

La variazione totale della coppia quasi-lineare (f, g) avrà un limite massimo ed un limite minimo, e si dimostra agevolmente che il primo è sempre l'infinito. Se il minimo limite è finito, lo chiameremo la *variazione totale della coppia* (φ, ψ) in I . La coppia sarà allora a *variazione limitata*.

Le funzioni continue φ e ψ siano ora definite in un dominio D , e sia I l'insieme dei punti interni a D . Se la coppia (φ, ψ) è a variazione limitata in I , definiremo come *area* (o meglio come *area interna*⁽¹⁾) della superficie piana S rappresentata dalle equazioni parametriche (a) la variazione totale della coppia (φ, ψ) . Avrà dunque S area finita se (φ, ψ) è a variazione limitata.

La variazione totale della coppia (φ, ψ) è, come si riconosce subito, un funzionale semicontinuo inferiormente.

(1) V. LEBESGUE, loc. cit.

3. Se la coppia (φ, ψ) è a variazione limitata nell'insieme aperto I , lo è pure, evidentemente, in qualunque insieme aperto E contenuto in I . La variazione totale, in E , di (φ, ψ) è una funzione additiva di insieme aperto, che indicheremo con $V(E)$. Si dimostra facilmente che V è funzione *continua*, con che intendiamo che si ha sempre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(E_n) = V(E),$$

quando la successione degli insiemi E_n invade E .

La funzione additiva V si lascia pertanto estrapolare nel campo di tutti gli insiemi di Borel contenuti in I ⁽¹⁾. Conseguiamo così la definizione di variazione totale della coppia (φ, ψ) sovra un qualunque dominio di I ; e quindi quella dell'area di una porzione della superficie S rappresentata dalle equazioni (a). Più precisamente, se D' è un dominio interno al dominio base D , e I' è l'insieme dei punti interni a D' , e $V(I')$ sarà l'*area interna* della porzione di S avente per dominio base D' , e $V(D')$ ne sarà l'*area esterna*.

La coppia (φ, ψ) sarà detta *assolutamente continua* se tale è la funzione V . In questo caso la porzione di S corrispondente ad un dominio D' *quadrabile* (cioè avente frontiera di misura nulla) avrà eguali le due aree esterna ed interna.

Una coppia quasi-lineare è sempre assolutamente continua.

Nel seguito, parlando di *area* di una superficie, alluderemo sempre all'area interna.

4. Abbiamo sin qui definita soltanto la variazione totale di una coppia, e considerato nella valutazione delle aree l'elemento di superficie come essenzialmente positivo. Si potrebbero ora definire per una coppia a variazione limitata le variazioni *positiva* e *negativa*, e conseguentemente sceverare nell'area totale di una porzione di superficie la parte positiva da quella negativa. Ma non ci soffermeremo su queste altre nozioni, che qui non occorrono.

5. Abbiamo visto come ad una coppia di funzioni a variazione limitata (φ, ψ) , definita in I , si associa una funzione V , additiva e non negativa, degli insiemi di I . Come è ben noto, questa funzione ammette quasi ovunque la derivata $\frac{dV}{dI}$.

Si dimostra agevolmente che in ogni punto in cui φ e ψ hanno derivate continue, esiste $\frac{dV}{dI}$ ed è eguale al valore assoluto del jacobiano di φ e ψ . Ma V può essere derivabile in un punto senza che vi esista questo jacobiano.

(1) V. la mia Nota *Sulle funzioni additive d'insieme* (« Rend. Acc. Napoli », giugno 1927).

Scriveremo in generale

$$\frac{dV}{dI} = \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \right|,$$

designando con la notazione a secondo membro quella che chiameremo la *derivata*, o piuttosto la *derivata assoluta*⁽¹⁾ della coppia (φ, ψ) . Questa derivata rappresenta come una generalizzazione del valore assoluto del jacobiano, e può esistere anche mancando qualcuna delle derivate di φ e di ψ .

Per esempio, posto

$$\varphi = x + f(y) \quad , \quad \psi = x + y + f(y),$$

dove f è una funzione continua ovunque priva di derivata, non esistono mai $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, eppure si ha in ogni punto, secondo la definizione precedente

$$\left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \right| = 1,$$

e la coppia (φ, ψ) è assolutamente continua.

Tornando al caso generale, possiamo scrivere la disuguaglianza

$$\text{area } S \cong \iint \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \right| dx dy,$$

in cui sussisterà il segno $=$ solo se la coppia (φ, ψ) è assolutamente continua.

La definizione di derivata di una coppia di funzioni potrebbe anche darsi direttamente, e completarsi mediante la determinazione del segno; ma su ciò non insisteremo.

6. Sia ora S una superficie dello spazio ordinario, rappresentata dalle equazioni parametriche

$$(b) \quad x = \varphi(u, v) \quad , \quad y = \psi(u, v) \quad , \quad z = \chi(u, v),$$

essendo φ, ψ, χ , tre funzioni continue nel dominio D del piano uv (dominio base di S).

La superficie S si proietta sui piani coordinati yz, zx, xy , rispettivamente in tre superficie piane S_1, S_2, S_3 , rappresentate dalle equazioni (b) prese a due a due. Diremo che S ha area finita se hanno area finita queste sue tre proiezioni. Le tre coppie $(\psi, \chi), (\chi, \varphi), (\varphi, \psi)$ sono allora a variazione limitata; siano V_1, V_2, V_3 le tre funzioni additive d'insieme ad esse associate.

Nasce ora qui spontaneamente l'idea di definire, come suggerisce l'intuizione geometrica nel caso delle superficie regolari, l'*elemento* di S

(1) Così come, per una funzione di una variabile, in ogni punto in cui le derivate destra e sinistra hanno lo stesso valore assoluto, questo potrebbe chiamarsi «derivata assoluta».

quale quello che ha per proiezioni sui piani coordinati i corrispondenti elementi di S_1, S_2, S_3 ; cioè di definire la funzione additiva d'insieme V che rappresenta l'area di una porzione qualunque di S ponendo

$$dV = \sqrt{dV_1^2 + dV_2^2 + dV_3^2}.$$

Questa formola traduce simbolicamente la seguente definizione:

Decomposto l'insieme I dei punti interni a D negli insiemi H_1, H_2, \dots, H_n , formiamo la somma

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{V_1^2(H_i) + V_2^2(H_i) + V_3^2(H_i)};$$

il limite cui tende questa somma al tendere a zero del massimo fra i diametri degli insiemi H sarà l'area (interna) della superficie S .

Analogamente si determina l'area di una porzione di S avente un qualunque dominio base, ed in generale il valore di V sopra un qualunque insieme di Borel contenuto in I .

Si ha quasi ovunque

$$\frac{dV}{dI} = \sqrt{\left(\frac{dV_1}{dI}\right)^2 + \left(\frac{dV_2}{dI}\right)^2 + \left(\frac{dV_3}{dI}\right)^2},$$

donde

$$\text{area } S \equiv \iint_I \sqrt{\left|\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(u, v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}\right|^2} du dv,$$

sussistendo il segno \equiv solo quando tutt'e tre le coppie $(\psi, \chi), (\chi, \varphi), (\varphi, \psi)$ sono assolutamente continue, ed in particolare quando le funzioni φ, ψ, χ ammettono derivate prime continue, nel qual caso si ritrova la classica formola che dà l'area di una superficie regolare.

Si vede subito che l'area, come l'abbiamo definita, di una superficie è un funzionale semicontinuo inferiormente.

6. È immediata l'estensione dei risultati precedenti alle superficie immerse in uno spazio lineare ad n dimensioni. Occorrerà semplicemente considerare, anzichè tre, $\frac{n(n-1)}{2}$ proiezioni ed altrettante coppie di funzioni.

E con altrettanta facilità si estende la teoria esposta alle varietà a più di due dimensioni. In generale, per le varietà ad n dimensioni si introdurranno i concetti di *n-tupla di funzioni di n variabili a variazione limitata e assolutamente continua*.

Per esempio, una varietà a tre dimensioni immersa in uno spazio a quattro dimensioni è definita da quattro funzioni di tre variabili. Ove le quattro terne formate con queste funzioni siano a variazione limitata, la varietà avrà volume finito.

Matematica. — *Sulle funzioni di varietà vettoriale.* Nota di D. GRAFFI presentata dal Socio Corrisp. P. BURGATTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sopra l'influenza dei fori nella sollecitazione elastica delle lastre.* Nota di G. SUPINO, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In due Note, recentemente pubblicate in questi « Rendiconti »⁽²⁾, il dott. ing. G. KRALL determina la funzione di Green (o più precisamente le due funzioni di Green che interessano maggiormente la teoria della elasticità) spettante ad un contorno piano più volte connesso supponendo nota la funzione relativa allo stesso contorno esterno privato dei fori interni. Tra le conseguenze di questa determinazione è notevole il corollario seguente:

In una lastra forata la deformazione elastica tende a confondersi con quella spettante, *ceteris paribus*, alla stessa lastra priva di fori, quando le dimensioni di questi tendono a zero. Occorre tenere ben presente il procedimento che conduce a questo risultato e i conseguenti suoi limiti di validità se non si vogliono commettere errori di interpretazione.

Infatti se, per fissare le idee, si considera la lastra con un foro α e, sul contorno di questo si fissa un punto P che si mantiene sul contorno quando il foro tende a zero, allora *non* si può asserire che per α tendente a zero la sollecitazione in P tenda a quella della lastra non forata. Numerosi esempi, che confermano un comportamento eccezionale della lastra con questi punti, sono stati ricercati dagli ingegneri per determinare l'influenza delle chiodature nelle costruzioni⁽³⁾; un esempio semplice in proposito è il seguente. Si consideri una corona circolare di raggi R e R' rispettivamente esterno ed interno, soggetta su R (si intende sulla circonferenza di raggio R) a forze normali, di intensità costante k (mentre su R' non vi sono forze applicate). La funzione di Airy è, in questo caso,

$$F = \frac{kR^2}{2(R^2 - R'^2)} (r^2 - 2R'^2 \log r)$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1927.

(2) Cfr. G. KRALL, *Sulle funzioni di Green in campi pluriconnessi e l'variazione infinitesima delle funzioni di Green relative a campi piani pluriconnessi.*

(3) Cfr. KIRSCH, « Zeitschrift de Ver. Deut. Ing. » (1898); WOLF, « Zeitschr. für Technische Physik » (1921); SUPINO, « Circolo Mat. di Palermo » (1927).

e quindi le componenti di tensione (in coordinate polari r, θ e coi soliti simboli) valgono:

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \frac{kR^2}{R^2 - R'^2} \left(1 - \frac{R'^2}{r^2} \right), \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{kR^2}{R^2 - R'^2} \left(1 + \frac{R'^2}{r^2} \right), \\ \tau_{r\theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = 0. \end{cases}$$

Dato un punto P su R' si ha ($r = R'$)

$$[\sigma_\theta]_P = \frac{2kR^2}{R^2 - R'^2}, \quad [\sigma_r]_P = 0,$$

cioè, al tendere a zero del foro, $[\sigma_\theta]_P$ tende a $2k$ mentre se il foro non vi fosse, in qualunque punto della lastra circolare soggetta al contorno a forze normali, costanti, si avrebbe $\sigma_\theta = \sigma_r = k$.

La divergenza col risultato del Krall dipende dal fatto che P si mantiene al contorno del foro; se P resta fisso [$r = \text{cost}$] mentre il foro tende a zero [$R' \rightarrow 0$] allora le (1) mostrano chiaramente che σ_r e σ_θ tendono, in P, a k come nel caso della lastra circolare.

Effettivamente il Krall ha stabilito il suo risultato con un passaggio al limite eseguito in questo ultimo modo, sicchè le sue conclusioni sono valide prescindendo da differenze di carattere locale che si manifestano sul foro (1). Ma allora si può rendere intuitivo, in modo meccanicamente espressivo, l'enunciato considerando una lastra soggetta comunque a forze in equilibrio; si stabilisce così un determinato stato di sollecitazione, che non viene alterato, quando nella lastra si pratici un foro, purchè al contorno di esso si applichino le tensioni che prima si esercitavano contro la materia asportata. Ma poichè le forze esterne sono in equilibrio, così sono nulli anche la risultante e il momento di tutte le tensioni agenti sul foro; in tal caso basta ricordare il postulato del De Saint-Venant per concludere che quando il foro è molto piccolo la presenza delle tensioni applicate sul foro ha influenza trascurabile in punti sufficientemente distanti dal foro stesso.

Il Krall arriva a questa conclusione con rigoroso procedimento analitico; e, poichè non si serve del postulato del De Saint-Venant, le sue conclusioni possono essere considerate come una *verifica* del postulato stesso.

(1) La stessa osservazione vale per gli altri casi più semplici trattati dal Krall tra i quali si deve ricordare la determinazione di una funzione armonica relativa ad un contorno più volte connesso.

Idrodinamica. — *Osservazioni sui moti di un fluido nei quali è stazionaria la distribuzione del vortice.* Nota di A. MASOTTI, presentata dal Socio Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Ottica. — *Sulla distorsione: interpretazione nuova di una vecchia esperienza.* Nota ⁽¹⁾ del prof. V. RONCHI, presentata dal Socio A. GARBASSO.

La distorsione delle immagini ottiche si suol mettere in evidenza con un esperimento ormai classico. Un'ampia rete a maglie quadrate, disegnata sopra un vetro smerigliato e illuminato intensamente, costituisce l'oggetto di cui deve formare l'immagine un sistema ottico provvisto di forte aberrazione sferica, come una lente convergente semplice, di apertura notevole. L'immagine nel piano coniugato, secondo la omografia Gaussiana, di quello oggetto è talmente confusa che non vi si vede nulla o tutt'al più qualche cosa nella regione parassiale. Prende invece un aspetto assai distinto in tutto il campo quando si interponga uno stretto diaframma prima o dopo della lente; vi è però distorsione e precisamente a cuscinetto quando il diaframma è fra la lente e lo schermo, a barile quando il diaframma è davanti alla lente; in entrambi i casi poi, la distorsione stessa aumenta col crescere della distanza fra lente e diaframma e si annulla quando questa è zero (il che equivale a diaframmare strettamente la lente).

La spiegazione di tutto ciò è così semplice e nota che appena la accenniamo. Quando tutta la apertura della lente è libera, sullo schermo si sommano per così dire un'infinità di immagini elementari diverse, dovute alle varie zone della lente. Un diaframma interposto sul cammino della luce, fa sì che alla formazione di un elemento di immagine concorra soltanto una piccola porzione di lente, variabile colla posizione del punto oggetto nel piano di questo e del diaframma lungo l'asse. Data la notevole profondità di fuoco, l'immagine si forma assai nitida anche in un sol piano per tutte le zone; ma l'ingrandimento varia dall'orlo al centro con una legge o coll'inversa (cioè si ha distorsione a barile o a cuscinetto) a seconda della posizione del diaframma prima o dopo della lente ⁽²⁾.

*
* *

A questa esperienza se ne suole avvicinare un'altra, che sembra possedere molta analogia. Guardando una struttura reticolare attraverso una

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1927.

(2) Cfr. P. DRUDE, *Précis d'Optique*, p. 89, Gauthier-Villars, Paris, 1911. Cfr. H. BOUASSE, *Opt. Géom. Supér.*, p. 222, Delagrave, Paris, 1917.

lente affetta da notevole aberrazione sferica (come la precedente), si osserva una forte distorsione variabile ancora secondo la posizione rispetto alla lente dell'occhio e dell'oggetto. Quando questo si trova così vicino alla lente, che l'immagine è virtuale, la distorsione è a cuscinetto; ma se l'oggetto si pone al di là del fuoco e l'occhio più lontano dalla lente che non l'immagine reale, si ha distorsione a barile; avvicinando l'occhio alla lente la distorsione aumenta, diventa assai complessa e si trasforma in distorsione a cuscinetto. Il massimo della distorsione e l'inversione del tipo si hanno quando l'occhio dista dalla lente quanto l'immagine reale del reticolo.

Sulla spiegazione di questa seconda esperienza generalmente si sorvola; si ritiene che la pupilla dell'occhio funzioni da diaframma e si considera il tutto come una riproduzione, in condizioni diverse, dell'esperienza precedente. Siccome poi qui la distorsione cambia tipo col diaframma sempre dalla stessa parte della lente, qualcuno vorrebbe sostituirlo colla sua immagine. Il Bouasse fa notare che ciò non è giusto perchè le stesse aberrazioni a cui si deve la distorsione fanno dare non una ma infinite immagini del diaframma. Però lo stesso Bouasse non propone altra spiegazione del fenomeno.

*
* *

Vogliamo ora dimostrare che le due esperienze sono essenzialmente diverse in modo che la seconda non può esser considerata come la ripetizione della prima in condizioni sperimentali variate.

Intanto per la prima, fissata la posizione dell'oggetto e della lente, la distorsione cresce al crescere della distanza tra il diaframma e la lente; si inverte quando diaframma e lente coincidono, e la inversione avviene attraverso il valore zero della distorsione.

In ogni caso un elemento di immagine è tanto più deformato quanto maggiore è la sua distanza dall'asse ottico.

Questa distorsione è così definita: a un punto del piano oggetto di coordinate polari ρ e θ (col polo sull'asse ottico) corrisponde un punto sul piano immagine di coordinate ρ' e θ , che ha la stessa coordinata azimutale per ragioni di simmetria. Fra i raggi vettori esiste invece una relazione che può essere qualunque, ma si può mettere in generale sotto la forma

$$\rho' = a^2 \rho \pm b^2 \rho^2$$

quando la si sviluppi in serie e ci si arresti ai primi due termini. La distorsione a cuscinetto si ha per $b^2 > 0$ e quella a barile per $b^2 < 0$; per $b = 0$ si ha l'immagine ortoscopica. Una volta fissato il segno di b , a ogni valore di ρ , corrisponde un unico valore di ρ' . Così ad una retta del piano oggetto non può mai corrispondere una curva chiusa nel piano

immagine: infatti a ogni valore di θ corrisponde uno e un solo valore di ρ e quindi non gli possono mai corrispondere due o più valori di ρ' .

Passando invece alla seconda esperienza, si osserva che, fissata la posizione dell'oggetto e della lente, la distorsione aumenta quanto più l'occhio si avvicina al piano dell'immagine; si inverte quando l'occhio oltrepassa questo piano e l'inversione avviene attraverso il valor massimo della distorsione. Le figure che si osservano in queste condizioni sono del tutto diverse dalle immagini ottenute nel caso precedente e in certi casi le curve più contorte sono proprio quelle parassiali.

Quando avviene il passaggio da un tipo di distorsione all'altro, si hanno nel campo stesso dell'immagine osservata due zone una interna all'altra; in quella periferica la distorsione è sempre a barile; in quella interna, a cuscinetto; le curve delle due parti sono collegate fra di loro formando degli anelli. Se nel piano oggetto è disegnato un sistema di rette parallele ed equidistanti, si osservano nella zona di passaggio fra la distorsione a cuscinetto e quella a barile una serie di massimi di larghezza delle immagini, che sono disposti lungo una linea chiusa a forma di ellisse, coll'asse maggiore sempre parallelo alle linee dell'oggetto. Allontanando l'occhio dalla lente questa ellisse si restringe (però il rapporto degli assi rimane sempre $\sqrt{3}$) e finisce collo sparire dal centro della figura, restando in tutto il campo la distorsione a barile. Se al contrario si allontana l'occhio dal piano immagine verso la lente la regione periferica si riduce e scompare dall'orlo della figura, e in tutto il campo rimane la distorsione a cuscinetto.

Tutto ciò sembra sufficiente per concludere che le due esperienze non hanno alcuna relazione fra loro.

*
**

Per la spiegazione di questa seconda esperienza, che non ci è stato possibile trovare in alcun luogo, non ci rimane che richiamare la descrizione di un'esperienza già da noi fatta tre anni or sono⁽¹⁾. Si osservò allora che filtrando l'immagine di un reticolo attraverso una fenditura parallela ai tratti di quello si realizzavano delle frangie d'ombra, non localizzate, simili a quelle che si sarebbero osservate invertendo il cammino della luce e guardando l'obbiettivo attraverso il reticolo. Queste frangie sono più o meno nette a seconda della larghezza della fenditura, in relazione alla frequenza del reticolo; all'ingrosso questa larghezza deve essere uguale a un piccolo numero dispari di semitratti dell'immagine del reticolo, perchè le frangie siano nitide. Osservammo anche in quell'occasione che quando

(1) V. RONCHI, « Nuovo Cimento », I, 3, p. 209, 1924. V. RONCHI, *La prova dei sistemi ottici*, p. 83, Bologna Zanichelli 1925.

questa immagine è molto larga la pupilla stessa funge da fenditura e le frangie si osservano direttamente senza bisogno di alcun apparato. Questo è quanto si realizza nella esperienza attuale. Del resto il comportamento delle figure distorte corrisponde esattamente a quello delle frangie d'ombra ⁽¹⁾.

*
* *

In conclusione: le due esperienze citate sono essenzialmente diverse: la prima è interpretata correttamente nel modo esposto nei trattati e riguarda la corrispondenza biunivoca tra i punti dell'oggetto e dell'immagine, nel senso dell'ottica geometrica; la seconda si riferisce a una classe di fenomeni ben diversi e più complessi, in più stretta relazione col processo di formazione dell'immagine dei singoli punti.

Fisica. — *Sulla spiegazione del raggio verde.* Nota ⁽²⁾ di F. RUDA, presentata dal Socio Corrisp. G. GIORGI.

Il fenomeno noto come « raggio verde » consiste in una brillante colorazione verde o azzurra presentata dai primi raggi del sole che spunta all'orizzonte o dagli ultimi del sole che tramonta.

Esso si spiega come un effetto della rifrazione atmosferica, a parte le particolari condizioni meteorologiche fin'ora non bene identificate, che influiscono sulla produzione del fenomeno.

Quando il sole tramonta, dietro l'orizzonte spariscono successivamente le diverse immagini prodotte per rifrazione, dal sole vero; infatti se la differenza fra l'indice di rifrazione dell'aria per i raggi rossi (1.000292 riga C) e l'indice per i raggi verdi (1.000294 riga E) non è grande, pure essa è sufficiente perchè l'immagine prodotta dai raggi rossi non coincida esattamente con quella prodotta dai raggi verdi o azzurri; un orlo verde o azzurro rimarrà quindi scoperto in alto e un orlo rosso in basso. Questi orli che scomparirebbero completamente se il sole si trovasse allo zenit, perchè i raggi attraversando normalmente l'atmosfera non si rifrangerebbero e quindi non si avrebbe dispersione, crescono a misura che il sole declina e raggiungono la massima larghezza compatibile con l'ingrandimento col quale si osservano quando il sole è all'orizzonte. Per questa ragione quando il sole tramonta la parte che per ultima scompare dietro l'orizzonte sarà colorata in verde e azzurro, e dello stesso colore sarà la parte che spunta per prima quando il sole sorge.

(1) V. RONCHI, « Nuovo Cimento », luglio 1927.

(2) Pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1927.

Questo fenomeno fugacissimo che è stato anche descritto da Giulio Verne in un suo romanzo, è il « raggio verde ».

Calcolando con le tavole di rifrazione lo spessore che deve avere l'orlo verde all'orizzonte, e considerando la velocità apparente con la quale il sole va scomparendo dietro l'orizzonte medesimo, si trova che nella nostra latitudine, e nei mesi d'equinozio, il « raggio verde » potrebbe essere visibile solo per un tempo brevissimo, circa un secondo. Gli Autori invece che si sono interessati del fenomeno, principalmente il Guglielmo ⁽¹⁾ e lo Julius ⁽²⁾ hanno osservato che la durata reale di esso è di solito maggiore di quella teorica, arrivando persino a 2 secondi, come riporta il Guglielmo per una sua osservazione fatta a Firenze.

Per spiegare questa divergenza fra la durata teorica e la durata reale è stata proposta dallo Julius l'ipotesi che in vicinanza dell'orizzonte si abbia, da parte dell'atmosfera, una dispersione anomala della luce solare per le onde luminose comprese fra la riga E (526,97 $\mu\mu$) e la F (486,06 $\mu\mu$) di Fraunhofer, in particolare per le onde di lunghezza intorno ai 530 $\mu\mu$, essendo questa lunghezza d'onda quella corrispondente alla luce del « raggio verde » ⁽³⁾. Questa dispersione anomala dovrebbe, sempre secondo lo Julius, attribuirsi alla presenza, nella zona dello spettro summenzionata, di « righe telluriche » di assorbimento prodotte dagli ioni liberi negli alti strati dell'atmosfera terrestre.

Per quanto a lume di teoria e data l'autorità dello Julius non si possa *a priori* scartare una simile ipotesi, intanto stanno contro di essa due fatti di non lieve importanza; in primo luogo l'assenza di dati sull'apparizione di righe telluriche di assorbimento nella zona verde dello spettro prodotto dalla luce del sole, quando questo sia molto vicino all'orizzonte; in secondo luogo i risultati negativi delle esperienze eseguite dal Guglielmo (loc. cit.) con l'elegante metodo dei prismi incrociati per verificare l'esistenza della suddetta dispersione anomala.

Per suggerimento del chiarissimo prof. Guglielmo ho seguito un'altra via per tentare una conferma sperimentale all'ipotesi dello Julius, avvalendomi di un metodo sensibilissimo e di uso generale in ricerche del genere, il metodo interferenziale, giustificato dalle seguenti considerazioni.

Se, per seguire l'ipotesi dello Julius, gli ioni liberi nell'aria producono righe caratteristiche di assorbimento per la luce verde di lunghezza d'onda intorno ai 530 $\mu\mu$, deve anche avvenire che in vicinanza di queste righe di assorbimento si abbiano forti variazioni dell'indice di rifrazione dell'aria per le onde di lunghezza immediatamente superiore ed inferiore a quella delle

(1) G. GUGLIELMO, *Intorno ad alcune particolarità del « raggio verde »*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXV, serie 5ª, p. 296 (1916).

(2) W. H. JULIUS, *Le rayon vert.* « Archives néerlandaises », To. IV, 2ª série, p. 385 (1901).

(3) EXNER, *Grüner Strahl.*, in « *Metereologische Optik* del Pertner », p. 798.

onde che vengono assorbite; si ricava che il valore dell'indice di rifrazione dell'aria priva o povera di ioni deve essere sensibilmente diverso da quello dell'aria ricca di ioni, almeno per qualche zona dello spettro vicina a quella lunghezza d'onda. Questo è ciò che ho tentato di verificare con le esperienze che ora descriverò.

METODO. — Il metodo seguito consisteva nell'osservare con un oculare munito di reticolo le frangie ottenute in un interferometro di Jamin mentre veniva ionizzata per mezzo dei raggi Röntgen l'aria attraverso la quale passava uno solo dei due fasci di raggi che interferivano. Se l'indice di rifrazione dell'aria varia quando venga ionizzata, avrei dovuto osservare, al momento della ionizzazione, uno spostamento delle frangie, previsione che può farsi facilmente in base alla teoria elementare dei fenomeni interferenziali. Non ho osservato invece nessuno spostamento.

ESPERIENZE. — Per mezzo di un portaluce proiettavo l'immagine del sole su un prisma quintuplo di Rutherford di forte potere dispersivo ottenendo così, a distanza di circa 4 metri ed in una direzione comoda uno spettro molto luminoso largo circa 40 cm. (dal violetto al rosso visibili) alto circa 8 cm. L'interferometro di Jamin era posto a circa 4 m. dal prisma in modo che una zona dello spettro sensibilmente monocromatica ne illuminasse in pieno il primo specchio; anzi, in seguito ho limitato con una fenditura larga 1 cm., la luce che cadeva su questo specchio, per eliminare il disturbo arrecato alla comoda visione delle frangie dall'immagine centrale molto luminosa. La luce che attraverso questa fenditura cadeva sull'interferometro era quella di lunghezza d'onda compresa approssimativamente fra $486 \mu\mu$ e $546 \mu\mu$, producendo righe alternativamente verdi e nere ben distinte e poco deformate larghe circa 5 mm.

La ionizzazione dell'aria attraverso la quale passavano i due fasci di raggi interferenti si otteneva coi raggi Röntgen prodotti da un comune tubo focus attivato da un poderoso rocchetto di Rumkorf munito di interruttore elettrolitico Wehnelt. Il circuito primario del rocchetto era alimentato con una corrente di 85 volt e 6 amp. fornita da una dinamo. Il tubo focus era sospeso sopra l'interferometro per mezzo degli stessi reofori a circa metà dello spazio compreso fra il primo specchio dell'interferometro e il compensatore (questa distanza nell'apparecchio usato era di 25 cm.) e a distanza di 10 cm. dal piano orizzontale contenente gli assi dei due fasci interferenti. La sua inclinazione era tale che i raggi X provenienti dall'anticatodo interessassero in pieno l'aria attraversata dai due fasci di raggi interferenti. Per ionizzare soltanto l'aria attraversata da uno dei fasci proteggevo l'aria attraversata dall'altro con un parallelepipedo cavo di lamina di piombo (spessa circa 1 mm.).

Così disposti gli apparecchi, puntavo il reticolo del cannocchiale dell'interferometro su una frangia qualunque, di solito una frangia nera, e dopo essermi garantito contro qualunque spostamento apparente delle frangie me-

desime dovuto a movimenti dell'occhio, provocavo la scarica dei raggi Röntgen chiudendo un interruttore inserito nel circuito primario del rocchetto. Avendo così eseguito una numerosa serie di osservazioni, le frangie sono rimaste sempre immobili.

Ho apportato una prima modificazione proteggendo anche l'aria attraversata dall'altro fascio di raggi interferenti con un parallelepipedo di piombo simile al primo, ma munito di una fenditura nella parete superiore di 8 mm. di larghezza per 40 mm. di lunghezza, attraverso la quale i raggi Röntgen potevano penetrare nel parallelepipedo medesimo ionizzando l'aria contenuta. Con questo artificio era possibile graduare la ionizzazione coprendo più o meno la fenditura con una lastrina di piombo o con una sottile lamina di alluminio, il quale ultimo metallo, come è noto, assorbe in parte i raggi Röntgen. Ripetendo le esperienze non ho osservato spostamenti delle frangie.

Ho pensato allora di vedere se l'effetto si manifesta facendo interferire due raggi, uno dei quali abbia percorso un tubo nel quale ci sia il vuoto, mentre l'altro ha attraversato un tubo identico contenente aria ionizzata alla pressione normale. A tale uopo nell'interferometro, al posto dei parallelepipedi di piombo, ho collocato due tubi di vetro dello stesso diametro (13 mm.) e della stessa lunghezza (25 cm.), muniti di tubulatura laterale e chiusi ermeticamente alle due estremità con dischetti di vetro rigorosamente piano paralleli, incollati ai tubi con balsamo del Canada. Ognuno dei due fasci interferenti attraversava uno dei tubi. Osservando, le frangie si vedevano indebolite e non eccessivamente chiare, ma, se uno spostamento ci fosse stato, l'avrei visto benissimo. Infatti, collegato il tubo aspirante di una buona pompa rotativa a mercurio, mossa da un motore elettrico, alla tubulatura di uno dei tubi di vetro, le frangie sparirono dal campo dell'oculare. Dopo una breve attesa per raggiungere un forte grado di vuoto che rimanesse costante, ho riportato le frangie nel campo per mezzo del compensatore, notando che si mantenevano immobili. Ho fatto quindi agire il tubo focus senza rimarcare alcuno spostamento.

Ho ritenuto allora opportuno ricorrere ad un altro artificio, per rendere più evidente l'effetto, caso mai ci fosse: lasciare al loro posto i tubi di vetro, però uno riempito con aria alla pressione normale, l'altro con aria compressa; ionizzare quindi col solito mezzo l'aria contenuta in ambedue, osservando le frangie.

La pressione dell'aria in uno dei tubi fino a circa 2 atm. l'ho ottenuta mettendolo in comunicazione con una grossa bombola precedentemente caricata con la pompa summenzionata. Non si poteva mettere direttamente in comunicazione con la pompa perchè le oscillazioni di pressione si ripercuotevano sulle frangie, facendole oscillare rapidamente dall'alto al basso. Anche in questo caso, quando ho immesso l'aria della bombola dentro il tubo, le frangie sono uscite dal campo e le ho riportate per mezzo del com-

pensatore. Mandando i raggi Röntgen sui due tubi, le frangie sono rimaste immobili, e così è avvenuto anche ripetendo l'esperienza parecchie volte.

L'insieme di queste esperienze tende dunque a provare che l'indice dell'aria ionizzata non differisce da quello dell'aria non ionizzata.

Nella Nota successiva discuterò questi risultati ed esporrò le conclusioni.

Fisica. — *Sulla spiegazione del Raggio Verde.* Nota di F. RUDA, presentata dal Socio Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Dichiarazione intorno alla mia Nota « Una notevole deduzione dalla teoria di Bohr »*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ del dott. N. SIRACUSANO, presentata dal Socio Corrisp. L. PUCCIANTI.

Soltanto qualche tempo dopo della pubblicazione della mia Nota *Una notevole deduzione dalla teoria di Bohr*⁽¹⁾ ho potuto prendere visione dell'edizione tedesca 1924 dell'opera *Atombau u. Spektrallinien* del Sommerfeld nella quale trovasi lo stesso risultato⁽³⁾ a cui son pervenuto io nella citata Nota. È doverosa pertanto questa mia dichiarazione per ristabilire i dovuti diritti di priorità.

Sostanzialmente l'A. sviluppa in questa edizione della sua opera un'idea suggerita dal Bohr in una pubblicazione che non aveva il fine specifico della ricerca di un limite del sistema periodico⁽⁴⁾.

L'A. in una prima parte perviene a questo limite studiando il problema delle orbite relativistiche quantizzate. In una seconda fa la medesima osservazione da me fatta per la condizione di realtà del radicale che appare nella formula dell'energia.

Mi sia permesso tuttavia notare che, formalmente, la dimostrazione da me seguita in principio della mia Nota differisce da quella del Sommerfeld e che per la sua semplicità mi pare che possa avere qualche valore didattico. Infatti, io considero orbite circolari e ricavo la velocità dell'elettrone sull'orbita quantizzata:

$$(1) \quad v_n = \frac{2\pi c^2 Z}{h} \frac{1}{n}.$$

(1) Cfr. « Rend. Acc. dei Lincei », 1° sem., fasc. 2, gennaio 1927.

(2) Pervenuti all'Accademia il 23 agosto 1927.

(3) Cfr. p. 465, edizione 4ª, F. VIEWEG.

(4) Cfr. « Ann. d. Phy. », 71, p. 266 (1924). Nota in calce.

Dopo, postulando la velocità della luce come limite delle velocità, siccome v_n è massima, per valori interi di n , per $n = 1$ dovendo essere:

$$v_1 < c$$

dev'essere:

$$Z < \frac{hc}{2\pi c^2} = 137.52.$$

Come è noto la (1) può dedursi anche colle sole nozioni di meccanica elementare.

Fisica. — *Ulteriori ricerche sulla dispersione rifrattiva e rotatoria naturale.* Nota ⁽¹⁾ di M. L. PAGLIARULO, presentata dal Socio M. CANTONE.

Dopo l'analogia ricerca sull'aspartato monoetilico, di cui ho data relazione in una Nota precedente ⁽²⁾, sono passata allo studio della dispersione rifrattiva e rotatoria naturale dell'aspartato monoisoamilico, sostanza anche questa fornita molto cortesemente all'Istituto di Fisica dal prof. Piutti. E fui indotta a farlo perchè anche per questa sostanza apparivano già, dalle interessanti esperienze dei dottori Mazza e Dello Joio, forti anomalie nella dispersione rotatoria naturale.

Non dirò quali siano stati i metodi sperimentali seguiti e quali le cure usate durante il corso delle esperienze, perchè di ciò ho parlato nella Nota suindicata e in altre ancora ad essa antecedenti. Qui mi limiterò ad esporre brevemente i risultati ottenuti dall'esame della nuova sostanza.

La soluzione acquosa da me adoperata avea la concentrazione di gr. 3.198 in 100 cmc., e ne fu fatto lo studio prima per la dispersione rotatoria naturale e poi per la rifrattiva.

La dispersione rotatoria è risultata nettamente anomala e dello stesso tipo di quella che si ebbe per l'aspartato monoetilico. Lo mostra in maniera molto evidente la figura, in cui si vede che la curva corrispondente (contrassegnata con la lettera R), costruita in base ai risultati numerici raccolti nella tabella, presenta nell'intervallo di lunghezza d'onda 5400-6100 una sinuosità simile a quella dell'aspartato monoetilico, la quale, come dicemmo, ricorda le sinuosità caratteristiche delle curve di dispersione rifrattiva in corrispondenza alle bande di assorbimento. Rispetto a quella dell'aspartato monoetilico questa sinuosità resta certamente spostata verso le lunghezze d'onda maggiori e lo spostamento ammonta circa a 200 Å.

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1927.

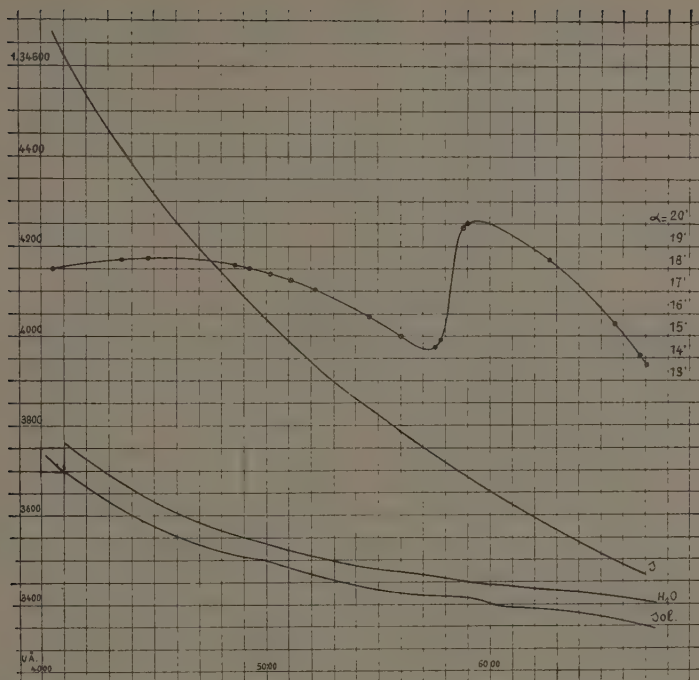
(2) M. L. PAGLIARULO, *Sulla dispersione rifrattiva e rotatoria naturale delle soluzioni acquose di aspartato monoetilico.* « Rend. della R. Accademia dei Lincei », vol. IV. serie 6^a, 2^o sem., fasc. 7.

Lo studio della dispersione rifrattiva, fatto a temperature assai vicine a 25° C diede i valori numerici, che ridotti tutti a 25°, trovansi raccolti in tabella e permise di tracciare la curva contrassegnata in figura con la lettera I. Nessuna differenza appare ad un primo esame fra essa curva e quella dell'acqua distillata riportata accanto ⁽¹⁾, ma seguendo il solito sistema di calcolare le differenze finite degli indici, in corrispondenza a intervalli successivi di lunghezze d'onda per un ammontare di 100 Å, e procedendo alla rappresentazione grafica, è risultato un andamento dei rapporti incrementali analogo alla legge di variazione avutasi nel caso dell'aspartato monoetilico, vale a dire individuato da due archi a leggera curvatura che si raccordano mediante una leggera sinuosità e con piccolo salto finale in corrispondenza al massimo del potere rotatorio.

TABELLA

Lunghezza d'onda	Potere rotatorio	Indici di rifrazione a 25° C.
6708	13' 7	1.33465
6678	14' 1	1.33471
6562	15' 6	1.33497
6266	18' 4	1.33573
5893	20' 0	1.33684
5875	19' 8	1.33691
5780	13' 8	1.33723
5460	15' 9	1.33836
5218	17' 1	—
5105	17' 5	—
5015	17' 8	1.34028
4916	18' 0	1.34078
4861	18' 1	1.34106
4651	18' 4	—
4471	18' 5	1.34334
4358	18' 4	1.34413
4046	18' 0	1.34673

(1) I valori in base a cui è stata costruita la curva dell'acqua furono trovati a 20° e riportati poi a 25° mediante il coefficiente termico $\frac{dn}{dt} = -0.00085$, da me trovato nel lavoro precedente in cui ebbi occasione di poter confrontare le due leggi di dispersione dell'acqua distillata a 20° e a 15° C.



E questa singolarità del ripiano si presenta anche qui nello stesso campo in cui si ha la sinuosità della curva di dispersione rotatoria.

Questi risultati tendono a confermare quelli precedentemente trovati e le deduzioni tratte nel caso delle asparagine, dell'acido tartarico destrogiro, e dell'altro aspartato già più volte nominato.

Pare cioè che esista una relazione fra la dispersione rotatoria e la rifrattiva e che questo legame il quale sfugge all'esame diretto delle curve di dispersione si può mettere in rilievo mediante il semplice calcolo delle differenze finite suddette e il tracciamento delle grafiche coarispondenti.

Rendo grazie vivissime al prof. Cantone per l'aiuto continuo che gentilmente mi ha prestato.

Sento altresì il dovere di esprimere i sensi di particolare gratitudine al Comitato Scientifico tecnico di Milano per la borsa di studio concessami al fine di continuare queste serie di ricerche iniziate durante la carriera scolastica.

Chimica. — *La formazione di aldeide formica e di zuccheri per azione dei raggi ultravioletti sui bicarbonati alcalini e alcalino-terrosi.* Nota ⁽¹⁾ di G. MEZZADROLI e G. GARDANO, presentata dal Socio Corrisp. M. G. LEVI.

Le molteplici e varie azioni che i raggi U-violetti sono capaci di esplicare, offrono oggi agli sperimentatori uno dei campi più vasti di indagine; e numerose sono le esperienze che vengono ogni giorno eseguite sia nel campo della chimica che in quello della fisica e della medicina.

E restando nel solo ambito della chimica, sono note le ricerche di Stoklasa e Zdobnický ⁽²⁾, di Moore e Webster ⁽³⁾, Bach, Uscher, Priestley ⁽⁴⁾ e quelle di Baly, Helbron e Barcher ⁽⁵⁾, sull'ottenimento di formaldeide e di zucchero partendo da CO_2 ed H_2O , per mezzo dell'azione dei raggi U-violetti.

Baly, Helbron, Barcher e collaboratori ⁽⁶⁾ operarono su soluzioni acquose di CO_2 , in presenza o no di speciali catalizzatori, ed ottennero discreti rendimenti in formaldeide e zuccheri.

Noi abbiamo voluto studiare la possibilità di ottenere la formazione di aldeide e di zuccheri, partendo, anzichè da soluzioni acquose di CO_2 , da soluzioni di bicarbonati, ed abbiamo fermata la nostra attenzione principalmente sui bicarbonati alcalini e alcalino-terrosi.

TECNICA. — Le nostre soluzioni di bicarbonato furono sottoposte all'azione diretta dei raggi prodotti da una lampada « Original Hanau » a vapori di mercurio, alimentata da corrente alternata di 3,8 amp., 220 volt, capace di emettere radiazioni da 2000 a 6000 Angström, in bacinelle rotonde, di

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1927.

(2) « Bioch. Zeitsch. », 1911, 30, 433.

(3) « Proc. Roy. Soc. », B. 1920, 91, 201.

(4) « Compt. Rend. », 1893, 116, 1145.

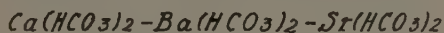
(5) « I. Chem. Soc. », 1921, 119, 1025.

(6) ELLIS and WELLES, *The Photochem. action of U-violet rays*, p. 220 e sg.

vetro, del diametro di 100 mm., alla distanza di 75 mm. dal becco di quarzo, per un tempo variabile da dieci a sessanta minuti primi.

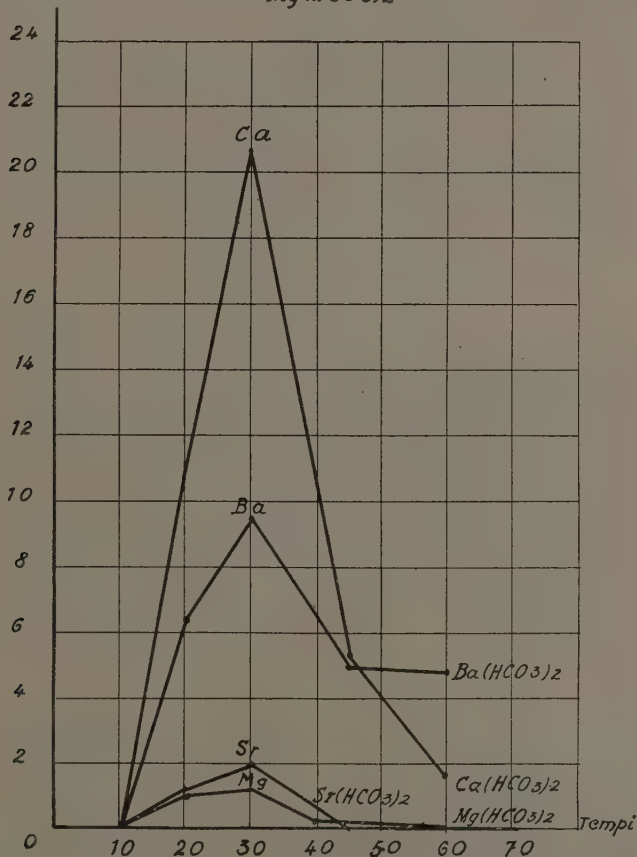
La temperatura fu misurata per mezzo di un termoelemento colla saldatura immersa nel liquido.

Formazione dell'aldeide da



CH_2O %

$Mg(HCO_3)_2$



Le quantità di bicarbonato vennero dosate con HCl N/10; l'aldeide fu determinata col metodo iodometrico e con quello all'acqua ossigenata, che, secondo F. Mach-R. Hermann⁽¹⁾ sono fra i più precisi.

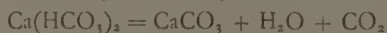
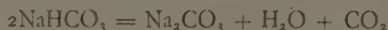
(1) «Chimie e Ind.», 5, 11, 891.

Quali reazioni qualitative pel riconoscimento degli zuccheri furono usate quella del triptofano (assai sensibile), del β -nattolo, e della NaOH al 40 %.

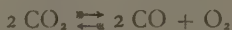
I nitriti ed i nitrati vennero individuati colle reazioni di Griess e della brucina, rispettivamente.

RISULTATI. - *Bicarbonati alcalini e alcalino-terrosi.*

I raggi U-violetti danno luogo alla trasformazione dei bicarbonati nei corrispondenti carbonati ed alla messa in libertà di CO_2 ed H_2O secondo le reazioni seguenti:



La CO_2 che si sviluppa sempre sotto l'azione dei raggi U-violetti insieme con H_2O , dà luogo a formazione di aldeide formica, secondo lo schema ammesso anche da Berthelot e Gaudechon⁽¹⁾:



La quantità di CH_2O che si forma, comincia ad essere apprezzabile, dopo raggiunti, i venti minuti di azione dei raggi; essa raggiunge un massimo verso i trenta minuti, dopo di che varia in ragione inversa del tempo d'azione dei raggi sul liquido: certamente avvengono fenomeni di ossidazione e anche di polimerizzazione.

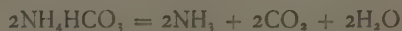
La presenza di zuccheri viene sempre osservata nel momento in cui si ha formazione di CH_2O , però in dosi estremamente piccole.

Durante lo svolgersi delle reazioni è assai visibile lo svolgimento di gas che ha inizio dopo circa cinque minuti d'azione dei raggi.

BICARBONATO D'AMMONIO.

L'azione esplicata dai raggi U-violetti sul bicarbonato d'ammonio in soluzione acquosa, è assai diversa da quella esplicata sui bicarbonati precedentemente esaminati.

Non si ha formazione di carbonato ammonico, mentre è assai rapida la decomposizione del bicarbonato secondo la seguente reazione:

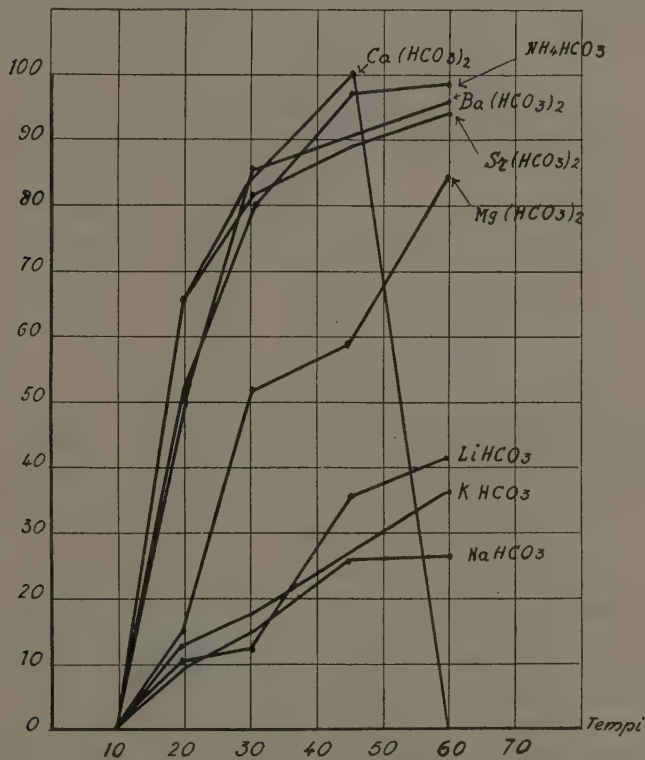


e lo sviluppo di NH_3 è assai sensibile.

(1) « Com. Rend. », 1912, 154. 1803.

L'aldeide formica si forma con reazioni analoghe alle precedenti raggiunge un massimo subito dopo venti minuti di azione dei raggi, quindi segue la stessa legge detta per i bicarbonati precedenti.

Si notano tracce minime di zuccheri solo verso i trenta minuti di esposizione ai raggi, come pure tracce di urotropina (esametilentetramina) che però scompaiono subito dopo.



Decomposizione Bicarbonati

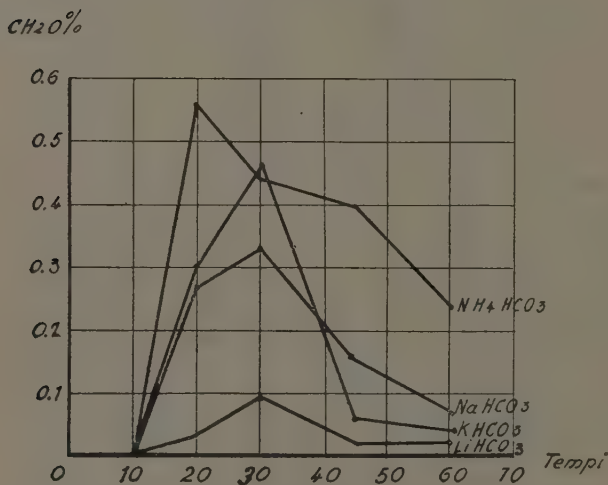
Si ha formazione di nitriti e di nitrati provenienti dalla ossidazione della NH_3 formatasi. Questa ossidazione potrebbe essere dovuta all'ossigeno che si svolge durante la formazione della formaldeide, o allo stesso ozonizzato dai raggi U-violetti, oppure all'ozonizzazione dell'aria ambiente, sempre per opera dei raggi U-violetti.

La presenza nei liquidi di reazione, di sostanze catalitiche e l'azione di filtri colorati può accelerare o rallentare la formazione di aldeide, sulla quale influisce pure la temperatura.

Il diagramma I dà le curve di decomposizione dei bicarbonati studiati. L'esame di queste curve mostra che la velocità di decomposizione raggiunge un massimo per il $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$; seguono il NH_4HCO_3 , il $\text{Ba}(\text{HCO}_3)_2$, il $\text{Sr}(\text{HCO}_3)_2$, il $\text{Mg}(\text{HCO}_3)_2$, il LiHCO_3 , il KHCO_3 , ed infine il NaHCO_3 , per il quale la decomposizione è minima.

Risulta pure dal suddetto diagramma che esiste un profondo distacco fra le velocità di decomposizione dei bicarbonati alcalini e quelle degli alcalino-terrosi.

Formazione dell'aldeide da



Il bicarbonato di magnesio e quello d'ammonio si comportano come quelli alcalino-terrosi.

Il diagramma II rappresenta le curve di formazione dell'aldeide formica dai bicarbonati di potassio, sodio, litio, ammonio.

In esso appare che il miglior rendimento in aldeide formica è quello dato dal bicarbonato d'ammonio; seguono il bicarbonato di potassio, di sodio, di litio.

Il diagramma III rappresenta le stesse curve di formazione dell'aldeide formica, dai bicarbonati di calcio, bario, stronzio, magnesio.

Da esso risulta che il miglior rendimento in aldeide si ha col bicar-

bonato di calcio; fanno seguito il bicarbonato di bario, quello di stronzio e di magnesio.

È importante notare che questo diagramma non è sovrapponibile al II poichè per comodità di rappresentazione grafica il III venne costruito in scala 20 volte più piccola.

È quindi evidente il distacco fortissimo che esiste fra i rendimenti in aldeide formica raggiunti coi due gruppi di sali considerati. Infatti da un massimo di 0.56 % ottenuto coi bicarbonati alcalini si va fino ad un massimo di 20.6 % cogli altri bicarbonati.

Conclusioni. — 1. La velocità di decomposizione dei bicarbonati per azione dei raggi U-violetti è massima per il bicarbonato di calcio, e minima per quello di sodio.

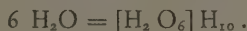
2. Il bicarbonato d'ammonio fornisce una quantità d'aldeide maggiore che i bicarbonati alcalini.

3. Il più alto rendimento in aldeide formica si raggiunge col bicarbonato di calcio.

Chimica. — *Ricerche sui solfosali.* — IV. *Sopra alcuni derivati di un ipotetico acido tioacquico.* Nota di L. FERNANDES, presentata ⁽¹⁾ dal Socio Corrisp. L. ROLLA.

In precedenti Note ⁽²⁾ ho riferito i primi risultati di una ricerca sopra i solfosali complessi. Attualmente ho rivolto le mie ricerche allo scopo di ottenere composti derivanti da un ipotetico acido esasolfidrico analogo all'acido acquico di Copaux.

In considerazione alle analogie esistenti fra i metavolframati e alcuni eteropolivolframati, il Copaux ⁽³⁾ considerò la possibilità che nei primi, alcune molecole di acqua facessero parte della molecola complessa ed avessero funzione simile a quella delle anidridi Si O_2 , $\text{P}_2 \text{O}_5$, $\text{B}_2 \text{O}_3$, ecc. In seguito il Rosenheim ⁽⁴⁾ generalizzò questa ipotesi e fece derivare gli isopoliacidi del molibdeno, del volframio e del vanadio dall'acido acquico del Copaux



(1) Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1927.

(2) « Rend. Acc. Lincei », 302 (1927); 339 (1927).

(3) « Ann. Chim. », 17, 217 (1909); « C. R. », 148, 633 (1909).

(4) « Z. Anorg. Allgem. Chem. », 96, 139 (1916).

In modo analogo spiegò la costituzione dei volframo-vanadati ⁽¹⁾ e dei molibdovanadati ⁽²⁾. Assai recentemente, in base ad una serie di ricerche di natura chimica e chimico-fisica io ammiisi potersi far derivare dall'acido acquico i molibdovolframati ⁽³⁾ complessi da me preparati.

In tutte queste ricerche l'ipotesi del Copaux-Rosenheim è stata sostenuta da prove indirette. Tanto per gli iso- che per gli eteropoliacquati si è data ragionevolmente la massima importanza alla diversa tensione di vapore delle varie molecole di acqua contenuta nel sale complesso, distinguendo l'acqua di costituzione da quella di cristallizzazione in base alla diversa tenacità con la quale essa era trattenuta dal sale.

Sostituendo alle molecole di acqua di costituzione delle molecole di idrogeno solforato si sarebbero dovuti ottenere composti analoghi agli acquati e per i quali l'analisi avrebbe dato luogo a risultati sicuri.

Dopo numerosissimi tentativi sono riuscito a preparare dei parasolfomolibdati 1 analoghi del tutto ai paramolibdati 2.



In un primo tempo ho tentato la preparazione del sale di ammonio, e vi sono pervenuto per tre vie diverse.

Il solfomolibdato normale di ammonio $(\text{NH}_4)_2\text{MoS}_4$ lasciato a sè all'aria si decompone spontaneamente con sviluppo di ammoniacca. In un primo tempo il sale da rosso scuro diventa verde cupo, poi viola scuro, poi nero e infine comincia ad assorbire acqua e diviene leggermente deliquescente.

Se si liscivia il sale a questo punto, si ottiene una polvere rossa scura microcristallina, stabile in presenza della soluzione di solfomolibdato, ma facilmente decomponibile dall'acqua bollente, con separazione di fiocchi amorfi di solfuro di molibdeno e sviluppo di idrogeno solforato e di ammoniacca.

In presenza di ammoniacca invece, il solfomolibdato non si decompone. lasciato a sè anche per lungo tempo sotto una campana di vetro in presenza di un recipiente aperto contenente ammoniacca, esso diventa leggermente deliquescente, ma mantiene il suo colore primitivo e non cambia di composizione.

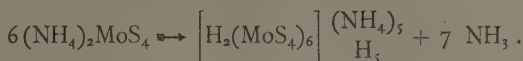
Il sale rosso cupo, di cui si è prima parlato, spremuto e lavato con alcool, presenta invece una grande stabilità, enormemente superiore a quella del solfomolibdato normale. Tanto è vero che questo si trasforma in quello.

(1) «Z. Anorg. Allgem. Chem.»; 96, 148 (1916).

(2) ABEGG, VI gruppo.

(3) «Gazz. Chim. Ital.», LVI, 655 (1926).

Tale decomposizione possiamo immaginare che avvenga secondo la seguente reazione .



Io ho studiato questa reazione nel modo seguente:

In un tubo di vetro venne introdotta una navicella contenente una quantità pesata di solfomolibdato, precedentemente triturrata in mortaio di agata, onde aumentarne la superficie di decomposizione.

Attraverso al tubo, chiuso alle due estremità con un tappo di gomma traversato da un sottile tubo a sviluppo, venne fatta passare per circa quarantacinque giorni una lenta corrente di aria, la quale all'uscita della canna, gorgogliava successivamente in tre bottiglie di lavaggio contenenti acido solforico titolato.

Dopo detto tempo la soluzione venne rititolata con soda e la navicella ripesata dopo essiccazione. Ottenni i seguenti risultati:

Sostanza prelevata gr. 1.5242 cm.³ di $\text{H}_2\text{SO}_4 \frac{\text{N}}{10} \sim$ impiegati N. 52

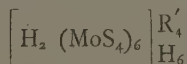
» decomposta » 1.4381

Perdita gr. 0.0861 corrispondenti a gr. 0.0853 di NH_3 .

Il peso della sostanza perduta corrisponde quasi quantitativamente al peso dell'ammoniaca raccolta.

Oltre che a secco, il solfomolibdato si decompone in modo simile in soluzione acquosa, a freddo e ancor meglio a caldo. Lasciando a sè infatti una soluzione del sale di ammonio questa emette forte odore di ammoniaca e dopo qualche giorno lascia separare un deposito microcristallino rosso cupo del sale para.

A caldo la decomposizione avviene molto più rapidamente, ma se il riscaldamento è troppo violento in alcuni casi si ottiene il trisolfomolibdato



e in alcuni casi tanto questo che il parasolfosale sono inquinati da piccole quantità di solfuro di molibdeno.

Un altro metodo che oltre che per il sale di ammonio si presta in generale per la preparazione di tutti gli altri sali dell'acido parasolfomolibdico, consiste nel saturare coll'idrogeno solforato a freddo soluzioni concentrate del sale normale.

La soluzione del solfomolibdato satura a freddo, veniva introdotta in una boccia a pressione, la quale veniva immersa in un vaso pieno di ghiaccio pesto, e in essa si faceva gorgogliare dell'idrogeno solforato, con una pres-

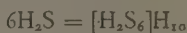
sione assai superiore a quella di un normale apparecchio di Kipp; dopo circa trenta ore di questo trattamento, la bottiglia veniva chiusa con un tappo di gomma fermato a forza e lasciato a sè. Dopo alcune ore si separava il sale, generalmente assai più cristallino di quello ottenuto con metodi precedenti.

Per i sali alcalini questo viene ad essere l'unico metodo di preparazione. Il sale di guanidina invece si può preparare anche per spontanea decomposizione del solfomolibdato normale il quale a secco o in soluzione acquosa o ancor meglio alcoolica, perde ammoniac e anidride carbonica e si trasforma, come nel caso del sale di ammonio, nel parasolfosale.

Questi composti, come ho già detto, presentano una stabilità abbastanza elevata, sono assai poco solubili in acqua e all'ebollizione vengono da questa decomposti. Per aggiunta di acidi diluiti, precipita il solfuro di molibdeno, si sviluppa idrogeno solforato e la soluzione si colora in azzurro per formazione del bleu di molibdeno. Quest'ultimo fatto è indice di una certa complessità perchè i solfomolibdati normali per aggiunta di acidi diluiti ed in particolare di acido cloridrico precipitano quantitativamente il solfuro di molibdeno senza che la soluzione si colori in azzurro.

Allo scopo di ottenere una maggiore conferma all'ipotesi di analogia di costituzione coi corrispondenti sali ossigenati feci eseguire sui due sali di ammonio (ossigenato e solforato) le spettrografie col metodo di Debye e pur ottenendo spettrogrammi così complicati da renderne difficile lo studio quantitativo, pure si è potuto notare in essi una stretta analogia di reticolo cristallino.

In base a queste considerazioni possiamo ammettere che questi sali derivino da un acido tioacquico



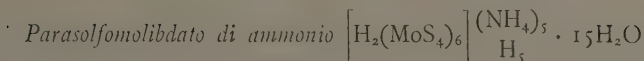
nel quale gli atomi di solfo possono addizionare molecole di solfuro di molibdeno, oppure in altre parole, nel quale gli atomi di solfo possono venir sostituiti da aggruppamenti MoS_4 , coordinati da due atomi di idrogeno.

I solfoparamolibdati contengono 3,5 molecole di idrogeno solforato di costituzione, che a differenza dell'acqua di costituzione può essere determinato facilmente mediante l'analisi quantitativa.

Il trimolibdato invece possiede quattro molecole d'idrogeno solforato che venne pure determinato sperimentalmente.

Attualmente sono in corso altre ricerche per la preparazione di altri iso e eteropolitioacquati. In queste ricerche si riscontrano però sempre delle difficoltà sperimentali qualche volta insormontabili per la separazione e la preparazione di questi composti.

PARTE SPERIMENTALE
(in collaborazione con F. Palazzo).

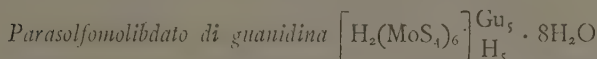


Questo composto fu ottenuto numerosissime volte mediante i tre metodi già descritti e si presenta sotto forma di una polvere rosso cupa, costituita da cristallini più o meno minuti a seconda del metodo di preparazione.

Per l'analisi, il molibdeno venne dosato calcinando lentamente il sale in crogiolino di platino e pesando poi l'anidride molibdica. Lo solfo venne ossidato ad acido solforico con acqua ossigenata in soluzione alcalina e precipitato dopo acidificazione, come solfato di bario.

L'ammoniaca venne dosata per distillazione su acido solforico titolato. Per la determinazione dell'acqua un campione pesato in una navicella, veniva introdotto in una canna di vetro fra due navicelle piene di anidride fosforica; attraverso alla canna si faceva passare una lenta corrente di azoto, quindi si introduceva questa in un manicotto di vetro nel quale venivano fatti circolare dei vapori d'acqua bollente. La navicella veniva poi raffreddata in corrente di azoto e quindi pesata.

Trov. %	Mo 34.2	S 46.1	NH ₃ 5.04	H ₂ O 14.2
Calc. »	» 34.6	» 46.8	» 5.1	» 14.8



In un primo tempo venne preparato il solfomolibdato normale: ad una soluzione di carbonato di guanidina venne aggiunta alla ebollizione, anidride molibdica sino a che se ne scioglieva. La soluzione filtrata venne addizionata di ammoniaca concentrata e trattata con idrogeno solforato fino a saturazione. Dopo alcune ore si separavano dei bellissimi cristalli a raggiera, di colore rosso cupo con riflessi verdastri, facilmente solubili in acqua ed in alcool. I cristalli spremuti vennero sciolti nella minor quantità possibile di acqua fredda e questa soluzione fu saturata con idrogeno solforato sotto pressione per circa 24 ore.

Si separò una polvere cristallina rosso-scura del parasolfomolibdato ottoidrato.

Anche questo composto, come abbiamo già detto, si può ottenere per decomposizione del sale normale.

Trov. %	Mo 32.5	S 42.6	N 11.5	H ₂ O 7.03
Calc. »	» 32.3	» 42.8	» 11.8	» 7.80



Il solfomolibdato di potassio possiede una stabilità molto superiore a quella dei precedenti, non potendo esso perdere l'eccesso della base per trasformarsi nel sale acido.

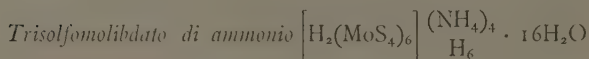
Il sale normale assai più solubile del sale di ammonio e di guanidina venne sciolto in acqua e trattato con idrogeno solforato sino a separazione del sale para.

Per questo prodotto l'analisi venne eseguita nel seguente modo:

Un campione disciolto in molta acqua bollente acidificata con acido cloridrico diluito, venne trattata con idrogeno solforato a 60°.

Filtrato il solfuro di molibdeno, la soluzione venne svaporata in presenza di qualche goccia di acido solforico e venne così ottenuto il potassio come solfato. In due altri campioni a parte venne dosato lo solfo e l'acqua.

Trov. %	Mo 31.8	S 41.5	K 11.00	H ₂ O 15.60
Calc. »	» 31.3	» 41.85	» 10.63	» 15.70



Questo composto si ottiene assai difficilmente puro, perchè generalmente si ottiene inquinato per trisolfuro di molibdeno o per parasolfomolibdato.

Per questa preparazione, una soluzione piuttosto concentrata di solfomolibdato normale venne riscaldata per 4-5 ore a bagnomaria in recipiente aperto. Dopo questo tempo si separò una massa microcristallina marrone che venne facilmente spremuta alla pompa e lavata con acqua, alcool ed etere.

Dell'acido trisolfomolibdico è impossibile la preparazione dei sali alcalini, perchè noi non siamo riusciti a prepararlo che per eliminazione della base volatile dal sale normale.

Trov. %	Mo 33.9	S 45.6	NH ₃ 3.9	H ₂ O 15.11
Calc. »	» 34.2	» 45.6	» 4.04	» 16

Cristallografia. — *Elementi di simmetria indipendenti di 1^a e di 2^a specie.* Nota di U. PANICHI, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Osservazioni preliminari sulla biologia del genere «Scytodes» (Walck). (Araneae verae, Sicariidae).* Nota⁽¹⁾ di B. MONTEROSSO, presentata dal Socio Corrisp. A. RUSSO.

Sebbene le *Scytodes* abbiano una estesissima aria di distribuzione, e siano state descritte numerose specie del genere (circa quaranta), sulla biologia di esse possediamo pochissime osservazioni. Avendo quest'anno catturato un certo numero di *Scytodes* (specie varie), a Catania, ho voluto iniziare su tali organismi delle ricerche etologiche e morfologiche, ritenendo che potranno riuscire di un certo interesse, anche perchè i *Sicariidae* (*Haploginae*) si considerano filogeneticamente vicini ai *Theraphosae*, e in ogni caso fra le più antiche forme degli *Araneoidi*. Riservando ad un lavoro meno sommario l'esposizione di varî reperti, già da me fatti in proposito, credo opportuno attirar subito l'attenzione degli studiosi su qualche notevole particolarità del genere. Comunemente gli *Scitodoidi* si trovano sotto le pietre, in mezzo ai detriti vegetali, ai piedi degli alberi o anche nelle fessure delle rocce, ove tessono una piccola tela molto irregolare, formata di grossi fili lassi (E. Simon); si incontrano invece qui, con una certa rarità, dentro le case, nelle cucine, soffitte, cantine e simili luoghi. Alcune ore dopo il tramonto, dalla fessura ove ha passato il giorno, *Scytodes* sporge le zampe anteriori e parte del torace, restando, così, ferma a lungo e perfino tutta la notte. Se esce completamente, si arresta presso all'orlo o passeggia con movimenti rarissimi e brevi lungo i bordi della fessura. Talora se ne allontana, ma per andare in cerca di un'altra fessura, di cui esplora attentamente le vicinanze.

Siffatto comportamento parrebbe dover mettersi in relazione con la caratteristica, estrema lentezza dell'andatura, già notata da altri Autori, nei varî rappresentanti del genere. Le mie osservazioni, continuate a lungo, in libertà e in prigionia, mi hanno dimostrato che le accennate abitudini di questi *Sicariidi* vanno messe in relazione con il fatto che forse tutte le specie del genere, si nutrono di Ragni, di Chilopodi e, con particolare preferenza, di Lepismini; non sdegnano le comuni cimici lettuarie, ma non attaccano i Ditteri, specialmente le mosche, se non spinte dalla fame.

Insomma, *Scytodes* ricerca quegli organismi che frequentano i luoghi preferiti da essa e che, nelle ore notturne, entrano ed escono dalle fessure. I Lepismini, per esempio, manifestano notevoli rassomiglianze etologiche

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1927.

con *Scytodes*: usciti dagli interstizi dei muri o dei mobili, non di rado si fermano, a lungo, nelle vicinanze, quasi per esplorare l'ambiente esterno, prima di affrontarne, senz'altro, i pericoli e sfidarne le sorprese eventuali.

È veramente interessante il modo come il Sicariide, di cui ci occupiamo qui, riesca ad impadronirsi di Artropodi, distinti da notevole velocità nei movimenti, quali sono i Lepismini e certi Ragni (per esempio gli *Oecobius*), fuori della sua tela, che del resto consta di pochi fili, tesi nell'interno di una fessura, in guisa da formare una rete a larghe maglie, a cui durante il giorno esso sta sospeso. Per quanto sappia, gli Autori, che hanno studiato il genere *Scytodes* - e citerò qui un distinto Araneologo, il Gerhardt,

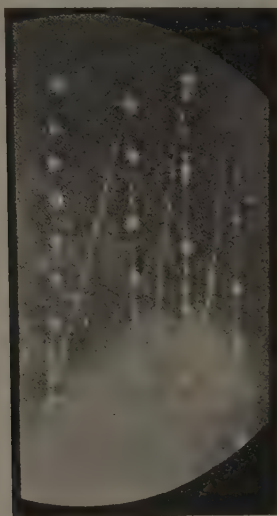


Fig. 1. — Spruzzo lanciato da una Scitode e raccolto su un vetrino. Microfotogramma ottenuto con apparecchio Koristka 9 × 9 in campo oscuro. Ingr. × 19 circa.

che recentemente (1926) pubblicava in « Zeitschr. f. Morph. und Oekologie der Tiere » (6° Bd.) notevoli osservazioni su *S. thoracica* - non parlano di tale particolarità etologica.

Quando un animaletto passa vicino ad una *Scytodes*, questa lo ferma mediante la fulminea emissione di un getto di sostanza gommosa, che proviene dal suo apparato boccale. Il liquido, formando uno schizzo continuo, a guisa di sottilissimo filo cilindrico, comincia quasi costantemente con colpire un punto vicino alla preda.

Se osserviamo al microscopio lo spruzzo, ottenuto facendo fermare, da una *Scytodes*, un piccolo Artropode su una lastrina di vetro, vedremo che

esso forma una serie di strie molto trasparenti, esilissime e parallele: l'apice superiore di ciascuna è collegato con l'inferiore della seguente — e così di seguito — mediante delle linee, oblique rispetto alle prime, parallele fra di loro (fig. 1), ma più sottili. In genere, le verticali presentano un certo numero di goccioline intercalate e quasi equidistanti, mentre le trasversali ne sono per lo più sornite.

La sostanza emessa non ha i caratteri di quella, che, venendo fuori dalle filiere, serve a quasi tutti i Ragni e agli stessi rappresentanti del genere in discorso, a costituire i fili, di cui son formate le tele. Trattasi di un liquido ialino ed incolore, che appena emesso coagula, restando aderente ai



Fig. 2. — *Oecobius* sp. fermato su un vetrino, dallo spruzzo di una Scitode. Microfotogramma in campo chiaro. Ingr. $\times 20$ circa.

corpi cui viene in contatto. Oltre alla estrema rapidità di indurimento, il fluido spruzzato è distinto da notevole duttilità. La preda, difatti, ad un certo punto, viene raggiunta dallo spruzzo, che *Scytodes* lancia rapidissimamente, descrivendo una spezzata, senza muoversi; il liquido, essendo gommoso, si attacca sul corpo della vittima, ma lo oltrepassa da un lato e dall'altro, di guisa che ogni stria, in parte aderisce all'Artropode, in parte si appiattisce sul terreno, in cui questo si avanzava.

Poichè l'animaletto, mentre così viene colpito, esegue dei movimenti disperatamente energici, ogni tratto dello spruzzo, che ne collega qualche membro al terreno, subisce un lieve stiramento, per cui si riduce ad un filo sottilissimo; essendo poi il liquido, finchè non coaguli, molto appiccicatic-

cio, per i movimenti disordinati fatti dalla vittima non solo si attacca' anche ad altri organi di questa, non direttamente colpiti, ma anche si suddivide in un certo numero di fili esilissimi e pur tanto tenaci, che la preda ne rimane irretita e perfettamente immobilizzata (fig. 2) ⁽¹⁾. Frattanto *Scytodes* raggiunge l'Artropode, e se è grosso, lo morde ripetute volte; indi rompe con i cheliceri i fili, che lo hanno fermato, l'afferra con le zampe-mascelle e con il terzo paio di arti ambulatori, e, dopo averne, se non è ancor morto, avvolto il corpo con alcuni fili, secreti dai fusoli, quasi nel modo usato dai *Pholcidae* e dai *Theridiidae*, lo succhia, impiegandovi talvolta - se la preda è voluminosa e l'animale affamato - l'intera notte.

Ulteriori ricerche, già in corso, ci daranno la conoscenza del meccanismo con cui *Scytodes* spruzza il liquido, e della ghiandola, che lo secerne. Sarà allora il caso di fermare l'attenzione sull'eventuale significato filogenetico di questa peculiarità morfo-biologica di *Scytodes*; ricordo qui, fin da ora, che un modo simile di catturare la preda si è scoperto nel tipo degli Onicofori (*Peripatus*).

È noto che fin'ora tutti gli Araneoidi sono stati distinti in due tipi biologici: i *vagabondi* o erranti, che inseguono la preda e i *sedentari*, che l'insidiano, tendendo dei fili o delle tele.

Ci sembra che gli Scitodoidi debbano avvicinarsi ai primi, da cui però restano nettamente separati, in quanto non inseguono la preda, ma l'attendono al varco, somigliando, in ciò, ai secondi; non l'afferrano subito, con gli organi boccali o altri membri, ma la fermano a distanza, usando un metodo che è poco comune negli Artropodi e che non è stato mai descritto fin'ora nell'ordine degli Araneoidi.

(1) Data la trasparenza della sostanza, che costituisce lo spruzzo, riesce difficilissima l'osservazione e, più, la fotografia al microscopio; in ogni caso, i raggi luminosi devono essere obliqui.

Biologia. — *Alterazioni istologiche riscontrate nella cataratta da naftalina esaminando le fibre cristalline in istato di sopravvivenza*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di A. BUSACCA, presentata dal Socio G. LEVI.

Proseguendo lo studio della fibra cristallina con il metodo dell'esame in istato di sopravvivenza — metodo da me esposto in altra nota⁽³⁾ — ho ricercato le alterazioni che insorgono nelle suddette fibre in animali ai quali era stata somministrata della naftalina per via orale e in veicolo oleoso. Ho eseguito le mie ricerche sul coniglio e sulla cavia, animali, nei quali già avevo studiato la struttura normale delle fibre cristalline, fermando particolarmente la mia attenzione sullo studio delle fasi iniziali del processo, fasi che meglio si prestano a spiegare lo svolgimento dei fenomeni. Ricorderò che all'esame a fresco le fibre normali si presentano in sezione ottica come dei nastri giustapposti; il citoplasma appare come una massa fondamentale perfettamente omogenea nella quale sono differenziate delle formazioni filamentose più refrangenti, i condriosomi. Questi sono più abbondanti nelle fibre più periferiche; diminuiscono, sino a scomparire, man mano che ci allontaniamo dagli strati più vicini alla capsula.

Queste mie osservazioni sulla struttura della fibra cristallina normale hanno avuto piena conferma dalle ricerche eseguite da Cattaneo⁽⁴⁾ con i metodi di ultramicroscopia.

Come già accennai, agli animali da esperimento veniva somministrata a giorni alterni una pappa oleosa di un grammo circa di naftalina per le cavie, 2 grammi circa per i conigli; mentre nelle cavie, come è noto, la cataratta da naftalina insorge con difficoltà, sicchè è necessario insistere nelle somministrazioni per avere cataratte complete, nei conigli invece basta, il più delle volte, una sola dose perchè si manifesti la cataratta rilevabile all'esame oftalmoscopico; tale cataratta evolve anche se si sospende il trattamento naftalinico.

Per comodità di esposizione riferirò i reperti suddividendoli in tre gruppi, comprendendo nel primo le alterazioni rilevabili all'esame istologico

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 agosto 1927.

(2) Le presenti ricerche, iniziate sotto la direzione del *prof. Levi*, nell'Istit. Anat. di Torino, ed in parte comunicate a quella R. Accad. di Medicina (1924), sono state ultimate nella Clin. Oculist. di Bologna.

(3) A. BUSACCA, R. Acc. Lincei, 1924.

(4) D. CATTANEO, *Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina. — I. Struttura del cristallino normale*, « Rend. R. Acc. Lincei », 1927.

quando gli esami ad illuminazione laterale od aftalmoscopico non ci fanno apprezzare lesioni a carico del cristallino, nel secondo le alterazioni che si riscontrano quando l'esame oftalmoscopico si fa diagnosticare una cataratta incipiente; nel terzo infine le alterazioni nelle forme complete di cataratta.

a) *Alterazioni istologiche con reperto macroscopico negativo.* — Tali alterazioni si osservano facilmente già entro le prime 24 ore dalla somministrazione di naftalina. Nelle cavie le ho riscontrate anche a 4 giorni di distanza da un'unica somministrazione di 1 gr. di naftalina. Nel citoplasma delle fibre corticali, che conserva tuttavia il suo aspetto limpido, troviamo in un primo tempo i condriosomi di aspetto perfettamente normale, ma si nota la comparsa di goccioline più refrangenti isolate e sparse qua e là, oppure riunite in piccoli mucchi (fig. 2a).

In fasi un po' più progredite osserviamo che in alcuni gruppi di fibre un segmento più o meno esteso di citoplasma, nella parte della fibra che prende contatto con la capsula o con l'epitelio, è trasformato in un cumulo di goccioline di varia grossezza; tra esse si notano ancora i condriosomi che non appaiono alterati (fig. 1a). Nelle prime 48 ore dall'ingestione di naftalina non mi è riuscito rilevare la comparsa di alterazioni al di fuori del citoplasma delle fibre. Esse invece erano presenti nel cristallino di animali a 4 giorni di distanza da un'unica ingestione di naftalina, ma in quantità molto scarsa e rappresentate da goccioline uniche o a forma di semi elissoidi accoppiati, situate tra fibra e fibra. In questi cristallini le fibre corticali presentavano più o meno pronunziate le alterazioni già descritte; si notava inoltre un certo grado di torbidezza del citoplasma e delle alterazioni a carico dei condriosomi. Questi apparivano tortuosi, spezzettati; e spesso le estremità terminavano in un rigonfiamento a clava; alcuni sembravano trasformati in una catena di goccioline.

In animali nei quali era stata eseguita anche la colorazione vitale con tripanblau (da notare che gli animali da me adoperati, e specialmente i conigli, tollerano male i colori vitali dopo il trattamento naftalinico, e facilmente soccombono), le goccioline che compaiono nel cristallino dopo il trattamento naftalinico, siano esse intra che extra citoplasmatiche, non assumo i colori vitali.

b) *alterazioni istologiche nello stadio di cataratta incipiente.* — In questi stadii il reperto è diverso a seconda che la nostra osservazione cade sui fasci di fibre opacate o su quelle che all'esame macroscopico appaiono trasparenti. In queste ultime le alterazioni sono identiche a quelle dello stadio precedente. Nelle fibre dei fasci opacati invece troviamo aspetti diversi.

In alcuni casi, specialmente nelle fibre più periferiche, il citoplasma, nel quale i condriosomi sono ben conservati, è cosparso di abbondanti mucchietti di goccioline e granuli più refrangenti (fig. 1b). In altri punti ancora il citoplasma è fittamente cosparso di goccioline più refrangenti di varia

groschezza in mezzo alle quali s'intravedono condriosomi più o meno alterati (fig. 1 c).

Si nota inoltre la esistenza di fibre o di tratti di fibra nelle quali tutto il citoplasma è trasformato in una massa di piccoli granuli che nel complesso danno alla fibra un aspetto torbido granuloso; i condriosomi o non sono più visibili o sono molto alterati.

Anche in questi stadi mancano della corticale o sono molto scarse le gocce tra fibra e fibra; esse si trovano invece in discreta quantità, e con i caratteri descritti precedentemente, negli strati periferici del nucleo.



Fig. 1.

- a) Nel citoplasma delle fibre si osservano gocce più refrangenti all'estremità delle fibre e filamenti mitocondriali. Da cristallino di cavia 48 ore dopo una unica somministrazione di gr. 1 di naftalina. Ingrandimento 1500 diametri. — b) Filamenti mitocondriali e goccioline più refrangenti, a mucchi nel citoplasma. Da cristallino di cavia 48 ore dopo due somministrazioni a giorni alterni di 1 gr. di naftalina. Ing. 1500 diam. — c) Fibre con citoplasma ripieno di gocce più refrangenti. Condriosomi alterati. Da cristallino di coniglio 48 ore dopo due somministrazioni a giorni alterni di 2 gr. di naftalina. Ing. 1500 diam.

Al pari che degli stadi precedenti mancano qui alterazioni nelle fibre nucleari.

c) *alterazioni istologiche nello stadio di cataratta completa.* — In questo stadio le alterazioni sono diverse a seconda che portiamo la nostra osservazione sulle fibre più periferiche della corticale o su quelle profonde. Nelle fibre periferiche il citoplasma conserva la sua consistenza fluida sicchè alla rottura delle fibre, la parte più liquida fuoriesce dando luogo ai ben

noti cumuli di gocce; il citoplasma di queste fibre è torbido perchè di aspetto granuloso; si notano in esso goccioline più refrangenti, mancano invece i condriosomi; tra le fibre non si riscontrano vacuoli.

Nelle fibre corticali profonde e nelle periferiche del nucleo il citoplasma è uniformemente e finemente granuloso, non si trovano più in esso nè goccioline più refrangenti, nè condriosomi. Le fibre hanno una spiccata fragilità, ma in seguito alla rottura di esse non si osserva fuoriuscita di contenuto liquido; si ha l'impressione di trovarsi di fronte a sostanze

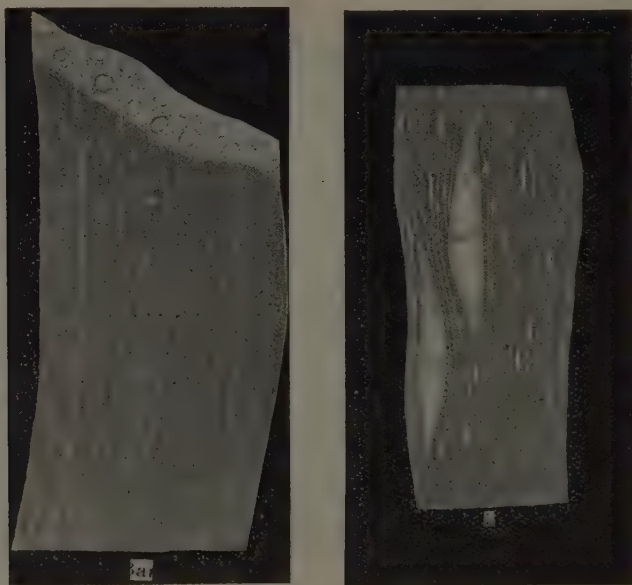


Fig. 2.

- a) Fibre con gocce più refrangenti sparse qua e là nel citoplasma; condriosomi di aspetto normale. Da cristallino di cavia 24 ore dopo una unica somministrazione di 1 gr. di naftalina. Ing. 1000 diam.
— b) Fibre opacate del cristallino di coniglio a due mesi dall'inizio del trattamento naftalinico. Gocce e spazi ripieni di gocce tra le fibre. L'aspetto torbido del citoplasma non è messo in evidenza nella riproduzione. Ing. ridotto a 275 diam.

coagulate o disseccate. Tra le fibre esistono vacuoli abbondanti che in generale non oltrepassano i 10 μ di grandezza; in massima parte sono ripieni di una sostanza omogenea; talvolta la sostanza che li costituisce ha struttura a lamine concentriche; qua e là si riscontrano tra le fibre grossi spazi losangici nei quali sono annicchiati un certo numero di grossi vacuoli, di aspetto omogeneo, immersi in una sostanza meno refrangente (fig. 2 b).

Nelle fibre nucleari non si rilevano alterazioni. Se coloriamo vitalmente gli animali con cataratta in questo stadio, osserviamo che gli strati più

corticali assumono una lieve tinta diffusa, della quale non troviamo però traccia all'esame microscopico. Nè le goccioline presenti nel citoplasma nè i vacuoli notati tra le fibre, assumono i colori vitali; la sostanza che riempie gli spazi losangici sudescritti si colora invece vitalmente, e restano scolorate le gocce in essa sospese.

RIASSUMENDO.

Le prime alterazioni che si hanno sulle fibre cristalline in animali ai quali è stata somministrata della naftalina per via orale, sono intracitoplasmatiche e consistono nella comparsa di goccioline più refrangenti dentro il citoplasma delle fibre più periferiche.

Tali goccioline in un primo tempo aumentano di numero sino a riempire tutta la fibra; contemporaneamente si notano alterazioni a carico del condrioma che si spezzetta e scompare.

In un secondo tempo le alterazioni si estendono alle fibre più profonde; il citoplasma assume aspetto opaco e finemente granuloso; non sono più visibili in esso goccioline refrangenti o condriosomi. Si accentuano frattanto le alterazioni extra citoplasmatiche (che nelle fasi iniziali erano molto scarse) consistenti nella comparsa di gocce tra fibra e fibra, alterazioni che si estendono anche agli strati superficiali del nucleo, ma che non interessano mai gli strati profondi di esso.

Fisiologia vegetale. — *Contributo allo studio della fluorescenza del clorocroma ai raggi ultravioletti*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ della dottoressa G. TESTI DRAGONE, presentata dal Socio P. R. PIROTTA.

Credo opportuno dare comunicazione di alcune osservazioni da me fatte sottoponendo alle radiazioni ultraviolette filtrate di una lampada di quarzo a vapori di mercurio, ossia alle radiazioni di lunghezza d'onda di circa 3650 U. A. soluzioni alcooliche di clorocroma preparate ponendo in alcool etilico parti verdi di piante diverse. La lampada di cui mi servo è l'Hanau munita di filtro « Uviol ».

Esponendo ai raggi della zona dell'ultravioletto attivo le soluzioni alcooliche di clorocroma preparate di fresco (24 ore circa) estratto tanto da Clorofite (*Chaetomorpha*), quanto da Briofite (*Marchantia polymorpha*), quanto da foglie di piante superiori, ho constatato in alcuni casi la fluorescenza rosso vinoso già descritta dal Petri⁽³⁾, che ho riscontrato in estratti di fo-

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1927.

(3) PETRI L., *Sul metodo di applicazione della luce di Wood in alcune ricerche di Patologia vegetale*. « Atti R. Acc. Lincei », 1927, vol. V, fasc. I.

glie di piante legnose sempre verdi, ed in altri casi, più numerosi, fluorescenza rosso vivo, specialmente in Clorofite, in Briofite, ed in piante superiori erbacee; quindi la tonalità del rosso è dipendente dalla pianta dalla quale fu fatta l'estrazione, e può dipendere anche da altre sostanze che possono venire asportate dall'alcool insieme con il clorocroma. Così per esempio l'alcool estrae gli alcaloidi, gli oli essenziali, ecc., aventi spesso diverse fluorescenze, talora azzurre o violette, che possono rendere la fluorescenza rosso vivo del clorocroma, rosso violaceo, rosso vinoso, ecc., come può accadere ad esempio per il *Nerium Oleander*, che nel lattice contiene un principio a fluorescenza azzurra splendente.

I clorocromi da me esaminati si possono disporre in modo da formare tutta una scala, secondo le diverse tonalità del rosso, andando dal rosso vivo al rosso violaceo, per esempio nell'ordine seguente:

Clorocroma di	<i>Chaetomorpha</i>
»	» <i>Urtica membranacea</i>
»	» <i>Trifolium repens</i>
»	» <i>Arundinaria japonica</i>
»	» <i>Marchantia polymorpha</i>
»	» <i>Cinnamomum Camphora</i>
»	» <i>Viburnum Tinus</i>
»	» <i>Nerium Oleander</i>

Separando il clorocroma, mediante l'aggiunta di benzolo, nei suoi pigmenti verdi e gialli, ho notato che la parte verde mantiene la fluorescenza rossa caratteristica, mentre la parte gialla assume un aspetto bianco lattiginoso alla luce riflessa, e giallo a quella incidente.

Facendo evaporare l'alcool dall'estratto clorocromico, ho trovato che alcuni di questi estratti conservano la fluorescenza rossa, mentre altri la perdono del tutto. Se però il clorocroma di questi secondi, dopo che ha perduto ogni fluorescenza in seguito all'evaporazione dell'alcool, si ridiscioglie, anche dopo parecchi giorni, nell'alcool od in altri appropriati solventi, istantaneamente riprende la fluorescenza sua caratteristica, e la mantiene fino a che il solvente non sia di nuovo allontanato.

Esaminando invece gli estratti che conservano la fluorescenza rossa anche dopo evaporato il solvente, ho trovato che ciò avviene, perchè in essi il clorocroma si trova disciolto in quella sostanza chimicamente ancora poco definita, e che dal Meyer⁽¹⁾ fu chiamata « mesecreto ». Questo fatto interessante ho osservato nell'estratto etero delle foglie di due anni di *Viburnum Tinus*.

Ho voluto verificare sperimentalmente, se la fluorescenza si mantiene anche quando il clorocroma è sciolto, invece che nel mesecreto, in altri sol-

(1) MEYER A., *Morphologische und Physiologische Analyse der Zelle der Pflanzen und Tiere*. Jena, Fischer 1920.

venti. Con questo intento ho agitato l'estratto alcoolico di clorocroma di una ortica (*Urtica membranacea*) con olio di ricino e l'ho esposto ai raggi ultravioletti, ottenendo la caratteristica fluorescenza rossa, che permane anche dopo l'evaporazione dell'alcool, perchè il clorocroma resta disciolto nell'olio.

Dunque il clorocroma, quando non è in soluzione, non mostra alcuna fluorescenza. Ciò possiamo immaginare, ammettendo l'esistenza di un gruppo centrale fluorescente, circondato da gruppi non fluorescenti. I solventi, allontanando i diversi gruppi fra loro, permetterebbero al gruppo centrale di mostrare la sua fluorescenza. È molto probabile che la fluorescenza rossa sia dovuta alla filloporfirina, allontanata sufficientemente dagli altri gruppi dell'azione del solvente. Ecco perchè quando si hanno dei solventi naturali del clorocroma, comè mesecreto, grassi; ecc., anche dopo l'allontanamento dell'alcool, permane la fluorescenza rossa.

Ho voluto ancora verificare se nelle piante vive esaminate al microscopio illuminato esclusivamente dai raggi ultravioletti filtrati, il clorocroma contenuto nei cloroplasti fosse fluorescente, ed ho constatato che tutte le parti contenenti cloroplasti delle piantine vive di *Chaetomorpha* e di *Chara*, montate su porta oggetti, ed osservate in una goccia di acqua di fonte, spiccavano nettamente in rosso vivo sul fondo violaceo del campo, mentre altre parti non verdi, come per esempio gli zigoti bruni di *Chara* e i rizoidi non presentavano la fluorescenza rossa. Bellissimo è l'esame microscopico dei fili di *Spirogyra*, che mostrano i cloroplasti a guisa di nastri di color rosso fuoco. Ho esposto direttamente ai raggi ultravioletti filtrati, parti verdi vive, sia di Clorofite, sia di piante superiori. Alcune piante come *Spirogyra*, *Chaetomorpha*, *Elodea canadensis*, foglie di *Urtica membranacea*, di *Trifolium repens*, di *Pelargonium sp.* mostrano una fluorescenza più o meno viva, talora vivissima come nella *Spirogyra*, nella *Chaetomorpha*, nell'*Elodea*, ecc., talora meno viva come nel *Pelargonium*. Ma se in questo ultimo facciamo una sezione tangenziale, vediamo che la massa del mesofillo sotto il taglio fresco, presenta la fluorescenza rosso fuoco caratteristica. Però non tutte le parti verdi delle piante osservate direttamente ai raggi ultravioletti mostrano la fluorescenza rossa. Alcune, come l'*Agave americana* (fol. varieg.), mostrano la fluorescenza giallastra. Se in questo caso togliamo la spessa cuticola, vediamo che solo quest'ultima ha una fluorescenza nettamente gialla; la parte della pagina inferiore decutinizzata mostra fluorescenza rosso cupo, mentre la pagina superiore, trattata allo stesso modo, si presenta bleu scuro. Gratando però leggermente, si vede al di sotto di questo strato, che è sottile, la fluorescenza rossa del clorocroma. Facendo una sezione trasversale, ed esponendola ai raggi ultravioletti, si vede lo strato di cuticola giallo; al di sotto di esso, nella pagina superiore, uno strato scuro, mentre tutto il mesofillo rimane rosso chiaro verso la porzione mediana, e cupo verso la pagina inferiore. Nella massa rossa mediana spiccano i fasci vascolari sparsi

con fluorescenza azzurro chiaro, mentre le strisce clorotiche si mostrano azzurro chiaro splendente.

Anche nel *Cinnamomum Camphora*, nel *Pinus Laricio*, ecc., la fluorescenza rossa del clorocroma viene mascherata da quella gialla della spessa cuticola.

Nel *Nerium Oleander* poi, a questo fatto dipendente dalla fluorescenza della cuticola, si aggiunge quello della fluorescenza di altre sostanze. Sul taglio trasversale fresco fatto su di una foglia abbastanza giovane, si osserva prima la fluorescenza rossa del clorocroma, mentre detta superficie si va imperlando di minute goccioline con fluorescenza azzurro chiaro, che lentamente confluiscono le une nelle altre fino a ricoprire totalmente la sezione cambiando la fluorescenza da rossa ad azzurra.

Quindi la cuticola, ed altre sostanze che si trovano nelle parti verdi, contribuiscono ad assorbire e trasformare le radiazioni ultra violette.

Altre volte la fluorescenza rossa comparisce dopo che le parti verdi sono state per un tempo sufficiente immerse in acqua, cosa che può produrre una alterazione nei tessuti superficiali, in modo da permettere ai verdi sottostanti di presentare il noto fenomeno.

Le mie osservazioni microscopiche fatte direttamente su materiale vivo corrispondono nei risultati a quelli dello Stern⁽¹⁾ fatte su preparati esaminati con luce bianca filtrata con vetro bleu ed esaminate al microspettroscopio. Sia le osservazioni microscopiche sia le macroscopiche su parti verdi confermano, che il fatto importante della fluorescenza rossa del clorocroma, ossia della sua particolare struttura molecolare, che gli permette di trasformare le radiazioni cortissime invisibili dell'ultravioletto in radiazioni di lunghezza d'onda tra i 7000-6000 e i 5550 U. A. circa, e appartenenti cioè allo spettro visibile, avviene quando il clorocroma si trova nei cloroplasti in una soluzione che possiamo chiamare vitale.

Un rametto di *Elodea canadensis* posto in acqua di fonte, ai raggi ultravioletti filtrati, mostra dopo un tempo sufficiente le sue foglioline imperlate di numerose bolle luminose di gas, che suppongo essere ossigeno (ciò mi riserbo di confermare in seguito), mentre altri rami di controllo preparati allo stesso modo e lasciati al buio non ne presentano.

Concludendo il clorocroma mostra ai raggi ultravioletti una fluorescenza rossa di diverse gradazioni; tale fluorescenza si ottiene «in vitro» solo quando il clorocroma è in soluzione; è visibile nei cloroplasti vivi, ciò che dimostra che si trova in essi nella soluzione vitale atta a trasformare le radiazioni ultraviolette della lunghezza d'onda di 3650 U. A. in radiazioni rosse e gialle utilizzate dalle piante nei processi di fotosintesi.

N. P.

(1) STERN K., *Ueber die Fluoreszenz des Chlorophylls und ihre Bedeutung beim Assimilationsprozess.* «Zeitschr. f. Bot.», 13, 193 1921.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1927 (Anno V).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo).

Idromeccanica. — *Sui vortici spirali.* Nota ⁽¹⁾ del Socio Corrispondente U. CISOTTI.

I. — UNA FORMULA PRELIMINARE.

Se $w = u + iv$ è funzione di $z = x + iy$, u e v risultano le componenti cartesiane della velocità di un moto liquido piano irrotazionale permanente.

Il potenziale cinetico risulta legato a w dalla nota relazione:

$$(1) \quad w = \frac{df}{dz}, \quad \text{con } f = \varphi + i\psi,$$

φ = potenziale di velocità, ψ = funzione corrente. Ciò è ben noto.

Sia l una linea che racchiude un'area semplice, appartenente al piano del moto. Per (1) si ha:

$$(2) \quad \int_l w dz = \int_l df = \int_l d\varphi + i \int_l d\psi,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1927.

(2) V. la mia *Idromeccanica piana*, parte I [Milano, 1921], p. 2. È facile dedurre, accanto alla (:) del loco citato, la relazione $\frac{\partial \psi}{\partial s} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$.

intendendosi effettuata l'integrazione immaginando di percorrere l in modo da lasciare alla sinistra l'area racchiusa. Il primo integrale del secondo membro è la *circolazione sinistrorsa*:

$$(3) \quad C = \int_l d\varphi = \int_l (u dx + v dy);$$

il secondo integrale è il *flusso uscente da l*:

$$(4) \quad q = \int_l d\psi = \int_l \frac{d\psi}{dl} dl = - \int_l \frac{d\varphi}{dn} dl,$$

essendo n normale a l , volta verso l'interno⁽¹⁾ ed avendo assunto $= 1$ la densità del liquido.

Per (3) e (4) la (2) può scriversi:

$$(5) \quad \int_l w d\chi = C + iq.$$

I classici teoremi di Cauchy ci assicurano che l'integrale del primo membro è identicamente nullo se w è regolare entro l ed eguale al prodotto di $2\pi i$ per la somma dei residui di w relativi a punti, non esterni a l , nei quali w presenta singolarità.

Se l è linea di flusso è $q = 0$, si ritrova allora il risultato noto:

$$(5') \quad \int_l w d\chi = C.$$

2. - UNA NOTEVOLE SOLUZIONE ELEMENTARE.

Si consideri il moto piano definito dal potenziale cinetico:

$$(6) \quad f = \frac{a + ib}{2\pi} \log \chi,$$

dove a e b designano costanti reali, comunque assegnate. La velocità corrispondente risulta determinata, per (1), dalla relazione:

$$(7) \quad w = \frac{a + ib}{2\pi \chi}.$$

Applicando la formula (5) alla funzione w , definita da (7), si ottiene:

$$\int_l w d\chi = \begin{cases} 0, & \text{se } l \text{ non racchiude il punto } \chi = 0, \\ -b + ia, & \text{se } l \text{ circonda il punto } \chi = 0; \end{cases}$$

per cui quest'ultima, per la (5), si scinde nelle due seguenti relazioni:

$$(8) \quad b = -C, \quad a = q;$$

da queste emerge il significato di a e b : a è il *flusso uscente* dal punto $z = 0$ e b è la *circolazione destrorsa* attorno al medesimo punto.

3. - LINEE EQUIPOTENZIALI E LINEE DI FLUSSO.

Dalla (6), ponendo $f = \varphi + i\psi$, $z = \rho e^{i\theta}$ e separando la parte reale dalla parte immaginaria, si ottiene:

$$(9) \quad \varphi = \frac{1}{2\pi} (a \log \rho - b\theta), \quad \psi = \frac{1}{2\pi} (b \log \rho + a\theta).$$

Queste relazioni caratterizzano le linee equipotenziali di velocità ($\varphi = \text{costante}$) e le linee di flusso ($\psi = \text{costante}$).

4. - SORGENTE.

Se $b = 0$, le precedenti divengono:

$$\varphi = \frac{a}{2\pi} \log \rho, \quad \psi = \frac{a}{2\pi} \theta.$$

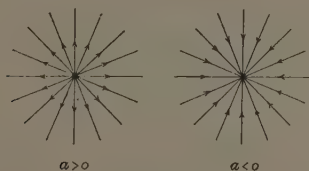


Fig. 1.

Dalla prima di queste scende che le linee equipotenziali sono circonferenze concentriche di centro $z = 0$ e la seconda esprime che le linee di flusso sono i raggi $\theta = \text{costante}$, uscenti dal punto $z = 0$, mentre la prima delle (8) assicura essere $C = 0$, cioè nulla la circolazione: la (6) definisce allora (ciò è ben noto) il moto dovuto a una sorgente puntiforme (Fig. 1).

5. - VORTICE SPIRALE.

Se b è diverso da zero, dalla seconda di (9) si ricava:

$$(10) \quad \rho = e^{\frac{2\pi\psi - a\theta}{b}},$$

dalla quale risulta che le linee di flusso sono spirali logaritmiche.

Si hanno i casi messi in rilievo nella figura 2.

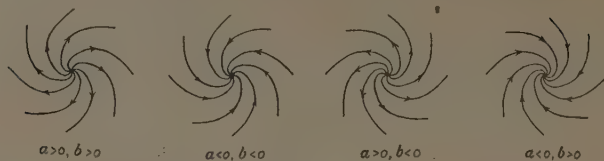


Fig. 2.

Se è $a \neq 0$ dalla prima delle (9) si deduce l'equazione

$$(11) \quad \rho = e^{\frac{2\pi\varphi + b\theta}{a}},$$

che caratterizza le linee equipotenziali di velocità: si tratta ancora di spirali logaritmiche che incontrano ortogonalmente le linee di flusso (10).

6. - VORTICE CIRCOLARE.

Se è $a = 0$, dalla (9) si ha:

$$\varphi = -\frac{b}{2\pi}\theta,$$

le linee equipotenziali sono raggi uscenti dall'origine. La (10) fornisce allora:

$$\rho = e^{\frac{2\pi\psi}{b}},$$

cioè le linee di flusso sono circonferenze concentriche col centro nell'origine. In tal caso, per le (8), si ha solo una circolazione attorno all'origine, senza alcun flusso dalla stessa: è il caso tipico del vortice circolare (fig. 3).



Fig. 3.

Dopo ciò risulta dalla (6) che il vortice spirale proviene dalla composizione dei moti dovuti a una sorgente e a un vortice circolare, sovrapposti.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Fascio di quadriche di Darboux e normale proiettiva in un punto di una superficie.* Nota ⁽¹⁾ di E. BOMPIANI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. In ogni punto O (generico) di una superficie σ (dello spazio ordinario) è definita una *quadrica di Lie* (invariante per applicabilità proiettive): questa e il piano tangente (contato due volte) individuano un fascio di quadriche (*fascio di Darboux*).

Per individuare un elemento generico del fascio occorre trovare un'altra quadrica caratterizzata geometricamente. Esiste effettivamente una quadrica la cui definizione (n. 2) è molto simile a quella del Lie ⁽²⁾.

Ciò fatto, ogni quadrica di Darboux Q è caratterizzata da un birapporto. Si considerino allora le ∞^2 quadriche (costruite per gli ∞^2 punti della superficie) caratterizzate da uno stesso valore del birapporto e le falde dell'involuppo: si trova che su ogni quadrica vi sono (al di fuori del punto di partenza) quattro punti (caratteristici) di contatto con l'involuppo; soltanto per la quadrica di Lie essi sono vertici di un quadrangolo sghembo (di Demoulin) di cui quattro lati appartengono alla quadrica stessa.

Per ogni quadrica di Darboux Q (relativa ad O) si costruisca il cono quadrico che contiene una tangente asintotica e i quattro punti di contatto di Q con l'involuppo; questo cono tocca il piano tangente a σ in O lungo la tangente asintotica considerata. Variando Q nel fascio si ha (per ciascuna tangente asintotica) un fascio di coni: uno dei coni degeneri (da contarsi due volte) è la coppia di piani relativi alla quadrica di Lie (contenenti la tangente asintotica e i due lati ad essa incidenti del quadrangolo di Demoulin); l'altro è composto del piano tangente e del piano contenente l'altra tangente asintotica e la normale proiettiva. Questa risulta quindi determinata, come intersezione di due piani, da due delle quadriche (non degeneri) del fascio di Darboux. Un'altra caratterizzazione è questa: la curva luogo dei punti caratteristici relativi alle quadriche di Darboux in O tocca ivi (con un ramo) la normale proiettiva.

Il piano osculatore a questo ramo è invariante (per collineazioni) e fornisce, col piano canonico e i due piani normali per le tangenti asintotiche, un birapporto invariante.

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1927.

(2) Varie costruzioni di questa quadrica, insieme ad altre ricerche si trovano nella mia Nota: *Ein Analogon der Quadratik von Lie in der projektiven Flächentheorie* («Math. Zeitschrift»; in corso di stampa).

2. Darò un cenno della ricerca, e qualche precisazione dei risultati.

La quadrica di Lie può definirsi così: da O e da due punti infinitamente vicini sopra un'asintotica si conducano le tangenti asintotiche dell'altro sistema; queste tre rette individuano la quadrica di Lie, L; questa dipende dall'intorno del 4° ordine di O e non cambia scambiando nella costruzione i due sistemi di asintotiche; è invariante per applicabilità proiettive.

La nuova quadrica, M, che propongo di considerare, si ottiene in modo del tutto analogo prendendo i tre punti infinitamente vicini non sopra una asintotica, ma sopra una tangente asintotica⁽¹⁾: e gode delle stesse proprietà enunciate per L.

Se $x^i(u, v)$ sono coordinate proiettive omogenee dei punti di σ , riferita alle asintotiche ($du = 0$ oppure $dv = 0$), normalizzate al modo di Fubini esse soddisfano ad un sistema del tipo⁽²⁾

$$(1) \quad \begin{cases} x_{uu} = \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} x_u + \beta x_v + \alpha x \\ x_{vv} = \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial v} x_v + \gamma x_u + \nu x \end{cases} \quad \left(x_u = \frac{dx}{du}, \dots \right).$$

Se X^i sono le coordinate di un punto generico dello spazio si costruiscano i determinanti

$$(2) \quad \begin{aligned} T &= |X, x, x_u, x_v|, & N_1 &= |X, x, x_u, x_{uv}|, \\ N_2 &= |X, x, x_u, x_{uv}|, & \Omega &= |X, x_u, x_v, x_{uv}|; \end{aligned}$$

$T = 0$ rappresenta il piano tangente; $N_1 = 0$ e $N_2 = 0$ i piani per una tangente asintotica e per la normale proiettiva; $\Omega = 0$ il piano opposto ad O del tetraedro fondamentale. Si ponga pure

$$(3) \quad H = -\frac{1}{\beta \gamma} \left(\frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v} + \beta \gamma \right) \text{ curvatura proiettiva media}$$

$$(4) \quad h_1 = \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u}, \quad h_2 = \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial v},$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial v} (\beta h_2) - \gamma h_1 - 2\nu, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial v} (\gamma h_1) - \beta h_2 - 2\alpha.$$

(1) In termini precisi: si consideri una curva di σ uscente da O e la rigata delle tangenti asintotiche (di uno dei due sistemi) uscenti dai suoi punti; questa rigata ha in O una quadrica osculatrice. Se la curva ha in O un flesso, detta quadrica è la M. Ricerche più generali sulle quadriche asintotiche osculatrici trovansi nelle mie Note: *La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato*, e *Ancora sulla geometria*, ecc. (« Rend. Acc. Lincei », vol. III, 1926, pp. 396-400 e vol. IV, 1926, pp. 262-267).

(2) FUBINI e CECI, *Geometria proiettiva differenziale* (vol. I, Zanichelli, Bologna, 1927); non è affatto necessario ricorrere alla normalizzazione di Fubini; ma, trattandosi di dare una costruzione della sua normale proiettiva, essa rende i calcoli più spediti.

L'equazione della quadrica di Lie è

$$(5) \quad L \equiv 2(T\Omega - N_1 N_2) + \beta \gamma HT^2 = 0$$

e quella della nuova quadrica M è

$$(6) \quad M \equiv 2(T\Omega - N_1 N_2) + \beta \gamma (H + 1) T^2 = 0.$$

Una quadrica generica del fascio di Darboux ha un'equazione

$$(7) \quad Q_\theta \equiv 2(T\Omega - N_1 N_2) + \beta \gamma (H + \theta) T^2 = 0$$

e il suo birapporto con $L = 0$, $M = 0$, $T^2 = 0$ è

$$(Q_\theta, M, L, T^2) = (\theta, 1, 0, \infty) = \theta.$$

3. Supponiamo ora $\theta = \text{costante}$ (cioè indipendente da u, v); e cerchiamo l'involuppo delle $\infty^2 Q_\theta$. Sulla superficie involuppo, oltre la (7), valgono le equazioni⁽¹⁾

$$(8) \quad 2N_2^2 + 2b_2 TN_2 + \Gamma_1 T^2 - 2\gamma\theta TN_1 = 0$$

$$(9) \quad 2N_1^2 - 2b_1 TN_1 + \Gamma_2 T^2 + 2\beta\theta TN_2 = 0$$

le quali, con la (7), determinano i punti caratteristici di Q_θ .

Esse rappresentano i coni quadrici di vertice O passanti per questi quattro punti e rispettivamente per le tangenti asintotiche $N_2 = 0$ oppure $N_1 = 0$ (e $T = 0$). Al variare di θ , fisso O, i coni (8) descrivono un fascio che contiene la coppia di piani relativa alla quadrica di Lie ($\theta = 0$) e la coppia di piani $T = 0$ ed $N_1 = 0$. Analogamente per i coni (9); i due piani $N_1 = 0$, $N_2 = 0$ determinano la normale proiettiva.

4. La curva caratteristica di O (luogo dei punti caratteristici delle quadriche di Darboux in O) appartiene alle superficie

$$(10) \quad 2\beta N_1^3 + 2\gamma N_1^3 + 2\beta b_2 TN_2^2 - 2\gamma b_1 TN_1^2 + \beta \Gamma_1 N_2 T^2 + \gamma \Gamma_2 N_1 T^2 = 0$$

$$(11) \quad 2\beta TN_2^2 + 2b_2 \beta T^2 N_2 + \beta \Gamma_1 T^3 + 2\beta \gamma HT^2 N_1 + 4(T\Omega - N_1 N_2) N_1 = 0$$

$$(12) \quad 2\gamma TN_1^2 - 2b_1 \gamma T^2 N_1 + \gamma \Gamma_2 T^3 - 2\beta \gamma HT^2 N_2 - 4(T\Omega - N_1 N_2) N_2 = 0$$

La prima è il cono proiettante da O la curva: questo taglia il piano $T = 0$ nelle tangenti di Segre (e i piani tangenti lungo esse al cono passano per la retta di Segre⁽²⁾, cioè sono osculatori alle linee di Segre in O);

(1) Per le derivate delle (2) che intervengono nel calcolo vedasi la mia Nota: *Contributo alla teoria proiettivo-differenziale*, ecc. («Boll. Unione Matem. Ital.», 1923).

(2) Trovata da CECH.

e il piano $N_1 = 0$ nella normale proiettiva e nelle due rette appartenenti ai piani passanti per l'altra tangente asintotica e per due lati del quadrangolo di Demoulin.

La (11) [e analogamente la (12)] è una superficie cubica avente in O un punto doppio biplanare con i piani tangenti $T = 0$, $N_1 = 0$, e avente in comune col cono proiettante da O le ultime due rette.

Una rappresentazione parametrica adeguata della curva caratteristica è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \mu_1^2 \mu_2 \mu_3, \quad N_2 = \mu_1 \mu_2^2 \mu_3, \quad T = \mu_1 \mu_2 \mu_3^2 \\ \Omega = \mu_1^2 \mu_2^2 - \frac{1}{2} \beta \gamma H \mu_1 \mu_2 \mu_3^2 - M \mu_3 \end{array} \right.$$

ove M è il valore comune dei due membri

$$\frac{1}{2} \beta \mu_2 \left(\mu_1^2 + b_2 \mu_2 \mu_3 + \frac{1}{2} \Gamma_1 \mu_3^2 \right) = - \frac{1}{2} \gamma \mu_1 \left(\mu_1^2 - b_1 \mu_1 \mu_3 + \frac{1}{2} \Gamma_2 \mu_3^2 \right)$$

la cui uguaglianza lega appunto i tre parametri (omogenei) $\mu_1 \mu_2 \mu_3$.

Si verifica facilmente su questa rappresentazione, come risulta dalle considerazioni precedenti, che un ramo della curva caratteristica uscente da O (precisamente per $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\mu_3 \neq 0$) è tangente alla normale proiettiva: il piano ad esso osculatore in O ha l'equazione

$$\gamma \Gamma_2 N_1 + \beta \Gamma_1 N_2 = 0;$$

il birapporto di questo col piano canonico e con i due piani asintotici normali è $\beta b_2 \Gamma_1 | \gamma b_1 \Gamma_2$ invariante per collineazioni.

5. Come si vede, la conoscenza delle due quadriche L ed M del fascio di Darboux permette di costruire le tangenti di Segre (quindi quelle di Darboux), la retta di Segre, la retta di Wilczynski (per O, appoggiata ai due lati del quadrangolo di Demoulin non appartenenti ad L) e la normale proiettiva di Fubini: cioè tutti gli elementi geometrici più notevoli relativi ad una superficie proiettivamente considerata.

Matematica. — *Sulle matrici di Riemann.* Nota ⁽¹⁾ di C. ROSATI, presentata dal Socio E. BERTINI.

Data una matrice di *Riemann* del genere p , di cui h e k sono gl'indici di moltiplicabilità e di singolarità ⁽²⁾, esistono $\mu = h + 1$ forme bilineari indipendenti a coefficienti razionali in due serie di $2p$ variabili, ciascuna delle quali si annulla sostituendo a queste variabili gli elementi di due righe distinte o coincidenti) di ω ; e nell'insieme dedotto combinando linearmente con coefficienti razionali le forme suddette si trovano $\mu_1 = k + 1$ forme alternate e $\mu_2 = h - k$ forme simmetriche. Al suddetto insieme di forme bilineari si può poi associare un insieme di sostituzioni lineari a coefficienti razionali sopra una serie di $2p$ variabili, cui corrisponde un insieme G di omografie razionali in uno spazio S_{2p-1} . L'insieme G è un gruppo discontinuo e dicesi *gruppo di moltiplicabilità* della matrice; ed è noto che il corpo di funzioni abeliane legato ad ω ammette o no moltiplicazioni complesse secondochè il gruppo G non si riduce ovvero si riduce alla sola identità. Nello studio delle funzioni abeliane a moltiplicazione complessa è di capitale importanza la ricerca della struttura del gruppo G ; tale ricerca è fatta nel presente lavoro i cui risultati, per la loro semplicità e generalità, mi sembrano degni di qualche rilievo.

Se ρ è il rango della matrice, è noto che l'omografia generica Ω del gruppo G possiede ρ spazi fondamentali distinti ed appartenenti a S_{2p-1} . Ora è notevole il fatto che questi spazi si distribuiscono in gruppi, ciascuno dei quali, al variare di Ω entro G , si muove in una schiera di una varietà di Segre a due indici. Si ottiene in tal modo un certo numero t di varietà di Segre $W_1 W_2 \dots W_t$, ciascuna delle quali è mutata in sè dal gruppo G , che diciamo *varietà invarianti minime* del gruppo di moltiplicabilità. Se la matrice ω è pura, ovvero è impura ma priva di assi isolati, tali varietà hanno tutte i medesimi indici e presentano tutte uno dei tre aspetti seguenti: o sono reali con infiniti spazi reali; o sono immaginarie, a due a due coniugate, appartenenti a spazi totalmente immaginari; o sono reali ma prive di punti reali. Appena siano noti i due indici di una delle varietà suddette, si ottengono nei tre casi, mediante formule semplicissime, i caratteri μ ,

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1927.

(2) Per la definizione di *matrici di Riemann* e per le nozioni che ad essa si connettono, veggansi le Memorie fondamentali dello SCORZA: a) *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni* (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XLI, 1916, pp. 263-379); b) *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann* (ibid., t. XLV, 1921, pp. 1-204).

μ_1, μ_2 e il rango ρ della matrice. Quando ω possiede assi isolati, le varietà invarianti contenute in ciascun asse isolato minimo hanno comuni gl'indici e sono tutte della medesima specie. Se dunque per ciascun asse isolato minimo sono noti gl'indici e la specie di una delle varietà invarianti in esso contenute, saranno determinati i caratteri μ, μ_1, μ_2, ρ della matrice.

Alle varietà invarianti minime è poi collegata un'altra importante proprietà del gruppo G . Le omografie di G che sono permutabili con ogni omografia del gruppo stesso formano manifestamente un sottogruppo Γ . Si dimostra che Γ è anche un *ordine*, che diciamo *ordine centrale* del gruppo di moltiplicabilità; e si ha il fatto notevole che il numero delle varietà invarianti, la loro specie, la loro distribuzione negli assi isolati minimi dipendono da proprietà dell'equazione minima $\psi(\chi) = 0$ dell'omografia generatrice di Γ .

In questa Nota sono riportati i risultati essenziali della ricerca e i soli enunciati dei teoremi; la loro dimostrazione e le applicazioni a casi particolari saranno rimandati ad un lavoro più ampio.

I. - CORRISPONDENZA BIUNIVOCA INVOLUTORIA INDOTTA NEL GRUPPO DI MOLTIPLICABILITÀ DA UN SISTEMA Nullo RIEMANNIANO PRINCIPALE. —

Sia ω una matrice di Riemann del genere p , e di indici di moltiplicabilità h e di singolarità k . Nello spazio rappresentativo S_{2p-1} , in cui sono costruite le immagini $\tau, \bar{\tau}$ della matrice, si avrà il gruppo di moltiplicabilità G , appartenente ad un sistema lineare ∞^h di omografie G^* ; le omografie di G^* diconsi *omografie di ω* . Fissato un sistema nullo riemanniano principale Λ , nasce entro G una corrispondenza biunivoca involutoria, in cui sono omologhe due omografie ottenute moltiplicando per Λ^{-1} due reciprocità riemanniane l'una inversa dall'altra. Gli elementi uniti di tale corrispondenza si distribuiscono in due reti G_1, G_2 di specie $\mu_1 = k + 1$ e $\mu_2 = h - k$, ottenute rispettivamente moltiplicando per Λ^{-1} i sistemi nulli riemanniani e le polarità riemanniane della matrice. Entro G^* , concepito come uno spazio lineare S_h , si avrà una omografia involutoria I i cui elementi uniti sono le omografie dei due sistemi lineari G_1^*, G_2^* a cui appartengono le reti G_1, G_2 . Due omografie di ω corrispondenti in I si diranno *congiunte*, e le omografie dei sistemi lineari G_1^*, G_2^* si diranno rispettivamente *immagini di elementi simmetrici ed emisimmetrici* ⁽¹⁾. Si hanno le proprietà:

a) *Le omografie reali immagini di elementi simmetrici ed emisimmetrici sono regolari e le loro equazioni minime hanno rispettivamente radici tutte reali o tutte immaginarie pure.*

b) *Se due omografie reali congiunte di ω sono permutabili, esse sono regolari e funzioni razionali l'una dell'altra.*

(1) Se ω è una delle matrici relative a una curva del genere p in cui è fissato un sistema di retrosezioni, e Λ è il sistema nullo relativo alle retrosezioni, due omografie congiunte sono immagini di due corrispondenze l'una inversa dell'altra e le omografie di G_1 e di G_2 sono immagini delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche.

2. - PSEUDOASSI DELLA MATRICE. INDICI E COEFFICIENTE D'IMMERSIONE D'UNO PSEUDOASSE. — Lo studio della configurazione degli pseudoassi ⁽¹⁾, essenziale per la nostra ricerca, può farsi con lo stesso procedimento da me tenuto nello studio degli assi di una matrice impura ⁽²⁾. Ad ogni pseudoasse R_{2q-1} si possono associare due sistemi lineari *reali* M_{l-1}, N_{m-1} di omografie di ω : l'uno, di *1^a specie*, costituito dalle omografie degeneri di ω col 1° asse passante per R_{2q-1} ; l'altro, di *2^a specie*, costituito dalle omografie degeneri di ω col 2° asse contenuto in R_{2q-1} . I numeri l, m si dicono *gli indici*, (primo e secondo) dello pseudoasse. Se i due sistemi si intersecano in un sistema $\omega^{\lambda-1}$, lo pseudoasse definisce una varietà $V_{\infty^{\lambda}}$ di spazi S_{2q-1} , contenente una ω^{λ} reale e continua di pseudoassi, mutata in sé da ogni omografia di ω . Il numero λ prende il nome di *coefficiente d'immersione* dello pseudoasse. Se $\lambda = 0$, la V si riduce allo pseudoasse medesimo, che allora dicesi *isolato*.

Se m è il 2° indice e λ è il coefficiente d'immersione di uno pseudoasse R_{2q-1} , le omografie di ω che mutano in sé R_{2q-1} inducono in esso un sistema lineare reale $\omega^{m-\lambda-1}$ di omografie. Al numero $\gamma = m - \lambda$ daremo il nome di *carattere* dello pseudoasse.

3. - CONFIGURAZIONE DEGLI PSEUDOASSI. ESPRESSIONE DEI CARATTERI μ, μ_1, μ_2 DELLA MATRICE IN FUNZIONE DEI SECONDI INDICI E DEI CARATTERI DEGLI PSEUDOASSI PURI. — Sempre con lo stesso procedimento tenuto nella mia Memoria citata, si ottiene:

a) *Gli pseudoassi puri di una qualsiasi matrice ω si distribuiscono in un numero finito di varietà algebriche irriducibili V_1, V_2, \dots, V_v appartenenti a spazi $R_{2Q_1-1}, R_{2Q_2-1}, \dots, R_{2Q_v-1}$ indipendenti; questi appartengono a S_{2p-1} e sono gli pseudoassi isolati minimi della matrice.*

b) *Se $k_i + 1$ è il numero degli pseudoassi puri indipendenti contenuti in V_i e $2q_i - 1, m_i, \gamma_i$ sono la dimensione, il 2° indice e il carattere dei medesimi, si ha $k_i + 1 = \frac{Q_i}{q_i} = \frac{m_i}{\gamma_i}$, e i caratteri μ, μ_1, μ_2 e il genere p della matrice sono dati dalle formule*

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = \sum_{i=1}^{i=v} \frac{m_i^2}{\gamma_i}, \quad \mu_1 = \sum_{i=1}^{i=v} \frac{m_i (m_i - \gamma_i + 2)}{2 \gamma_i}, \\ \mu_2 = \sum_{i=1}^{i=v} \frac{m_i (m_i + \gamma_i - 2)}{2 \gamma_i}, \quad p = \sum_{i=1}^{i=v} \frac{m_i}{\gamma_i} q_i. \end{array} \right.$$

(1) È merito dello SCORZA l'aver introdotto la nozione fondamentale di *pseudoasse* e l'averne posto in luce l'importanza nello studio delle matrici di Riemann. (Cfr. SCORZA, loc. cit., (1) a), I parte, § 12).

(2) C. ROSATI, *Sui sistemi regolari di integrali abeliani riducibili e sulle reti di corrispondenze ad essi associate* (« Annali di Matematica », serie IV, t. III, 1925-26, pp. 109-132).

4. - TEOREMA FONDAMENTALE SULLE MATRICI PURE. — Nell'ipotesi che la matrice ω sia pura, si dimostra anzitutto che $q_1 = q_2 = \dots = q_v$, $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_v$, cioè che gli pseudoassi puri e gli pseudoassi isolati minimi hanno dimensione costante, dal che segue $k_1 = k_2 = \dots = k_v$, cioè che è costante il numero di pseudoassi puri indipendenti contenuti in ciascuno pseudoasse isolato minimo.

Inoltre, fissata un'omografia di G che sia immagine di un elemento simmetrico e che abbia il rango massimo $l = v(k + 1)$, si prova che le omografie del gruppo stesso con essa permutabili costituiscono una rete la quale è o di specie l , o di specie $2l$, o di specie $4l$. Nel 1° caso, le omografie di G che mutano in sè un qualsiasi pseudoasse puro R_{2q-1} , inducono in esso l'identità; nel 2° caso inducono omografie biassiali aventi per assi due spazi S_{q-1} , \bar{S}_{q-1} , immaginari coniugati fissi; nel 3° caso, che può verificarsi solo quando q è pari, omografie biassali aventi per assi due spazi S_{q-1} , \bar{S}_{q-1} , immaginari coniugati variabili in una varietà di Segre w di indici $(1, q-1)$ reale ma priva di punti reali. Segue di qui che $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_v$ e quindi anche $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_v$, ed inoltre che il carattere γ comune agli pseudoassi puri può assumere soltanto i valori 1, 2, 4. Si giunge dunque al seguente teorema fondamentale:

Nella configurazione degli pseudoassi di una matrice pura le varietà V_1, V_2, \dots, V_v degli pseudoassi puri hanno la stessa dimensione λ e contengono pseudoassi della stessa dimensione $2q-1$ e dello stesso carattere γ , il quale può soltanto assumere i valori 1, 2, 4.

Il teorema si estende facilmente alle matrici impure, ma prive di assi isolati.

Noi diremo che le matrici prive di assi isolati ammettono una configurazione di pseudoassi *regolare*, e si ha una classificazione di tali matrici in 3 specie, secondochè $\gamma = 1, 2, 4$ ⁽¹⁾.

5. - LE VARIETÀ INVARIANTI MINIME DEL GRUPPO DI MOLTIPLICABILITÀ.

— La matrice ω sia priva di assi isolati ed avente quindi una configurazione di pseudoassi regolare.

Se ω è di 1ª specie, si ha $\lambda = k$ e le V_i sono varietà di Segre. Il gruppo di moltiplicabilità ammette dunque in questo caso v varietà di Segre invarianti

$$V_1, V_2, \dots, V_v \quad (a)$$

di indici $(k, 2q-1)$, le quali sono reali con infiniti spazi reali.

Se ω è di 2ª specie, si ha $\lambda = 2k$ e in ogni pseudo asse puro R_{2q-1} di V_i esiste una coppia S_{q-1} , \bar{S}_{q-1} di spazi (che diremo *singolari*) i quali sono di punti uniti per tutte le omografie di G che mutano in sè lo pseudoasse. Al variare di R_{2q-1} entro V_i i due spazi descrivono due

(1) Le tre specie di matrici di Riemann che hanno nullo l'indice di singolarità, e di cui lo Scorza ha dimostrato l'esistenza e ha data la costruzione effettiva. (Cfr. SCORZA, loc. cit., (1) (b)) rientrano nella suddetta classificazione.

varietà di Segre W_i, \bar{W}_i appartenenti a due spazi immaginari coniugati S_{Q-1}, \bar{S}_{Q-1} , congiunti dallo pseudoasse R_{2Q-1} cui appartiene V_i . La V_i è costituita dagli spazi congiungenti due spazi qualsivogliano delle seconde schiere di W_i, \bar{W}_i . Il gruppo G ammette dunque in questo caso 2ν varietà di Segre invarianti

$$W_1, \bar{W}_1; W_2, \bar{W}_2; \dots; W_\nu, \bar{W}_\nu \quad (b)$$

di indici $(k, q-1)$, le quali sono immaginarie (a coppie coniugate) appartenenti a spazi totalmente immaginari.

Se infine ω è di 3^a specie, si ha $\lambda = 4k$ e in ogni pseudoasse di V_i sono contenuti ∞^1 spazi singolari. Il luogo di tali spazi, al variare dello pseudoasse entro V_i , è una varietà di Segre W_i reale ma priva di punti reali e di indici $(2k+1, q-1)$. Il gruppo G ammette nel 3° caso ν varietà di Segre invarianti

$$W_1, W_2, \dots, W_\nu \quad (c)$$

di indici $(2k+1, q-1)$ le quali sono reali ma prive di punti reali. Le varietà (a) (b) (c) diconsi le *varietà invarianti minime* del gruppo di moltiplicabilità. Il gruppo G e quindi anche G^* muta in sè ciascuna di esse lasciando fermo ogni spazio della prima schiera e in tale spazio G^* induce il gruppo totale delle omografie dello spazio medesimo. Nelle matrici di 1^a e di 2^a specie le varietà minime invarianti possono ridursi a spazi lineari. Ciò avviene per le matrici di 1^a specie quando, essendo $k=0$, le V_i si riducono a pseudoassi isolati; per le matrici di 2^a specie, o quando si verifica la stessa circostanza ($k=0$), od anche quando gli pseudoassi puri di V_i sono di dimensione 1. In questo 2° caso le W_i, \bar{W}_i sono spazi contenuti nelle immagini della matrice.

6. — DETERMINAZIONE DEI CARATTERI μ, μ_1, μ_2 E DEL RANGO ρ DELLE MATRICI DI RIEMANN PRIVE DI ASSI ISOLATI. — Dalle formule (I) e dalle precedenti considerazioni si trae il risultato:

In una matrice di Riemann priva di assi isolati, in cui il gruppo di moltiplicabilità possenga t varietà invarianti minime degli indici (α, β) , i caratteri μ, μ_1, μ_2 ed il rango ρ sono espressi dalle formule:

$$(I) \quad \mu = t(\alpha + 1)^2, \quad \mu_1 = t \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{2}, \quad \mu_2 = t \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2}, \quad \rho = t(\alpha + 1)$$

$$(II) \quad \mu = t(\alpha + 1)^2, \quad \mu_1 = t \frac{(\alpha + 1)^2}{2}, \quad \mu_2 = t \frac{(\alpha + 1)^2}{2}, \quad \rho = t(\alpha + 1)$$

$$(III) \quad \mu = t(\alpha + 1)^2, \quad \mu_1 = t \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2}, \quad \mu_2 = t \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{2}, \quad \rho = t(\alpha + 1)$$

secondochè la matrice è di 1^a, di 2^a o di 3^a specie.

OSSERVAZIONE. — I numeri t, α, β sono legati al genere p dalla formula

$$(2) \quad 2p = t(\alpha + 1)(\beta + 1)$$

Se nelle (I) (II) (III) si elimina t mediante la (2), si ottengono le formule:

$$(I') \quad \mu = 2p \frac{\alpha + 1}{\beta + 1}, \quad \mu_1 = p \frac{\alpha + 2}{\beta + 1}, \quad \mu_2 = p \frac{\alpha}{\beta + 1}, \quad \rho = \frac{2p}{\beta + 1}$$

$$(II') \quad \mu = 2p \frac{\alpha + 1}{\beta + 1}, \quad \mu_1 = p \frac{\alpha + 1}{\beta + 1}, \quad \mu_2 = p \frac{\alpha + 1}{\beta + 1}, \quad \rho = \frac{2p}{\beta + 1}$$

$$(III') \quad \mu = 2p \frac{\alpha + 1}{\beta + 1}, \quad \mu_1 = p \frac{\alpha}{\beta + 1}, \quad \mu_2 = p \frac{\alpha + 2}{\beta + 1}, \quad \rho = \frac{2p}{\beta + 1}$$

le quali danno nei 3 casi i valori di μ, μ_1, μ_2, ρ appena noti gl'indici delle varietà invarianti minime.

7. — I CARATTERI μ, μ_1, μ_2 ED IL RANGO ρ DI UNA MATRICE QUALSIASI. — Se la matrice ω è impura e possiede assi isolati, si indichino con K_1, K_2, \dots, K_s i suoi assi isolati minimi dei generi p_1, p_2, \dots, p_s . Si dimostra facilmente che gli pseudoassi puri di ω contenuti in K_i ($i = 1, 2, \dots, s$) presentano una configurazione regolare la quale può essere di 1^a, di 2^a, o di 3^a specie. Per ogni asse K_i varrà dunque uno dei gruppi di formule (I') (II') (III'), e si giunge pertanto al seguente teorema generale:

I caratteri μ, μ_1, μ_2 ed il rango ρ di una matrice di Riemann qualsiasi sono dati dalle formule:

$$\mu = \sum_{i=1}^s 2p_i \frac{\alpha_i + 1}{\beta_i + 1}, \quad \mu_1 = \sum_{i=1}^s p_i \frac{\alpha_i + 1 + \epsilon_i}{\beta_i + 1},$$

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^s p_i \frac{\alpha_i + 1 - \epsilon_i}{\beta_i + 1}, \quad \rho = \sum_{i=1}^s \frac{2p_i}{\beta_i + 1}$$

nelle quali s (≥ 1) indica il numero degli assi isolati minimi K_1, K_2, \dots, K_s posseduti dalla matrice, p_i il genere di K_i , (α_i, β_i) gl'indici delle varietà invarianti minime contenute in K_i , ed ϵ_i rappresenta il valore 1, 0, — 1 secondo che K_i è di 1^a, 2^a, 3^a specie.

8. — L'ORDINE CENTRALE DEL GRUPPO DI MOLTIPLICABILITÀ. — Le omografie del gruppo G che hanno la proprietà di essere permutabili con ogni omografia di G sono tutte regolari e formano un sottogruppo Γ , che è anche un ordine⁽¹⁾, al quale diamo il nome di *ordine centrale* del gruppo

(1) Per la definizione di ordine vedasi: C. ROSATI, *Nuove ricerche sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica*. (« Annali di Matematica », serie III, t. XXXI, 1921).

di moltiplicabilità. Se $\psi(z) = 0$ è l'equazione minima di una omografia che genera Γ , si ha la proprietà:

Il numero delle varietà invarianti minime del gruppo di moltiplicabilità è uguale al grado dell'equazione minima $\psi(z) = 0$ dell'ordine centrale; le radici reali di $\psi(z) = 0$ sono associate alle varietà minime reali, quelle complesse alle varietà minime immaginarie. L'equazione stessa è irriducibile o riducibile (nel campo assoluto di razionalità) secondochè la matrice non possiede ovvero possiede assi isolati, e in questo 2° caso il numero dei fattori irriducibili di $\psi(z)$ uguaglia il numero degli assi isolati minimi della matrice.

Matematica. — *Sulla nozione di parità e sul carattere reale delle varietà abeliane reali.* — I. *Le matrici riemanniane sottonormali.* Nota ⁽¹⁾ di S. CHERUBINO, presentata dal Socio Corrispondente G. SCORZA.

L'importanza fondamentale del *carattere reale* nella teoria delle varietà abeliane V_p di tipo reale è stata felicemente messa in luce dallo stesso prof. A. Comessatti, che lo ha introdotto in due sue belle memorie recentemente apparse ⁽²⁾.

Questo carattere è intimamente connesso con la struttura intrinseca delle matrici di Riemann (Scorza) appartenenti alla V_p ed inerenti ad una simmetria S . Esso è stato dall'A. introdotto *a posteriori* con la riduzione a forma tipica dell'antisostituzione riemanniana involutoria ⁽³⁾ indotta dalla S sullo spazio rappresentativo delle matrici riemanniane predette. Questa riduzione fa anche assumere un aspetto notevolissimo alla tabella dei periodi (matrice di Riemann) degli integrali di prima specie di V_p che sono reali rispetto ad S : cioè conduce alla tabella pseudonormale del Comessatti stesso, che costituisce un efficace strumento per le interessanti ricerche di questo Autore.

Una definizione *a priori* del carattere reale può immediatamente ottenersi mercè i concetti di parità e di successioni fondamentali di parità dei periodi simultanei di p integrali di prima specie indipendenti di V_p , che

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1927.

(2) *Sulle varietà abeliane reali* (Mem. I e II) « Annali », Serie IV, t. II (1924-1925) e t. III (1925-1926).

(3) CHERUBINO, *Sulle varietà abeliane reali e sulle matrici di Riemann reali*. Mem. I, « Giornale di Matem. », vol. XL, 1922, § 2, nn. 8-11 e §§ 5 e 6. Cfr. anche la Mem. II dello stesso titolo (stesso Giornale, vol. XLI, [1923]). Questi due lavori saranno in seguito semplicemente indicati con Mem. I e Mem. II. Per la forma tipica della S , cfr. HURWITZ, *Ueber die Perioden solcher eindentiger*, ecc., Crelle, B. 94, 1883, pp. 1-20.

furono da me introdotti — per la prima volta — poco prima della pubblicazione dei due citati lavori del Comessatti ⁽¹⁾. La possibilità di questa definizione fa nascere il legittimo desiderio di indagare più profondamente sulla natura della connessione esistente fra il carattere reale ed i concetti ora indicati.

Lo studio da me iniziato in tal senso mi sembra già abbastanza incoraggiante e perciò mi decido a pubblicare subito queste note che contengono alcuni risultati preliminari i quali mi hanno, fra l'altro, permesso di precisare immediatamente, per la stessa via già da me tracciata, un mio precedente risultato sulle varietà abeliane reali, non singolari, assegnandogli la stessa notevole forma con cui è stato riottenuto dal Comessatti nella prima delle due Memorie citate ⁽²⁾.

Però il maggiore interesse di queste prime ricerche consiste nell'aver ottenuto un tipo di matrici — che chiamo *realizzate* — più generali di quelle pseudonormali e pur godenti, come queste, la proprietà di porre in immediata evidenza il carattere reale e la struttura delle successioni fondamentali di parità, e nell'essere riuscito — in pari tempo — ad assegnare le sostituzioni (unimodulari) effettive da operare sui cicli primitivi della riemanniana di V_p per trasformare una data matrice di Riemann (*inerente* ad una data simmetria S) in una matrice *realizzata* e questa in una *pseudonormale* ⁽³⁾.

1. V_p è una varietà abeliana reale, cioè possedente una simmetria S in sé: questa, con opportuna scelta di p integrali semplici di 1° specie u_s , si rappresenterà con le relazioni:

$$(1) \quad S \equiv \overline{u_s} = u_s + c_s \quad s = 1, 2 \dots, p.$$

Se allora $\omega \equiv \|\omega_{s1}, \omega_{s2} \dots \omega_{sp}\|$ è la matrice riemanniana legata agli u_s e a certi $2p$ cicli primitivi C_r , alla S corrisponde un'antisostituzione riemanniana involutoria, cioè le relazioni

$$(2) \quad S \equiv \overline{\omega_{sr}} = a_{r1} \omega_{s1} + a_{r2} \omega_{s2} + \dots + a_{rp} \omega_{sp} = \sum_k a_{rk} \omega_{sk}.$$

La ω e gli u_s si diranno *inerenti* alla S ⁽⁴⁾.

(1) Cfr. Mem. II, nn. 1 a 5 del § 1. Anzi, dagli enunciati dei nn. 11 e 18, si può addirittura dedurre che il carattere reale era stato già ivi implicitamente definito.

(2) Cfr. Mem. II, n. 18 e COMESSATTI, loc. cit., I, § 2, n. 6.

(3) Cosicchè, le matrici semplicemente *realizzate* presenterebbero su quelle *pseudonormali* il vantaggio di essere più rapidamente ottenibili, con operazioni effettive, da una assegnata matrice di Riemann inerente ad una S . Questo vantaggio, che forse ha scarso interesse teorico, potrebbe invece riuscire non trascurabile, per le applicazioni.

(4) Gli u_s si dicono anche *reali* rispetto ad S .

Se, ponendo

$$\Omega_s = \sum_{r=1}^{2p} m_r \omega_{sr} \quad ; \quad {}^*\Omega_s = \sum_{r=1}^{2p} n_r \omega_{sr} \quad (s = 1, 2, \dots, p)$$

ove m_r ed n_r sono interi opportuni, si ha che gli Ω_s sono tutti reali e gli ${}^*\Omega_s$ sono tutti immaginari puri o nulli, si dirà di avere ottenuto due periodi Ω ed ${}^*\Omega$ il primo *diritto* ed il secondo *rovesciato* per gli u_s o per $\omega^{(1)}$.

Se negli Ω , ${}^*\Omega$ si pone $\bar{\omega}_{sr}$ al posto di ω_{sr} e poi

$$m'_k = \sum_k a_{rk} m_r \quad ; \quad n'_k = \sum_k a_{rk} n_r$$

tenendo presenti le (2) ed il fatto che la matrice ω e la sua coniugata hanno immagini indipendenti, si deduce facilmente che $m'_k = m_k$ e che $n'_k = -n_k$. Da ciò, poichè m_r ed n_r sono gli interi *caratteristici* dei periodi diritti e rovesciati, si ottiene che:

a) *Gli interi caratteristici dei periodi diritti e rovesciati per ω sono rispettivamente dati da tutte e sole le soluzioni dei due sistemi:*

$$(I) \quad a_{1r} x_1 + a_{2r} x_2 + \dots + a_{2pr} x_{2p} = x_r$$

$${}^*(I) \quad a_{1r} x_1 + a_{2r} x_2 + \dots + a_{2pr} x_{2p} = -x_r \quad (r = 1, 2, \dots, 2p)$$

cioè sono, ordinatamente, le coordinate dei punti razionali dei due spazi fondamentali corrispondenti alle radici $+1$ e -1 , le sole dell'equazione caratteristica dell'antinvolutione riemanniana ⁽²⁾.

$$(3) \quad \bar{x}_r = a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \dots + a_{r2p} x_{2p} \quad (r = 1, 2, \dots, 2p).$$

Questi spazi essendo di dimensione $p-1$, i coefficienti dei sistemi (I) e ${}^*(I)$ formano due matrici di caratteristica p . E allora, per alcuni teoremi di Frobenius ⁽³⁾, si ha che esistono due matrici di numeri interi, a p righe e $2p$ colonne

$$(II) \quad \|m_{s1} \ m_{s2} \ \dots \ m_{s2p}\| \quad \text{e} \quad {}^*(II) \quad \|n_{s1} \ n_{s2} \ \dots \ n_{s2p}\|$$

tali che ogni soluzione (in numeri interi) di (I) o di ${}^*(I)$ è una combinazione lineare omogenea a coefficienti interi delle p linee della (II) o della ${}^*(II)$; e si ha che in ciascuna matrice i minori di ordine p sono primi fra

(1) Si dovrebbe qui dire «di ordine p » diritto o rovesciato, giusta la notazione del n. 3 della mia Mem. II. Per semplicità non considero il caso dell'ordine $h \leq p$, che si tratterebbe analogamente.

(2) Cfr. Mem. I, § 2, nn. 8, 9, 11. Le (I) - ${}^*(I)$ si trovano già in HURWITZ, (loc. cit., p. 6).

(3) *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten*, Crelle, 86 (1879), § 8, III e VI, pp. 171-173.

loro e (quindi) da ognuna di esse, con l'aggiunta di altre p righe opportune, è possibile ottenere un determinante unimodulare.

Dopo di ciò, ricordando la definizione di grado di parità e di successioni fondamentali di parità (di ordine p) diritta o rovesciata data nella Mem. II, ponendo mente ai sistemi (I) e $^*(I)$ ed alle proprietà ora rilevate per le matrici (II) e $^*(II)$, si ottiene facilmente che:

b) *I gradi di parità diritta o rovesciata per ω sono entrambi uguali a p e le matrici (II) e $^*(II)$ ci danno ordinatamente, ad eccezione del periodo ad interi caratteristici tutti pari, due successioni fondamentali di parità diritta e rovesciata per i periodi di ω .*

2. Diremo carattere reale di una matrice riemanniana il numero delle coppie di periodi della stessa parità (ad interi caratteristici non tutti pari) uno diritto e l'altro rovesciato, che possono prendersi in due successioni fondamentali di parità. Questo carattere può anche attribuirsi alla simmetria eventualmente inerente alla matrice che si considera. Ciò basta — insieme alla b) del n. prec. — per poter affermare che⁽¹⁾:

a) *Nella classe complessa delle varietà abeliane birazionalmente identiche ad una data varietà abeliana V_p , reale ma non singolare, il numero delle classi reali distinte è $2^{p-\lambda+1}$, ove λ è il carattere reale di una sua simmetria.*

Ne segue, e può del resto verificarsi direttamente, che:

b) *Una varietà abeliana reale, non singolare, possiede un ben determinato carattere reale, che è comune a tutte le sue simmetrie.*

Vale anche la seguente proposizione che contiene la a):

c) *Le simmetrie che sono nella stessa schiera con una data, si distribuiscono in $2^{p-\lambda}$ sottoschiere ∞^p (dimensione reale) tali che due simmetrie sono identiche⁽²⁾ rispetto al gruppo delle trasformazioni birazionali ordinarie della V_p (singolare o non) allora e solo allora che appartengono alla stessa sottoschiera.*

3. Se sui cicli C_r si esegue una sostituzione unimodulare di cui p righe siano quelle della matrice (II), si ottiene una matrice di Riemann ω' , inerente alla stessa S , perchè legata agli stessi u_s , quindi con lo stesso carattere reale di ω e che possiede p colonne tutte di periodi reali. Una matrice di questo tipo si dirà *sottonormale* ed i cicli cui corrispondono periodi tutti reali si diranno *reali*.

È interessante rilevare che:

a) *In una matrice riemanniana sottonormale le p colonne ad elementi tutti reali e così le parti immaginarie delle altre p colonne (necessariamente ciascuna ad elementi non tutti reali) formano due determinanti non nulli.*

(1) Mem. II, n. 18.

(2) Cioè trasformate l'una nell'altra da una operazione di quel gruppo. (Cfr. Mem. I, n. 22). Per questa proposizione cfr. Mem. II, n. 11, a).

b) Se due matrici riemanniane sottonormali sono legate agli stessi integrali, ma a cicli diversi, i cicli reali per l'una sono combinazioni lineari (unimodulari) soltanto dei cicli reali dell'altra. Se invece sono legate agli stessi cicli, ma a due gruppi distinti u, v , di integrali indipendenti, questi si esprimono gli uni mediante gli altri con una sostituzione a coefficienti reali.

La dimostrazione di queste due proposizioni non offre difficoltà. Inoltre, si può sempre ritenere, — e così supporremo sempre in seguito — che le colonne ad elementi tutti reali per una matrice riemanniana sottonormale siano le prime p (cioè che siano reali i primi p cicli).

Matematica. — Sulla nozione di parità e sul carattere reale delle varietà abeliane. — II. Le matrici riemanniane realizzate. Nota di S. CHERUBINO, presentata dal Socio CORRISP. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — Sopra una derivazione covariante nel calcolo assoluto generalizzato. Nota I⁽¹⁾, del dr. G. VITALI, presentata dal Socio CORRISP. G. FUBINI.

In un recente lavoro che si sta pubblicando negli « Atti del R. Istituto Veneto », intitolato *Geometria nello spazio hilbertiano* ho messo in evidenza una specie di derivazione covariante da eseguirsi sui coefficienti di una forma lineare differenziale del 2° ordine partendo da una particolare forma quadratica differenziale di 4° ordine⁽²⁾, derivazione che qui torno a descrivere ricorrendo alla rappresentazione cartesiana dei punti, anzichè a quella funzionale usata nel citato lavoro, ed estendo a sistemi a più indici di covarianza e di controvarianza. Per mettere in evidenza l'importanza che può assumere questa derivazione, ricordo qui che nel citato lavoro essa ha servito per scrivere la equazione delle *quasi-assintotiche* $\gamma_{2,3}$ del Bompiani di una superficie generica dello spazio lineare a 6 dimensioni.

§ 1. — *Definizione 1^a.* — Essendo v un numero intero > 0 , diremo che un indice α è di 1^a classe se varia nel campo dei numeri

$$(1) \quad 1, 2, 3, \dots, v,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1927.

(2) La nozione di ordine di una forma differenziale è qui usata secondo la definizione data da E. PASCAL nel § 12 della sua Memoria: *La teoria delle forme differenziali di ordine e di grado qualunque*, « Memorie della R. Acc. dei Lincei », Serie 5^a, Classe di Sc. fis., vol. VIII, 1909.

e che è di 2^a classe se varia nel campo dei $\frac{v(v+3)}{2}$ simboli

$$(2) \quad \left\| \begin{array}{l} 1, 2, 3, \dots, v \\ 11, 21, 31, \dots, v1 \\ 22, 32, \dots, v2 \\ 33, \dots, v3 \\ \dots\dots\dots \\ vv \end{array} \right.$$

Se $f = f(u_1, u_2, \dots, u_v)$ è una funzione delle v variabili u_1, u_2, \dots, u_v derivabile in la quanto occorre, e se poniamo

$$f_r = \frac{\partial f}{\partial u_r} \quad (r = 1, 2, \dots, v)$$

$$f_{rs} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_r \partial u_s} \quad (r, s = 1, 2, \dots, v)$$

vediamo che f_α ha un significato per ogni α scelto nel campo (2).

§ 2. — Se

$$(3) \quad u_n = u_n(v_1, v_2, \dots, v_v) \quad (n = 1, 2, \dots, v)$$

sono le equazioni di una sostituzione S invertibile che cambia le variabili u_n nelle variabili v_n , porremo, se r, s, p, q sono numeri del campo (1),

$$(4) \quad \left\| \begin{array}{l} \frac{\partial v_{rs}}{\partial u_{pq}} = \frac{\partial v_r}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial v_s}{\partial u_q} + \frac{\partial v_s}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial u_q}, \quad \text{se } r \neq s \\ \frac{\partial v_{rr}}{\partial u_{pq}} = \frac{\partial v_r}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial u_q} \\ \frac{\partial v_r}{\partial u_{pq}} = \frac{\partial^2 v_r}{\partial u_p \partial u_q} \\ \frac{\partial v_{rs}}{\partial u_p} = 0 \end{array} \right.$$

Con queste notazioni il simbolo $\frac{\partial v_\alpha}{\partial u_\beta}$ ha significato comunque gli indici α e β variano nel campo (2).

Si verifica facilmente che « se $f = f(u_1, u_2, \dots, u_v)$ è una funzione (invariante) delle variabili u_n , che per causa della sostituzione S si muta in una funzione $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \dots, v_v)$ delle v_n si ha

$$(5) \quad f_\alpha = \sum_\beta \varphi_\beta \cdot \frac{\partial v_\beta}{\partial u_\alpha}$$

per ogni α di 2^a classe, la \sum_{β} essendo calcolata per il variare di β nel campo (2) ».

§ 3. — *Definizione 2^a.* — Se $\alpha_n, \alpha'_n (n = 1, 2, \dots, r)$ sono r coppie di indici entrambi della stessa classe [o 1^a o 2^a], e se $\beta_n, \beta'_n (n = 1, 2, \dots, s)$ sono altre s coppie analoghe, se

$$(6) \quad U_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}$$

è un sistema di funzioni delle u_n che per la sostituzione S si muta in un altro sistema

$$V_{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_r}^{\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_s}$$

di funzioni delle variabili v_n , in guisa che valga la relazione

$$U_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s} = \sum_{\alpha', \beta'} V_{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_r}^{\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_s} \left(\prod_i^r \frac{\partial v_{\alpha'_i}}{\partial u_{\alpha_i}} \right) \left(\prod_i^s \frac{\partial u_{\beta_i}}{\partial v_{\beta'_i}} \right)$$

diremo che è un sistema di Pascal covariante ad r indici α_n e controvariante ad s indici β_n delle rispettive classi 1^a o 2^a.

Consegue che se f è una funzione (invariante) delle u_n il sistema f_{α} considerato nel § 2 è un sistema di Pascal covariante ad un indice α di 2^a classe.

Aggiungo che se α è un indice di 2^a classe, e se h è un indice di 1^a classe un sistema di funzioni $U_{\alpha, h}$ sarà un sistema di Pascal covariante a 2 indici il 1^o di 2^a ed il 2^o di 1^a classe, se per la sostituzione S si muta in un altro sistema $V_{\alpha', h'}$ di funzioni delle variabili v_n , in guisa che valga la relazione

$$(7) \quad U_{\alpha, h} = \sum_i^v \sum_{\alpha'} V_{\alpha', h'} \frac{\partial v_{\alpha'}}{\partial u_{\alpha'}} \cdot \frac{\partial v_{h'}}{\partial u_{h'}}$$

la $\sum_{\alpha'}$ essendo estesa ad α' variante in (2).

§ 4. — Siano

$$x_n = x_n(u_1, u_2, \dots, u_v) \quad (n = 1, 2, \dots, m)$$

le equazioni parametriche di una varietà V a v dimensioni immersa in uno spazio lineare ad m dimensioni, in cui le x_n sono un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Se poniamo per ogni coppia di indici α e β del campo (2)

$$(8) \quad A_{\alpha, \beta} = \sum_1^m x_{n\alpha} \cdot x_{n\beta},$$

dove $x_{n\alpha}$ ha rispetto ad x_n lo stesso significato che f_α ha rispetto ad f , si vede facilmente che $A_{\alpha,\beta}$ è un sistema di Pascal covariante a 2 indici α e β di 2^a classe.

Indichiamo con Δ un determinante i cui elementi siano gli $A_{\alpha,\beta}$ disposti in modo che in una medesima linea gli elementi abbiano lo stesso 1° indice ed in una medesima colonna gli elementi abbiano lo stesso 2° indice, e che gli indici delle linee e quelli delle colonne siano ordinati nello stesso modo, e supponiamo che Δ risulti $\neq 0$. In tale ipotesi si possono considerare i reciproci $A^{\alpha,\beta}$ degli elementi $A_{\alpha,\beta}$ di Δ . Il sistema $A^{\alpha,\beta}$ è un sistema di Pascal controvariante a 2 indici di 2^a classe.

§ 5. — Se α e β sono due indici di 2^a classe, ed h è un indice di 1^a classe, poniamo

$$(9) \quad \left(\begin{smallmatrix} \alpha h \\ \beta \end{smallmatrix} \right)_2 = \sum_1^m \frac{\partial x_{n\alpha}}{\partial u_b} \cdot x_{n\beta},$$

ed inoltre

$$(10) \quad \left[\begin{smallmatrix} \alpha h \\ \beta \end{smallmatrix} \right]_2 = \sum_\gamma A^{\beta,\gamma} \left(\begin{smallmatrix} \alpha h \\ \gamma \end{smallmatrix} \right)_2 \quad (\gamma \text{ variante nel campo } (2)).$$

I simboli $\left(\begin{smallmatrix} \alpha h \\ \beta \end{smallmatrix} \right)_2$ ed $\left[\begin{smallmatrix} \alpha h \\ \beta \end{smallmatrix} \right]_2$ corrispondono ai simboli di Christoffell di 1^a e 2^a specie del calcolo assoluto del Ricci, e noi li chiameremo i simboli di Christoffell rispettivamente di 1^a e di 2^a specie e di 2^a classe, mentre chiameremo di 1^a classe e li indicheremo con $\left(\begin{smallmatrix} rs \\ t \end{smallmatrix} \right)_1$ ed $\left[\begin{smallmatrix} rs \\ t \end{smallmatrix} \right]_1$ quelli relativi alla forma

$$\sum_{h,k} a_{b^*,k} du_b du_k,$$

dove $a_{b,k} = A_{b,k}$. Sarà bene notare che i simboli $a_{b,k}$ hanno solo significato per noi se b e k sono di 1^a classe, mentre che i simboli $A_{b,k}$ hanno significato comunque b e k varino nel campo (2). Inoltre non bisognerà confondere gli $A^{b,k}$ coi reciproci degli $a_{b,k}$ che figurano nella formazione dei simboli di Christoffell di 1^a classe e di 2^a specie.

§ 6. — Nel lavoro citato ho dimostrato che se U_α è un sistema di Pascal covariante ad un indice α di 2^a classe, il sistema

$$(11) \quad U_{\alpha,h} = \frac{\partial U_\alpha}{\partial u_b} - \sum_\beta \left[\begin{smallmatrix} \alpha h \\ \beta \end{smallmatrix} \right]_2 \cdot U_\beta \quad (\beta \text{ variante in } (2))$$

è un sistema di Pascal covariante a due indici, il 1° α di 2^a classe ed il 2° h di 1^a classe.

Questo sistema si chiamerà il *sistema derivato covariante* di U_α secondo il sistema $A_{\alpha,\beta}$.

§ 7. — Ed ora passiamo a definire il *sistema derivato covariante* secondo $A_{\alpha,\beta}$ di un sistema controvariante U^α ad un indice di 2^a classe. Noi assumiamo come tale sistema, il seguente

$$(12) \quad U_b^\alpha = \frac{\partial U^\alpha}{\partial u_b} + \sum_\beta \left[\begin{matrix} \beta h \\ \alpha \end{matrix} \right]_2 \cdot U^\beta, \quad (\beta \text{ variante in } (2))$$

che è un sistema di Pascal controvariante ad un indice α di classe 2^a e covariante ad un indice h di 1^a classe.

Infatti, essendo h un indice di 1^a classe, dalle (8) e (9) si ricava

$$(13) \quad \frac{\partial A_{\alpha,\beta}}{\partial u_b} = \left(\begin{matrix} \alpha h \\ \beta \end{matrix} \right)_2 + \left(\begin{matrix} \beta h \\ \alpha \end{matrix} \right)_2$$

Dalle relazioni

$$(14) \quad \sum_\gamma A^{\alpha,\gamma} \cdot A_{\beta,\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \beta \\ 0, & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

con γ variante in (2), si ricava, derivando rispetto ad u_b ,

$$\sum_\gamma \left(A_{\beta,\gamma} \cdot \frac{\partial A^{\alpha,\gamma}}{\partial u_b} + A^{\alpha,\beta} \cdot \frac{\partial A_{\beta,\gamma}}{\partial u_b} \right) = 0$$

e per le (13) e per le (10)

$$\sum_\gamma A_{\beta,\gamma} \cdot \frac{\partial A^{\alpha,\gamma}}{\partial u_b} + \sum_\gamma A^{\alpha,\gamma} \cdot \left(\begin{matrix} \gamma h \\ \beta \end{matrix} \right)_2 + \left[\begin{matrix} \beta h \\ \alpha \end{matrix} \right]_2 = 0.$$

Moltiplicando ora per $A^{\beta,\delta}$, e sommando rispetto a β variante nel campo (2),

$$\frac{\partial A^{\alpha,\delta}}{\partial u_b} = - \sum_\gamma A^{\alpha,\gamma} \cdot \left[\begin{matrix} \gamma h \\ \delta \end{matrix} \right]_2 + \sum_\beta A^{\beta,\delta} \cdot \left[\begin{matrix} \beta h \\ \alpha \end{matrix} \right]_2 = 0$$

da cui, sostituendo nell'ultima \sum l'indice β con l'indice γ ,

$$(15) \quad \frac{\partial A^{\alpha,\delta}}{\partial u_b} = - \sum_\gamma A^{\alpha,\gamma} \cdot \left[\begin{matrix} \gamma h \\ \delta \end{matrix} \right]_2 + \sum_\gamma A^{\gamma,\delta} \cdot \left[\begin{matrix} \gamma h \\ \alpha \end{matrix} \right]_2 = 0.$$

Se U^α è un controvariante ad un indice α di 2^a classe, il sistema

$$(16) \quad U_\beta = \sum_\alpha A_{\alpha,\beta} \cdot U^\alpha$$

sarà un covariante ad un indice β di 2^a classe, e si avrà:

$$(17) \quad U^\alpha = \sum_\beta A^{\alpha,\beta} \cdot U_\beta.$$

Derivando i due membri di (17) rispetto ad u_b , e tenendo conto di (15) si ha

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial u_b} + \sum_\beta A^{\alpha, \beta} \cdot \frac{\partial U_\beta}{\partial u_b} - \sum_{\beta \gamma} A^{\alpha, \gamma} \cdot \left[\gamma^b \right]_\beta \cdot U_\beta - \sum_{\beta \gamma} A^{\beta, \gamma} \cdot \left[\gamma^b \right]_\alpha \cdot U_\beta,$$

da cui, sostituendo nell'ultima \sum ad u_β il 2° membro di (16), tenendo conto delle (14) e trasportando nel 1° membro, ed infine scambiando nella 1ª \sum l'indice β con l'indice γ ,

$$(18) \quad \frac{\partial U_\alpha}{\partial u_b} + \sum_\gamma \left[\gamma^b \right]_\alpha \cdot U_\gamma = \sum_\gamma A^{\alpha, \gamma} \left(\frac{\partial U_\gamma}{\partial u_b} - \sum_\beta \left[\gamma^b \right]_\beta \cdot U_\beta \right).$$

Il fattore dentro parentesi () nel 2° membro è il derivato covariante di U_γ , quindi, per il principio della saturazione degli indici, il 2° membro, e quindi il 1° membro di (18) è un sistema di Pascal controvariante ad un indice α di 2ª classe e covariante ad un indice b di 1ª classe. Esso è U_b^α , quindi, ecc.

Matematica. — *Sopra una derivazione covariante nel calcolo assoluto generalizzato.* Nota II di G. VITALI, presentata dal Socio corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Teoremi di media per le soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali.* Nota ⁽¹⁾ di FRANCESCO SBRANA, presentata dal Socio corrisp. G. SCORZA.

1. In una recente Nota ⁽²⁾ il prof. Picone stabilisce alcune notevoli proprietà di media per le soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali. Anzitutto osserva che se una funzione reale $u(x, y)$ delle variabili reali x e y è armonica in un dominio T del piano (x, y) , essa gode delle infinite proprietà di media espresse dalle uguaglianze

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \rho \cos \Theta, y + \rho \sin \Theta) e^{in\Theta} d\Theta = \\ = \frac{\rho^n}{n! 2^n} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n u(x, y), \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 ottobre 1927.

(2) M. PICONE, *Teoremi di media caratteristici per le soluzioni di talune equazioni alle derivate parziali.* « Rend. del Circ. Matem. di Palermo », Tomo LI, (1927), pp. 25-37.

dove $i = \sqrt{-1}$, x, y sono le coordinate di un punto qualunque P interno al dominio T, e ρ è un numero reale, tale che il cerchio di centro P e raggio ρ resti contenuto in T⁽¹⁾.

Successivamente fissato un valore intero e positivo di n , e un dominio T del piano (x, y) , e detta $C^{(n)}$ la classe delle funzioni continue in T con le loro derivate parziali fino a quelle incluse di ordine n , il prof. Picone si chiede per quali funzioni, della classe $C^{(n)}$, sia caratteristica la proprietà di media espressa dalla (1), dove x, y rappresentino ancora le coordinate di un punto qualunque P interno a T, e ρ sia un numero reale, tale che risulti interno a T il cerchio di centro P e raggio ρ . Egli risponde a tale quesito, indicando un procedimento, che conduce a riconoscere la proprietà anzidetta come caratteristica per le funzioni u della classe $C^{(n)}$, per le quali

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)^n u$$

riesce armonica in T, che sono quindi soluzioni dell'equazione alle derivate parziali

$$\Delta_2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)^n u = 0^{(2)}.$$

Allo stesso risultato si può pervenire con le osservazioni che ci permettiamo di esporre in questa Nota.

2. Rappresenteremo con T_R il campo di T tale che ogni cerchio col centro in un punto P(x, y) di T_R e raggio R sia interno a T. Posto, in T_P ,

$$M_n(x, y, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \rho \cos \Theta, y + \rho \sin \Theta) e^{in\Theta} d\Theta, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

moltiplicando per $\rho^{n+1} d\rho$, e integrando, tra i limiti zero ed R, troviamo, in T_R ,

$$\int_0^R \rho^{n+1} M_n(x, y, \rho) d\rho = \frac{1}{2\pi} \iint_{C(P, R)} u(x', y') [x' - x + i(y' - y)]^n dx' dy',$$

dove $C(P, R)$ indichi il cerchio di centro P e raggio R. Osserviamo poi che si ha⁽³⁾

$$\iint_{C(P, R)} u(x', y') [x' - x + i(y' - y)]^n dx' dy' = \int_{y-R}^{y+R} dy' \int_{x-\sqrt{R^2-(y'-y)^2}}^{x+\sqrt{R^2-(y'-y)^2}} u(x', y') [x' - x + i(y' - y)]^n dx'.$$

(1) Loc. cit., I. Il prof. Picone mostra anche come la (1) torni utile per il calcolo approssimato delle derivate successive di una funzione armonica, fondato, semplicemente, sulla conoscenza di una successione di funzioni convergente in media verso la funzione armonica. [Teor. II, III].

(2) Loc. cit., teor. VI.

(3) Ricordiamo che per ipotesi u è della classe $C^{(n)}$ in T.

Di qui si trae

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_0^R \rho^{n+1} M_n(x, y, \rho) d\rho = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{y-R}^{y+R} [\sqrt{R^2 - (y' - y)^2} + i(y' - y)]^n u(x + \sqrt{R^2 - (y' - y)^2}, y') dy' - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{y-R}^{y+R} [-\sqrt{R^2 - (y' - y)^2} + i(y' - y)]^n u(x - \sqrt{R^2 - (y' - y)^2}, y') dy' - \\ & - n \int_0^R \rho^n M_{n-1}(x, y, \rho) d\rho, \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} (3) \quad & \frac{\partial}{\partial x} \int_0^R \rho^{n+1} M_n(x, y, \rho) d\rho = \\ &= \frac{R^{n+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + R \cos \Theta, y + R \sin \Theta) e^{in\Theta} \cos \Theta d\Theta - n \int_0^R \rho^n M_{n-1}(x, y, \rho) d\rho. \end{aligned}$$

Similmente si ottiene:

$$\begin{aligned} (4) \quad & \frac{\partial}{\partial y} \int_0^R \rho^{n+1} M_n(x, y, \rho) d\rho = \\ &= \frac{R^{n+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + R \cos \Theta, y + R \sin \Theta) e^{in\Theta} \sin \Theta d\Theta - i n \int_0^R \rho^n M_{n-1}(x, y, \rho) d\rho^{(1)}. \end{aligned}$$

Dalla (3), (4) segue intanto, (in T_R),

$$(5) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \int_0^R \rho^{n+1} M_n(x, y, \rho) d\rho = R^{n+1} M_{n+1}(x, y, R).$$

Una conseguenza notevole della (5) è espressa dalla seguente eguaglianza:

$$\begin{aligned} (6) \quad & R^n M_n(x, y, R) = \\ &= \frac{1}{(n-1)! 2^{n-1}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \int_0^R \rho (R^2 - \rho^2)^{n-1} M_0(x, y, \rho) d\rho, \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

(1) Facendo, nelle (3), (4), $n=0$, si ritrovano due formule che avevamo altrove dedotto da alcuni risultati del prof. E. E. LEVI. Vedi E. E. LEVI, *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche*, «Rend. Lincei», 1909, 1° sem., fasc. 1°; F. SBRANA, *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni poliarmiche e delle soluzioni dell'equazione delle membrane vibranti*, ibidem, 1925, 1° sem., fasc. 1°.

Per dimostrare quest'ultima, osserviamo anzitutto che per $n = 1$ essa si identifica con la (5), nella quale si ponga $n = 0$; supposta allora valida la (6) per un valore fisso di n , si ottiene, dalle (5), (6), (ricordando che u è della classe $C^{(n)}$ in T),

$$(7) \quad R^{n+1} M_{n+1}(x, y, R) = \\ = \frac{1}{(n-1)! 2^{n-1}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} \int_0^R \rho d\rho \int_0^\rho (\rho^2 - \rho_1^2)^{n-1} M_0(x, y, \rho_1) d\rho_1;$$

d'altra parte l'integrale doppio a secondo membro è anche dato da

$$\int_0^R \rho_1 M_0(x, y, \rho_1) d\rho_1 \int_{\rho_1}^R \rho (\rho^2 - \rho_1^2)^{n-1} d\rho = \frac{1}{2n} \int_0^R \rho_1 (R^2 - \rho_1^2)^n M_0(x, y, \rho_1) d\rho_1.$$

Perciò la (7) si identifica con la (6), nella quale si cambi n in $n+1$. Dalle (3), (4) si trae ancora

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^R \rho^{n+1} M_n(x, y, \rho) d\rho = \\ & = \frac{R^{n+1}}{2\pi} \int_0^R \frac{\partial}{\partial x} u(x + R \cos \Theta, y + R \sin \Theta) e^{in\Theta} \cos \Theta d\Theta - n \frac{\partial}{\partial x} \int_0^R \rho^n M_{n+1}(x, y, \rho) d\rho, \\ & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^R \rho^{n+1} M_n(x, y, \rho) d\rho = \\ & = \frac{R^{n+1}}{2\pi} \int_0^R \frac{\partial}{\partial y} u(x + R \cos \Theta, y + R \sin \Theta) e^{in\Theta} \sin \Theta d\Theta - in \frac{\partial}{\partial y} \int_0^R \rho^n M_{n+1}(x, y, \rho) d\rho, \end{aligned}$$

e quindi, valendoci anche della (5), (ove si ponga $n-1$ in luogo di n)⁽¹⁾,

$$(8) \quad \Delta_2 \int_0^R \rho^{n+1} M_n(x, y, \rho) d\rho = R^{n+1} \frac{\partial M_n(x, y, R)}{\partial R} - n R^n M_n(x, y, R).$$

3. Supponiamo ora che la funzione u , della classe $C^{(n)}$, sia soluzione dell'equazione alle derivate parziali (2). Dal noto teorema di media di Gauss per le funzioni armoniche, discende, in $T\rho$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n u(x + \rho \cos \Theta, y + \rho \sin \Theta) d\Theta = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n u(x, y),$$

(1) Per ciò che segue, interessa stabilire la (8) per $n = 1, 2, 3, \dots$; ma si riconosce subito che essa sussiste anche per $n = 0$. Avevamo osservato la stessa relazione (8), con $n = 0$, nella Nota citata [Sulle funzioni poliarmoniche, ecc., (3)].

ovvero

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)^n M_0(x, y, \rho) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)^n u(x, y),$$

perciò dalla (6), in T_R ,

$$R^n M_n(x, y, R) = \frac{1}{(n-1)! 2^{n-1}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)^n u(x, y) \int_0^R \rho (R^2 - \rho^2)^{n-1} d\rho,$$

da cui segue subito la (1).

Inversamente, supposto che sussista la (1) in T_ρ , essendo ancora u della classe $C^{(n)}$, basta sostituire, nella (8), al primo membro l'espressione di $M_n(x, y, \rho)$ data dalla (1) in T_ρ , e nel secondo membro l'analoga espressione di $M_n(x, y, R)$ in T_R , per trovare senz'altro verificata dalla funzione u l'equazione alle derivate parziali (2).

Matematica. — *Funzioni biarmoniche sopra una superficie.*
Nota⁽¹⁾ di B. FINZI, presentata dal Socio CORRISP. U. CISOTTI.

Sia v una funzione definita nei punti di una data superficie σ . Sia

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k$$

il quadrato dell'elemento lineare su σ . L'invariante $\sum_{i,k} a^{ik} v_{ik}$ è il parametro differenziale secondo su σ , che Beltrami indica con $\Delta_2 v$. Se $\Delta_2 v = 0$, v si dice armonica su σ . Una funzione soddisfacente all'equazione differenziale del quarto ordine $\Delta_2 \Delta_2 v = 0$ si dirà biarmonica su σ . Queste funzioni hanno uno speciale interesse fisico, perchè intervengono nello studio dei veli elastici⁽²⁾.

Indichiamo con Δ_4 l'operatore $\Delta_2 \Delta_2$, sarà:

$$\Delta_4 v = \sum_{i,k} a^{ik} \left(\sum_{l,m} a^{lm} v_{lm} \right)_{ik}.$$

Ma, per il teorema di Ricci⁽³⁾, le derivate dei coefficienti della forma (1) sono nulle: una funzione biarmonica su σ sarà dunque definita dalla seguente equazione:

$$(2) \quad \sum_{i,k,l,m} a^{ik} a^{lm} v_{lmik} = 0.$$

Se σ è superficie piana, questa equazione definisce una ordinaria funzione biarmonica nel piano. Ora è noto che nel piano una funzione biarmo-

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1927.

(2) B. FINZI, *Sui veli elastici* (Memoria di prossima pubblicazione).

(3) T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma, 1925, p. 169.

nica, regolare con le sue derivate prime, seconde e terze in una certa regione, è univocamente determinata nella regione stessa nei seguenti casi notevoli: *a*) è noto il valore che essa ed il suo Δ_2 assumono al contorno; *b*) è noto il valore che la derivata normale e il Δ_2 della funzione assumono al contorno (la determinazione della funzione ha luogo a meno di una costante); *c*) è noto il valore che la funzione e la sua derivata normale assumono al contorno. Mostriamo ora che una funzione biarmonica sulla superficie è determinata da queste stesse condizioni che individuano una funzione biarmonica nel piano. In più — supposta nota una funzione del tutto analoga a quella di Green per i problemi biarmonici piani — costruiremo effettivamente la funzione biarmonica sulla superficie, allorchè sono note al contorno le condizioni che la individuano.

Osserviamo che l'equazione differenziale (2) è un'equazione lineare alle derivate parziali, di tipo totalmente ellittico⁽¹⁾. Eugenio Elia Levi si occupò in un'ampia Memoria del problema dei valori al contorno di dette equazioni⁽²⁾, mostrando che i teoremi di esistenza e di unicità valgono generalmente e vengono sempre a mancare insieme. La complessità — dovuta alla grande generalità — della Memoria citata, mi inducono a trattare direttamente il problema in oggetto, ricorrendo sistematicamente ad un criterio di cui mi sono valso altre volte⁽³⁾: farò dipendere i problemi superficiali da equivalenti problemi su di un piano in corrispondenza conforme con la superficie. In particolare, per superficie sviluppabili, il problema superficiale coinciderà con il classico problema biarmonico piano.

§ 1. — RIFERIMENTO A SISTEMI COORDINATI ISOTERMI.

Operiamo un cambiamento di variabili tale che il ds^2 di σ assuma la forma isoterma. Ciò è sempre possibile ed in infiniti modi⁽⁴⁾. Si avrà dunque:

$$(3) \quad ds^2 = \lambda^2 (dx_1^2 + dx_2^2)$$

(1) Infatti: i coefficienti delle derivate di ordine massimo della (1) sono $(a^{11})^2$, $2 a^{11} a^{22}$, $(a^{22})^2$, $4 a^{11} a^{12}$, $4 a^{22} a^{12}$, $(2 a^{12})^2$. Allora l'equazione

$$(a^{11})^2 x^4 + 4 a^{11} a^{12} x^3 + 2 a^{11} a^{22} x^2 + (2 a^{12})^2 x^2 + 4 a^{22} a^{12} x + (a^{22})^2 = 0,$$

che scriveremo $(a^{11} x^2 + 2 a^{12} x + a^{22})^2 = 0$, non ammette radici reali, perchè

$$(a^{12})^2 - a^{11} a^{22} = \frac{a_{12}^2 - a_{22} a_{11}}{a^2} = \frac{-1}{a} < 0.$$

(2) E. E. LEVI, *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, « Memoria della Società italiana delle Scienze (detta dei XL) », serie 3^a, to. XVI.

(3) B. FINZI, *Considerazioni su i moti irrotazionali di lamine liquide*, « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. II, serie 6^a, 2^o sem. 1925, p. 236. Cfr. n. 2.

(4) Cfr. ad es. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, Pisa, III ed. 1920, vol. I, parte I, § 49, p. 124.

c

$$\lambda^2 = \frac{1}{\Delta_1 x_1} = \frac{1}{\Delta_1 x_2}.$$

Indichiamo con $\bar{\Delta}_2$ l'operatore piano $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. Sarà notoriamente:

$$(4) \quad \Delta_2 v = \frac{\bar{\Delta}_2 v}{\lambda^2}$$

e

$$\Delta_4 v = \frac{1}{\lambda^2} \bar{\Delta}_2 \frac{\bar{\Delta}_2 v}{\lambda^2}.$$

Poichè $\lambda = \infty$, una funzione biarmonica ubbidirà alla seguente equazione differenziale del quarto ordine:

$$(5) \quad \bar{\Delta}_2 \frac{\bar{\Delta}_2 v}{\lambda^2} = 0.$$

Credo opportuno far rilevare la notevole semplicità della (5) di fronte alla originaria ed equivalente (2).

§ 2. - UNICITÀ DI SOLUZIONE NEI CASI a) E b).

Sia s contorno di σ . La funzione v sia regolare con le sue prime tre derivate nei punti di σ . Supponiamo che al contorno siano dati: $\Delta_2 v$ e v . Consideriamo un piano π , e in esso due assi cartesiani ortogonali x_1, x_2 . Ad ogni punto P di σ corrisponderà un punto P di π , avente su π le stesse coordinate x_1 e x_2 che individuano P su σ . Al contorno s di σ corrisponderà una linea \bar{s} di π ; alla regione σ di superficie, una regione piana $\bar{\sigma}$ avente per contorno \bar{s} . La corrispondenza tra σ e $\bar{\sigma}$ è notoriamente biunivoca e conforme. Sarà allora:

$$(6) \quad ds = \lambda d\bar{s}, \quad d\sigma = \lambda^2 d\bar{\sigma},$$

e se dn è l'elemento d'arco di una linea di $\bar{\sigma}$ normale ad \bar{s} , l'elemento d'arco dn della corrispondente linea di σ normale ad s , sarà definito dalla relazione

$$(6') \quad dn = \lambda d\bar{n}.$$

Noti i valori di $\Delta_2 v$ su s , saranno noti (per la (4)) i valori di $\frac{\Delta_2 v}{\lambda^2}$ su s , e quindi i valori su \bar{s} di $\Delta_2 v$. Ma, in virtù della (5), $\frac{\Delta_2 v}{\lambda^2}$ è funzione armonica, regolare con le sue derivate prime, su $\bar{\sigma}$: conoscendosi i suoi

valori al contorno, sarà $\frac{\bar{\Delta}_2 v}{\lambda^2}$ univocamente determinata in ogni punto di $\bar{\sigma}$.

Consideriamo ora la funzione v : di essa conosciamo il valore del suo $\bar{\Delta}_2$ in ogni punto di $\bar{\sigma}$, e in più i valori che essa assume su s , e quindi su \bar{s} . In virtù di noti teoremi, v sarà dunque univocamente determinata in ogni punto di $\bar{\sigma}$, e quindi in ogni punto di σ .

Analogamente si constata per il caso *b*) l'unicità di soluzione a meno di una costante additiva ⁽¹⁾.

§ 3. - UNICITÀ DI SOLUZIONE NEL CASO *c*).

Dati v e $\frac{dv}{dn}$ su s , sarà noto v su \bar{s} ; e, in virtù della (6'), essendo

$\frac{dv}{dn} = \lambda \frac{dv}{dn}$, sarà pure noto $\frac{dv}{dn}$ su \bar{s} . Se v è regolare con le sue prime tre derivate nel campo σ , è facile constatare che le condizioni al contorno individuano un'unica soluzione della (5), cioè un'unica funzione biarmonica su σ .

Infatti: se la (5) ammettesse due soluzioni distinte v' e v'' , posto $V = v' - v''$, sarebbe

$$(7) \quad \bar{\Delta}_2 \frac{\bar{\Delta}_2 V}{\lambda^2} = 0$$

e, su s , $V = 0$, $\frac{dV}{dn} = 0$. Ma il secondo lemma di Green, applicato alle funzioni V e $\frac{\bar{\Delta}_2 V}{\lambda^2}$, regolari in $\bar{\sigma}$ con le loro prime derivate, è espresso dalla relazione

$$\int_s \left(V \frac{d}{dn} \frac{\bar{\Delta}_2 V}{\lambda^2} - \frac{\bar{\Delta}_2 V}{\lambda^2} \frac{dV}{dn} \right) ds + \int_{\bar{\sigma}} \left(V \bar{\Delta}_2 \frac{\bar{\Delta}_2 V}{\lambda^2} - \frac{\bar{\Delta}_2 V}{\lambda^2} \bar{\Delta}_2 V \right) d\sigma = 0$$

la quale, per la (7), e per le condizioni al contorno, diviene:

$$\int_{\bar{\sigma}} \left(\frac{\bar{\Delta}_2 V}{\lambda} \right)^2 d\bar{\sigma} = 0,$$

da cui si deduce $\bar{\Delta}_2 V = 0$. V è dunque funzione armonica in $\bar{\sigma}$. Ma la funzione V , armonica nel piano, è nulla al contorno con la sua derivata

(1) In modo del tutto analogo si risolverebbe il problema propostoci, allorché fossero noti al contorno $\frac{d}{dn} \bar{\Delta}_2 v$ e $v \left(0 \frac{dv}{dn} \right)$.

normale: sarà dunque $V = 0$; cioè $v' = v''$. Dati dunque i valori che v e $\frac{dv}{dn}$ assumono al contorno s , se la (5) ammette una soluzione, questa soluzione è unica.

§ 4. - COSTRUZIONE DI v NEI CASI a) E b).

Sia r la distanza tra due punti \bar{P} e \bar{Q} di σ , G_1 la prima funzione di Green per i problemi armonici relativi al contorno s . Poichè $\Delta_2 v$ è armonico in σ , si avrà:

$$(8) \quad 2\pi (\Delta_2 v) \bar{Q} = \int_s \Delta_2 v \frac{d}{dn} \left(\log \frac{1}{r} - G_1 \right) d\bar{s}.$$

In questa $(\Delta_2 v) \bar{Q}$ rappresenta il valore assunto da $\Delta_2 v$ in Q , e l'integrale che compare nel secondo membro è valutato considerando \bar{Q} fisso.

Sia R la distanza tra un altro punto \bar{Q}_1 e \bar{Q} . Poichè la (8) dà il valore di $\Delta_2 v$ e quindi (per la (4)) di $\bar{\Delta}_2 v$ in un generico punto Q di σ , si avrà:

$$2\pi v(\bar{Q}_1) = \int_s v \frac{d}{dn} \left(\log \frac{1}{R} - G_1 \right) d\bar{s} - \int_\sigma \left(\log \frac{1}{R} - G_1 \right) \Delta_2 v d\sigma.$$

Nella valutazione degli integrali che compaiono nel secondo membro \bar{Q}_1 è considerato fisso. In virtù della (8) e della (4), scriveremo allora

$$\begin{aligned} 2\pi v(\bar{Q}_1) &= \int_s v \frac{d}{dn} \left(\log \frac{1}{R} - G_1 \right) d\bar{s} - \\ &- \int_\sigma \left(\log \frac{1}{R} - G_1 \right) \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_s \Delta_2 v \frac{d}{dn} \left(\log \frac{1}{r} - G_1 \right) d\bar{s} d\sigma, \end{aligned}$$

o, facendo comparire solo elementi di σ , per le (6) e (6') avremo:

$$(9) \quad \begin{aligned} 2\pi v(Q_1) &= \int_s v \frac{d}{dn} \left(\log \frac{1}{R} - G_1 \right) d\bar{s} - \\ &- \int_\sigma \left(\log \frac{1}{R} - G_1 \right) \int_s \frac{\Delta_2 v}{2\pi} \frac{d}{dn} \left(\log \frac{1}{r} - G_1 \right) d\bar{s} d\sigma. \end{aligned}$$

La (9) - una volta nota la G_1 - definisce v mediante i valori che essa e il suo Δ_2 assumono al contorno.

Se invece di conoscere \bar{v} al contorno, si conoscesse $\frac{dv}{dn}$, indicando con G l'analoga della prima funzione di Green per il problema in istudio, si avrebbe

$$(10) \quad 2\pi v(Q_1) = \int_s \left(G_1 - \log \frac{1}{R} \right) \frac{dv}{dn} ds + \\ + \int_{\bar{\sigma}} \left(G_1 - \log \frac{1}{R} \right) \int_s \frac{\Delta_2 v}{2\pi} \frac{d}{dn} \left(\log \frac{1}{r} - G_1 \right) ds d\sigma.$$

La (10) — una volta nota la G (che è definita a meno di una costante) e la G_1 — definisce (a meno di una costante) v , mediante i valori che $\Delta_2 v$ e $\frac{dv}{dn}$ assumono al contorno ⁽¹⁾.

§ 5. — COSTRUZIONE DI v NEL CASO c).

Si conoscano i valori che v e $\frac{dv}{dn}$ assumono su s , e quindi i valori che v e $\frac{dv}{dn}$ assumono su \bar{s} . Si consideri una funzione u , essa pure regolare con le sue prime tre derivate in σ . Si avrà:

$$(11) \quad \int_s \left(u \frac{d}{dn} \Delta_2 v - \Delta_2 v \frac{du}{dn} + \Delta_2 u \frac{dv}{dn} - v \frac{d}{dn} \Delta_2 u \right) d\bar{s} + \\ + \int_{\bar{\sigma}} (u \bar{\Delta}_2 \Delta_2 v - v \bar{\Delta}_2 \Delta_2 u) d\bar{\sigma} = 0^{(2)}.$$

Imponiamo alla u il seguente comportamento: sia al contorno

$$u = r^2 \log \frac{1}{r},$$

(1) Facilmente si scriverebbero formule analoghe alla (9) e alla (10) allorché fosse noto al contorno $\frac{d}{dn} \Delta_2 v$ insieme a v $\left(0 \frac{dv}{dn} \right)$.

(2) La (11) si giustifica tosto applicando il secondo lemma di Green una prima volta alle funzioni u e $\Delta_2 v$, una seconda volta alle funzioni $\Delta_2 u$ e v : si avrà

$$\int_s \left(u \frac{d}{dn} \Delta_2 v - \Delta_2 v \frac{du}{dn} \right) d\bar{s} + \int_{\bar{\sigma}} (u \bar{\Delta}_2 \Delta_2 v - \Delta_2 v \bar{\Delta}_2 u) d\bar{\sigma} = 0, \\ \int_s \left(\Delta_2 u \frac{d}{dn} v - v \frac{d}{dn} \Delta_2 u \right) d\bar{s} + \int_{\bar{\sigma}} (\Delta_2 u \bar{\Delta}_2 v - v \bar{\Delta}_2 \Delta_2 u) d\bar{\sigma} = 0.$$

Sommando queste due relazioni, e ricordando la (4), si otterrà appunto la (11).

e in σ ,

$$\Delta_2 u = \bar{\Delta}_2 r^2 \log \frac{1}{r},$$

cioè

$$\bar{\Delta}_2 u = \lambda^2 \bar{\Delta}_2 r^2 \log \frac{1}{r} = -4\lambda^2 (\log r + 1).$$

Sia u funzione regolare con le sue derivate prime in $\bar{\sigma}$, noto allora il suo valore al contorno, e il valore del suo Δ_2 in ogni punto di $\bar{\sigma}$, u sarà perfettamente determinata in $\bar{\sigma}$, e la sua costruzione effettiva dipenderà unicamente dalla conoscenza della prima funzione di Green relativa ad \bar{s} : la G_1 . Osserviamo ora che mentre u è regolare in $\bar{\sigma}$ con le sue derivate prime, non è però regolare in $\bar{\sigma}$ $\bar{\Delta}_2 u$: $\bar{\Delta}_2 u$ diviene infinito nel punto $r = 0$ come $\log r$. Per poter applicare allora la formula (II) alle due funzioni u e v , sarà necessario isolare con un intorno di \bar{Q} la singolarità logaritmica accennata, e passare poi al limite quando l'intorno di \bar{Q} tende a zero. Si avrà allora

$$8\pi v(\bar{Q}) = \int \left(v \frac{d}{dn} 4 \log \frac{1}{r} - \frac{dv}{dn} 4 \left(\log \frac{1}{r} - 1 \right) + \right. \\ \left. + \Delta_2 v \frac{du}{dn} - r^2 \log \frac{1}{r} \frac{d}{dn} \Delta_2 v \right) d\bar{s} + \int (u \bar{\Delta}_2 \Delta_2 v - v \bar{\Delta}_2 \Delta_2 u) d\bar{\sigma}.$$

Ricordiamo ora la (5), e osserviamo che $\bar{\Delta}_2 \Delta_2 u = -4\Delta_2 (\log r + 1) = 0$. Ne dedurremo:

$$(12) \quad 8\pi v(\bar{Q}) = \int \left(v \frac{d}{dn} 4 \log \frac{1}{r} - 4 \left(\log \frac{1}{r} - 1 \right) \frac{dv}{dn} + \right. \\ \left. + \Delta_2 v \frac{du}{dn} - r^2 \log \frac{1}{r} \frac{d}{dn} \Delta_2 v \right) d\bar{s}.$$

Consideriamo una funzione γ , regolare in σ con le sue prime tre derivate, tale che al contorno ubbidisca alle seguenti relazioni:

$$(13) \quad \gamma = r^2 \log \frac{1}{r}, \quad \frac{d\gamma}{dn} = \frac{du}{dn}.$$

In più γ sia biarmonica su σ . Sia cioè;

$$(14) \quad \bar{\Delta}_2 \frac{\Delta_2 \gamma}{\lambda^2} = 0$$

γ sarà unica per un dato contorno (cfr. § 3).

Poniamo ora nella (II) γ al posto di u : ricordando la (14) e la (5), avremo:

$$\int_s \left(\gamma \frac{d}{dn} \Delta_2 v - \Delta_2 v \frac{d\gamma}{dn} + \Delta_2 \gamma \frac{dv}{dn} - v \frac{d}{dn} \Delta_2 \gamma \right) d\tilde{s} = 0.$$

Sommando questa alla (12), e ricordando le (13), avremo

$$8 \pi v (\overline{Q}) = \int_s \left[v \frac{d}{dn} \left(4 \log \frac{1}{r} - \Delta_2 \gamma \right) + \frac{dv}{dn} \left(\Delta_2 \gamma - 4 \left(\log \frac{1}{r} - 1 \right) \right) \right] d\tilde{s}.$$

Questa potrà scriversi, facendo comparire solo elementi di σ , (per la (6) e (6')) così:

$$8 \pi v (Q) = \int_s \left[v \frac{d}{dn} \left(4 \log \frac{1}{r} - \Delta_2 \gamma \right) + \frac{dv}{dn} \left(\Delta_2 \gamma - 4 \left(\log \frac{1}{r} - 1 \right) \right) \right] ds.$$

La relazione ottenuta definisce v in ogni punto di σ mediante i valori che essa e la sua derivata normale assumono al contorno. Tutto dipende dalla determinazione di γ , di una funzione biarmonica su σ , che al contorno assume speciali valori, di una funzione cioè che nel problema in istudio ha ugual definizione e compie lo stesso ufficio della seconda funzione G_2 di Green.

§ 6. - CASO DELLE SUPERFICIE SVILUPPABILI.

Se la superficie σ è sviluppabile, sarà possibile determinare un tal sistema di riferimento per cui risulti $\lambda = 1$, e quindi $\Delta_2 = \Delta_2$. In tal caso la funzione v è biarmonica sul piano, e tutte le formule fin qui stabilite coincideranno con quelle relative ai problemi biarmonici piani. In particolare, sarà $u = r^2 \log \frac{1}{r}$, e γ coinciderà con la seconda funzione G_2 di Green.

Geometria. — *Sulla geometria proiettiva differenziale delle ipersuperficie.* Nota ⁽¹⁾ di A. TERRACINI, presentata dal Socio CORRISP. G. FUBINI.

Ho avuto altra volta ⁽²⁾ occasione di mostrare qual'è l'origine geometrica della nozione dell'elemento lineare proiettivo per una superficie dello spazio ordinario. Passando alle ipersuperficie e estendendo quella definizione geometrica, si ottiene ancora l'elemento lineare proiettivo? No; si ha invece qualche cosa di nuovo, come ora si dirà.

Per le superficie, secondo quanto ho mostrato nel mio lavoro citato, l'elemento lineare proiettivo si riconduce in sostanza al birapporto delle coppie di tangenti asintotiche in un punto x della superficie e in un altro punto y della medesima ad esso infinitamente vicino. Alla nozione di quel birapporto si giunge *trasportando* nel fascio $x\xi$ delle rette tangenti alla superficie in x le tangenti asintotiche in y , vale a dire segnando queste col piano ξ , e proiettandone le traccie da x . Ora, passando dalle superficie di S_2 a ipersuperficie qualunque V_k , sorge spontanea l'idea di assoggettare a un analogo *trasporto* i loro coni asintotici per cercarne, sia pure attraverso un meccanismo analitico più complicato, il legame con le forme fondamentali che definiscono la V_k . Si avrà così da considerare, per ogni punto x di questa, insieme col relativo cono asintotico $\Gamma(x)$, il cono $\Gamma^*(y)$, col vertice x e nello $S_k\xi$ ivi tangente alla V_k , ottenuto per trasporto dal cono asintotico $\Gamma(y)$, dove y è un qualsiasi punto della V_k infinitamente vicino a x . In prima approssimazione $\Gamma^*(y)$ coincide con $\Gamma(x)$, con modalità che saranno indicate fra poco: invece, migliorando l'approssimazione, così da rendere distinti questi due coni quadrici, si è condotti naturalmente a considerare i loro invarianti (assoluti) simultanei: essenzialmente uno solo, se ci si arresta agli infinitesimi del più basso ordine possibile. Qui appunto si presenta il fatto nuovo: l'espressione differenziale di carattere intrinseco invariante così ottenuta è formata mediante l'elemento lineare proiettivo della ipersuperficie e un'ulteriore espressione in cui compaiono le forme quadratiche fondamentali e una forma del quart'ordine che non credo sia stata ancora notata. Solamente per $k = 2$ tale espressione svanisce identicamente, ricadendosi così sul risultato della mia Nota citata.

(1) Pervenuta all'Accademia il 14 ottobre 1927.

(2) *Sull'elemento lineare proiettivo di una superficie*; questi «Rend.» (6), vol. IV, 1926. Adotto nel seguito le notazioni della *Geometria proiettiva differenziale* di FUBINI e ČECH.

Sulla V_k di S_{k+1} ⁽¹⁾ descritta dal punto $x(u_1, u_2, \dots, u_k)$ ⁽²⁾ consideriamo adunque un punto y prossimo al punto x . Sia poi definita una tangente asintotica della V_k uscente da y , assegnando le quantità

$$f_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

cui debbono essere proporzionali i differenziali delle u ; le f sostituite ordinatamente in luogo dei differenziali dovranno pertanto annullare la forma quadratica fondamentale F_2 relativa al punto y . La retta considerata incontra lo $S_k \xi$ tangente alla V_k in x nel punto

$$\left(\xi, \sum_i f_i y_i \right) y - (\xi, y) \sum_i f_i y_i,$$

e perciò viene trasportata nella stella $x\xi$ secondo la retta che proietta da x il punto $\sum_i \rho_i x_i$ dove le ρ_i sono determinate dalla condizione che esistano due quantità λ, μ tali che

$$(1) \quad \lambda \sum_i \rho_i x_i + \mu x + \left(\xi, \sum_i f_i y_i \right) y - (\xi, y) \sum_i f_i y_i = 0.$$

Immaginando scritta la (1) per ognuna delle $k+2$ coordinate omogenee, e moltiplicando ogni volta per il corrispondente valore di

$$\xi_l \quad (l = 1, 2, \dots, k),$$

e poi sommando si ha ⁽³⁾

$$(2) \quad -\lambda \sum_i a_{il} \rho_i + \left(\xi, \sum_i f_i y_i \right) (\xi_l, y) - (\xi, y) \left(\xi_l, \sum_i f_i y_i \right) = 0$$

$$(l = 1, 2, \dots, k).$$

Le (2) costituiscono un sistema lineare omogeneo tanto nelle ρ , quanto nelle f . Consideriamole un momento dal primo punto di vista, e precisiamo le idee supponendo provvisoriamente di avere prefissato mediante le $du_1 : du_2 : \dots : du_k = h_1(u) : h_2(u) : \dots : h_k(u)$ un sistema ∞^{k-1} , \sum , di tangenti asintotiche della V_k , in modo che per ogni suo punto x ne passi

(1) Che supponiamo dotata di $\infty^k S_k$ tangenti.

(2) Poniamo $x_i = \frac{\partial x}{\partial u_i}$, ecc. Nel seguito si sottintende che gli indici posti alle sommatorie senza ulteriori indicazioni variano da 1 a k . Si pone inoltre p. es. (ξ, y) uguale alla somma dei prodotti delle coordinate omologhe del punto y e dell'iperpiano ξ .

(3) Ricordiamo le posizioni $F_2 = \sum_{ij} a_{ij} du_i du_j$, $F_3 = \sum_{ijl} a_{ijl} du_i du_j du_l$. Il discriminante A di F_2 è nelle nostre ipotesi non identicamente nullo. Inoltre, nel seguito, se h_1, h_2, \dots, h_k ; h'_1, h'_2, \dots, h'_k sono due sistemi di k variabili, poniamo $F_2(h, h') = \sum_{ij} a_{ij} h_i h'_j$.

una, $t(x)$: (cosicchè le f di sopra sono ora le h calcolate nel punto y): la posizione limite, per y tendente ad x , della retta $l^*(y)$ ottenuta per trasporto della $t(y)$ è definita dai seguenti valori delle ρ (ottenuti risolvendo il sistema formato dalle (2) nel modo che si è detto e facendo il passaggio al limite)

$$\lambda A \rho_i = \frac{1}{2} A F_2 h_i - A F_2 (h, du) du_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

dove i differenziali du (e così si suppone tacitamente anche in seguito) sono presi lungo un arco di curva che va da x a y . Queste equazioni provano che, per un dato y , e variando comunque il sistema $\sum l^*(y)$ corrisponde a $t(x)$, entro la stella $x\xi$, in una certa omologia armonica; in altre parole, in prima approssimazione il cono asintotico della V_k , $\Gamma(y)$, uscente dal punto y infinitamente vicino a x , viene trasportato in $\Gamma^*(y)$ coincidente col cono asintotico $\Gamma(x)$; e se a ogni generatrice di $\Gamma(x)$ si fa corrispondere quella generatrice di $\Gamma^*(y)$ in cui si trasporta la generatrice di $\Gamma(y)$ infinitamente vicina alla prima (dove questo concetto è precisato dalle considerazioni che precedono), tale corrispondenza viene subordinata da una omologia armonica stellare avente per retta centrale la tangente xv , e per S_{k-1} di omologia il suo polare rispetto a $\Gamma(x)$.

Ma ci conviene ora, per riprendere il programma tracciato da principio, abbandonare tale punto di vista e ritornare alle (2) come costituenti un sistema lineare nelle $f^{(1)}$. Le (2) porgono

$$(3) \quad \tau f_i = \sum_l E_{li} a_{rl} \rho_r, \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

dove chiamiamo E_{li} il reciproco dell'elemento

$$\epsilon_{li} = (\xi, y_i) (\xi_l, y) - (\xi, y) (\xi_l, y_i) \quad (l, i = 1, 2, \dots, k)$$

nel determinante formato da queste quantità, mentre τ è un fattore di proporzionalità. Mediante facili trasformazioni si ha la

$$E_{li} = (\xi, y)^{k-2} M^{(li)}$$

dove $M^{(li)} = (-1)^{j-1} N^{(li)}$ e $N^{(li)}$ indica il determinante di ordine k , i cui elementi v sono così definiti

$$\begin{aligned} v_{gj} &= (\xi_g, y_j) & (g, j = 1, 2, \dots, k; \quad g \neq l, j \neq i); \\ v_{lj} &= (\xi, y_j) & (j = 1, 2, \dots, k; \quad j \neq i); \\ v_{gi} &= (\xi_g, y) & (g = 1, 2, \dots, k; \quad g \neq l); \quad v_{li} = (\xi, y). \end{aligned}$$

(1) Il cui determinante ha come termine principale $-\left(\frac{1}{2} F_2\right)^k A$ ed è quindi non identicamente nullo.

Mutando il significato del fattore τ , alle (3) si possono sostituire le

$$(3') \quad \tau f_i = \sum_{lr} M^{(li)} a_{rl} \varrho_r \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Procediamo dunque al calcolo delle $M^{(li)}$, ricercando gli infinitesimi dei due ordini più bassi, il secondo e il terzo, siano rispettivamente $M_2^{(li)}$ e $M_3^{(li)}$. Per il primo si ha facilmente

$$(4) \quad M_2^{(li)} = -\frac{1}{2} F_2 A_{li} + A du_l du_i, \quad (l, i = 1, 2, \dots, k).$$

Il secondo si scrive come segue

$$(5) \quad M_3^{(li)} = \frac{1}{2} (-1)^{k-1} P^{(li)} + (-1)^{k-1} \sum_n' Q^{(li,n)}, \quad (l, i = 1, 2, \dots, k),$$

dove l'accento nella seconda sommatoria sta a indicare che l'indice n variabile deve essere diverso da i , mentre $P^{(li)}$ e $Q^{(li,n)}$ sono determinanti di ordine k di elementi π e χ , rispettivamente così costituiti

$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi_{gj} = (\xi_g, x_j) & , \quad (g, j = 1, 2, \dots, k ; \quad g \neq l, \quad j \neq i) ; \\ \pi_{lj} = (\xi, dx_j) & , \quad (j = 1, 2, \dots, k ; \quad j \neq i) ; \\ \pi_{gi} = (\xi_g, d^2 x) & , \quad (g = 1, 2, \dots, k ; \quad g \neq l) ; \quad \pi_{li} = \frac{1}{3} (\xi, d^3 x). \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \chi_{gj} = (\xi_g, x_j) & , \quad (g, j = 1, 2, \dots, k ; \quad g \neq l, j \neq n, j \neq i) ; \\ \chi_{lj} = (\xi, dx_j) & , \quad (j = 1, 2, \dots, k ; \quad j \neq n, j \neq i) ; \\ \chi_{gn} = (\xi_g, dx_n) & , \quad (g = 1, 2, \dots, k ; \quad g \neq l) ; \\ \chi_{gi} = (\xi_g, dx) & , \quad (g = 1, 2, \dots, k ; \quad g \neq l) ; \\ \chi_{ln} = \frac{1}{2} (\xi, d^2 x_n) & ; \quad \chi_{li} = \frac{1}{2} (\xi, d^2 x). \end{array} \right.$$

Calcolate separatamente le diverse parti, e sommando, ne risulta infine

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_2^{(li)} + M_3^{(li)} = \left(-\frac{1}{2} F_2 + \frac{1}{6} F_3 - \frac{1}{2} F_2 (du, \delta^2 u) \right) A_{li} + \left(1 + \sum_{ns} \binom{ns}{n} du_s \right) A du_l du_i \\ - A du_l \sum_{ns} du_s du_n \binom{ns}{i} - \frac{1}{2} du_l \sum_m A_{mi} \omega_m - \frac{1}{2} du_i \sum_m A_{ml} \omega_m \\ + \frac{1}{2} A (du_l \delta^2 u_l + du_l \delta^2 u_i) - \frac{1}{2} F_2 \sum_{mn} A_{ml, ni} (-1)^{m_l + n_i} \left(\Omega_{mn} + \sum_{iq} a_{mq} \binom{ns}{q} du_s \right) \end{array} \right. \\ (i, l = 1, 2, \dots, k);$$

dove le δ indicano differenziali controvarianti, calcolati, come i simboli di Christoffel (di 2^a specie) rispetto alla F_2 ; p. es. m_l vale zero o uno secondochè $m < l$ o $m > l$; \sum' sta a significare $m \neq l$, $n \neq i$; e finalmente

$$\omega_m = \sum_{st} a_{mst} du_s du_t, \quad (m = 1, 2, \dots, k),$$

$$\Omega_{mn} = \sum_i a_{mns} du_s, \quad (m, n = 1, 2, \dots, k).$$

Ora, se \bar{a}_{ij} sono i valori delle a_{ij} nel punto y , l'equazione del cono trasportato $\Gamma^*(y)$, in base alle (3') è la

$$\sum_{ijlmrR} \bar{a}_{ij} M^{(li)} a_{rl} M^{(mj)} a_{Rm} \rho_r \rho_R = 0;$$

che, dopo averla divisa per $\frac{1}{4} A^2 F_2^2$, scriveremo concisamente $\sum_{rR} b_{rR} \rho_r \rho_R = 0$.

I valori delle b , in base alle (6), si possono calcolare a meno di infinitesimi del secondo ordine, e a riduzioni fatte risultano

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} b_{rR} = a_{rR} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} + \frac{2}{F_2} F_2 (du, \delta^2 u) + 2 \sum_{us} \binom{ns}{n} du_s \right) - \frac{8}{3} \frac{F_3}{F_2^2} Du_r Du_R \\ + \frac{2}{F_2} (\omega_r Du_R + \omega_R Du_r) - 2 \Omega_{rR}, \end{aligned} \right.$$

dove

$$Du_r = \sum_i a_{rs} du_s \quad (r = 1, 2, \dots, k).$$

Consideriamo ora l'equazione secolare relativa alle equazioni

$$\sum_{rR} a_{rR} \rho_r \rho_R = 0, \quad \sum_{rR} b_{rR} \rho_r \rho_R = 0$$

dei due coni quadrici $\Gamma^*(y), \Gamma(x)$; equazione (nel parametro η) che scriviamo

$$A + \sum_i \Theta_i \eta^i = 0.$$

Coi coefficienti Θ_i , combinati opportunamente per moltiplicazione e divisione si possono formare vari invarianti assoluti, del tipo

$$(8) \quad \frac{\Theta_{i_1} \Theta_{i_2} \dots \Theta_{i_p}}{\Theta_{j_1} \Theta_{j_2} \dots \Theta_{j_p}} \quad (i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_p = 0, 1, \dots, k)$$

assumendo $A = \Theta_0$, dove p è un intero positivo qualunque, mentre $i_1 + \dots + i_p = j_1 + \dots + j_p$. Un tale invariante, come si vede facilmente, vale

$$c_1 + \frac{c_2}{A^2} \left(\frac{2k}{k-1} A \Phi_2 - \Phi_1^2 \right),$$

dove c_1, c_2 sono costanti dipendenti dagli interi $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_p$; mentre φ_1 e Φ_2 denotano gli infinitesimi principali (rispettivamente del 1° e del 2° ordine) in Θ'_1 e Θ'_2 , designando così gli invarianti analoghi a Θ_1 e Θ_2 , ma calcolati per la coppia $\sum_{r \in R} a_{rR} \varphi_r \varphi_R = 0$, $\sum_{r \in R} (b_{rR} - a_{rR}) \varphi_r \varphi_R = 0$. È dunque sufficiente considerare uno degli invarianti assoluti (8), p. es.

$$\Lambda = \frac{A\Theta_2}{\Theta_1^2} = \frac{k-1}{2k} \left\{ 1 + \frac{1}{k^2 A^2} \left(\frac{2k}{k-1} A\Phi_2 - \varphi_1^2 \right) \right\}$$

per il quale, in base alle (7) si ha finalmente l'espressione desiderata

$$(9) \quad \Lambda = \frac{k-1}{2k} - \frac{4(5k-2)}{9k^3} \frac{F_3^2}{F_2^2} + \frac{4}{k^2 A} \frac{\psi_4}{F_2}$$

dove ψ_4 vale

$$S \left(F_2 \begin{vmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1k} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Omega_{k1} & \Omega_{k2} & a_{k3} & a_{k4} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} - Du_1 \begin{vmatrix} \omega_1 & \Omega_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ \omega_2 & \Omega_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_k & \Omega_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \right. \\ \left. - Du_2 \begin{vmatrix} \Omega_{11} & \omega_1 & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ \Omega_{21} & \omega_2 & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Omega_{k1} & \omega_k & a_{k3} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \right)$$

intendendo che si debbano sommare tutte le espressioni analoghe a questa, formate a partire da tutte le ulteriori coppie di colonne del determinante A . È appunto ψ_4 la forma del 4° ordine cui si alludeva da principio. Per $k=2$ essa svanisce, e viene $\Lambda = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{16}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2} \right)$, risultato perfettamente equivalente⁽¹⁾ a quello della mia Nota citata. Ma già per $k=3$ la ψ_4 che in tal caso vale

$$- \begin{vmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & Du_1 \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} & Du_2 \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} & Du_3 \\ Du_1 & Du_2 & Du_3 & 0 \end{vmatrix},$$

non è più identicamente nulla.

(1) È da tener presente, per il confronto, che, come si vede facilmente, il birapporto infinitesimo là considerato, sia γ , è legato a Λ dalla $4\gamma = 1 - 4\Lambda$.

Idrodinamica. — Osservazioni sui moti di un fluido nei quali è stazionaria la distribuzione del vortice. Nota ⁽¹⁾ di A. MASOTTI, presentata dal Socio Corrisp. U. CISOTTI.

1. Un fluido qualunque (perfetto o viscoso) si muova sotto l'azione di forze unitarie di massa conservative; siano \mathbf{v} e $\boldsymbol{\omega} = 1/2 \cdot \text{rot } \mathbf{v}$ la *velocità di traslazione* e la *velocità di rotazione*, rispettivamente, di una generica particella, ambedue funzioni, in generale, del posto e del tempo. La permanenza locale della velocità di rotazione, cioè l'eguaglianza, in ogni posto, delle velocità di rotazione delle particelle che, col passare del tempo, transitano per quel posto, caratterizza i moti che considero in questa Nota: questa ipotesi è espressa analiticamente dall'equazione

$$(1) \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = 0,$$

oppure dall'altra

$$(2) \quad \frac{\partial \text{rot } \mathbf{v}}{\partial t} = 0;$$

quest'ultima richiede che \mathbf{v} sia somma di un vettore irrotazionale e di un vettore stazionario [n. 2].

Se il fluido è perfetto e la sua densità è costante o funzione della sola pressione, l'equazione dinamica euleriana ha un importante significato: essa rivela l'esistenza, ad ogni istante, di ∞^1 superficie Σ che sono contemporaneamente superficie di flusso e superficie vorticosi, su ciascuna delle quali assume valore costante il prodotto $\omega \sin \beta \, dn$, essendo β l'angolo tra linea di flusso e linea vorticiosa, e dn l'elemento di normale compreso tra la superficie Σ considerata e quella infinitamente vicina. Deduco, in virtù di una nota proposizione del Lamb, che l'atto di movimento del fluido in un istante qualunque è un atto di moto stazionario e rilevo che questa proprietà è caratteristica dei moti in istudio; esamino poi in quali circostanze le superficie Σ sono stazionarie, notando che ciò avviene, in particolare, nei moti stazionari, e che allora (e allora soltanto) esse sono *superficie di Bernoulli* [n. 3].

Se il fluido è viscoso mi limito a considerare il caso di un liquido; ferma restando la (1), esistono superficie Σ quando ad essa si aggiunga la condizione

$$(3) \quad \text{rot}^2 \boldsymbol{\omega} = 0,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1927.

ossia

$$(4) \quad \text{rot}' v = 0;$$

ricordando che il vettore

$$(5) \quad f = \frac{1}{3} \text{rot} \omega = \frac{1}{6} \text{rot}^2 v$$

è la *velocità di flessione* di una generica particella, si vede il significato meccanico di questa ulteriore ipotesi: essa esprime l'esistenza di un *potenziale di flessione* ⁽¹⁾. L'atto di movimento del liquido in un istante qualunque è un atto di moto stazionario con potenziale di flessione, e questa proprietà caratterizza, tra tutti i moti di un liquido viscoso che ammettono un potenziale di flessione, quelli nei quali è stazionaria la distribuzione del vortice [n. 4].

Si estendono in ogni caso alla superficie Σ quelle proprietà di geometria differenziale che si sono recentemente riconosciute per le superficie di Bernoulli ⁽²⁾.

2. La più generale espressione di v compatibile con la condizione di permanenza del vortice si ottiene integrando la (2); essa diviene, scambiando tra loro gli operatori $\partial/\partial t$ e rot ,

$$(6) \quad \text{rot} \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

(1) La *velocità di flessione* compare sotto il nome *vortices of the vortices* presso ROWLAND, *On the Motion of a Perfect Incompressible Fluid when no Solid Bodies are present* [« Amer. Jour. of Math. », vol. III (1880), pp. 226-268], indi presso BOGGIO-LERA, *Sulla cinematica dei mezzi continui* [« Il Nuovo Cimento », ser. III, t. XXII (1887), pp. 63-70, 143-149, 231-240; t. XXIII (1888), pp. 158-162; t. XXIV (1888), pp. 41-45; oppure « Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa » del 1886]; questo Autore esprime gli spostamenti relativi dei punti di un sistema continuo tenendo conto anche dei termini di 2° grado nelle coordinate relative; dimostra allora che il moto di una particella può essere scomposto in sei moti elementari, cioè trova, oltre alla *traslazione*, alla *rotazione*, alla *deformazione omogenea di 1° grado con potenziale* provenienti dai termini di 1° grado e già note a STOKES e ad HELMHOLTZ, i seguenti moti provenienti dai termini di 2° grado: una *flessione* intorno ad una retta passante per l'origine, ch'è una deformazione nella quale gli elementi rettilinei uscenti da una retta (*asse di flessione*) normalmente ad essa si atteggiavano ad archi di parabola mantenendosi complanari alla retta stessa; una deformazione risultante da tre torsioni intorno a tre rette mutuamente ortogonali passanti per l'origine; una *deformazione omogenea di 2° grado con potenziale*. *Velocità di flessione* di una particella è il vettore orientato come il suo asse di flessione ed avente per modulo il rapporto costante che sta tra la velocità di ogni punto nella direzione dell'asse di flessione ed il quadrato della sua distanza da quest'asse.

(2) CALDONAZZO, *Un'osservazione a proposito del teorema di Bernoulli* [« Boll. dell'Un. Mat. It. », anno IV (1925), pp. 1-3], *Sulla geometria differenziale di superficie aventi interesse idrodinamico* [questi « Rend. », vol. XXXIII, ser. 5ª (2° sem., 1924), pp. 396-400]. PASTORI, *Sulle superficie ortogonali a una congruenza normale di curve* [« Rend. del R. Ist. Lomb. », vol. LX (1927), pp. 111-119].

dalla quale si deduce

$$(7) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \text{grad } \Psi,$$

dove Ψ denota una arbitraria funzione del posto e del tempo; l'integrazione della precedente porge

$$(8) \quad \mathbf{v} = \text{grad} \int \Psi dt + \mathbf{w},$$

essendo \mathbf{w} un vettore arbitrario funzione solo del posto.

3. Supposto il fluido perfetto, con densità ρ costante o funzione della sola pressione p , soggetto a forze unitarie di massa derivanti dal potenziale U , l'equazione dinamica (di Eulero) è la seguente ⁽¹⁾

$$(9) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \text{grad } \Phi, \quad \text{con } \Phi = U - \frac{1}{2} v^2 - \int \frac{dp}{\rho}.$$

Nel caso attuale essa diviene, in virtù della (7),

$$(10) \quad \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \text{grad } (\Phi - \Psi);$$

segue la notevole proprietà annunciata dei moti in esame: esiste, ad ogni istante, una famiglia semplicemente infinita di superficie Σ che sono superficie di flusso e superficie vorticosi; su ogni Σ mantiene valore costante il quadrimo

$$(11) \quad \Phi - \Psi = U - \frac{1}{2} v^2 - \int \frac{dp}{\rho} - \Psi$$

la cui variazione quando si passa da una superficie Σ a quella infinitamente vicina eguaglia $2\omega \sin \beta dn$; in queste circostanze un teorema stabilito dal Lamb ⁽²⁾ assicura che, in ogni istante, la distribuzione delle velocità può spettare ad un moto permanente che ammetterebbe per superficie di Bernoulli le superficie Σ e che si effettuerebbe sotto l'azione di forze unitarie di massa derivanti dal potenziale

$$(12) \quad U_1 = U - \Psi.$$

(1) V. ad es. BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale*, II: *Applications à la Mécanique et à la Physique* (Pavia, Mattei, 1913), p. 56.

(2) LAMB, *On the Conditions for Steady Motion of a Fluid* [«Proc. Lond. Math. Soc.», vol. IX (1878) pp. 91-92]; oppure *Id.*, *Hydrodynamics* [V ed., Cambridge, 1924], p. 226; APPELI, *Traité de Mécanique Rationnelle*, t. III [III ed.; Paris, Gauthier-Villars, 1921], p. 409.

Reciprocamente, se nel moto di un fluido perfetto, per cui si verificano le predette condizioni, si riconosce l'esistenza di superficie Σ , si può porre

$$\text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \text{grad } \Xi,$$

e l'equazione (9) diviene

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \text{grad } (\Phi - \Xi);$$

da questa segue la (2). Dunque l'esistenza di superficie Σ è caratteristica dei moti nei quali la distribuzione del vortice è stazionaria; perciò sono questi i soli moti che ammettano, ad ogni istante, un moto stazionario tangente.

Le superficie Σ non sono, in generale, stazionarie; perchè ciò sia, è necessario e sufficiente che non varî col tempo, in ogni punto, l'orientazione del vettore $\text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$, ossia, tenendo conto dell'invariabilità locale di $\text{rot } \mathbf{v}$, che $\partial \mathbf{v} / \partial t$ sia complanare a $\text{rot } \mathbf{v}$ e \mathbf{v} ; ciò si esprime con l'equazione

$$(13) \quad \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0.$$

In questo caso il moto del fluido appare stratificato secondo le superficie Σ ed è, su ciascuna, superficialmente potenziale. La (13) è soddisfatta, in particolare, nei moti permanenti; le Σ sono in questo caso, e in questo caso soltanto, rappresentate dall'equazione

$$(14) \quad \Phi = \text{costante},$$

e sono quindi superficie di Bernoulli.

4. Per un liquido viscoso l'equazione dinamica (di Navier e Poisson) è ⁽¹⁾

$$(15) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} + \nu \text{rot}^2 \mathbf{v} = \text{grad } \Phi, \quad \text{con } \Phi = U - \frac{1}{2} v^2 - \frac{p}{\rho};$$

p rappresenta ora la *pressione media* (media aritmetica delle tre componenti normali degli sforzi su tre elementi di superficie mutuamente ortogonali) ⁽²⁾, ν è il *coefficiente cinematico di viscosità* di Maxwell (rapporto tra il coefficiente di viscosità μ e la densità del liquido).

Aggiungendo alla condizione di permanenza del vortice quella dell'esistenza di un potenziale di flessione, che indicherò con Λ , la (15) diviene

$$(16) \quad \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \text{grad } (\Phi - \Psi - 6 \nu \Lambda);$$

(1) V. ad es. BURALI-FORTI e MARCOLONGO, loc. cit., pp. 62 e 63; LAMB, loc. ult. cit., p. 547.

(2) LAMB, loc. ult. cit., p. 543.

esistono dunque superficie Σ , rappresentate dall'equazione

$$(17) \quad \Phi - \Psi - 6v\Lambda = \text{costante},$$

la cui presenza dice che, ad ogni istante, la distribuzione delle velocità può essere attribuita ad un moto permanente del medesimo liquido viscoso, con lo stesso potenziale di flessione, che si effettuerebbe sotto l'azione di forze unitarie di massa derivanti dal potenziale $U_1 = U - \Psi$ (e nel quale le Σ non sarebbero superficie di Bernoulli). Si dimostra (come per i liquidi perfetti) che l'esistenza di superficie Σ caratterizza, ove esista potenziale di flessione, i moti nei quali è stazionaria la distribuzione del vortice, sicchè tra tutti i moti aventi potenziale di flessione essi soli ammettono un moto stazionario tangente della stessa natura.

Fisica. — *Sulla spiegazione del raggio verde.* Nota ⁽¹⁾ di F. RUDA, presentata dal Socio Corrisp. G. GIORGI.

Le esperienze esposte nella Nota I ⁽²⁾ mi hanno condotto a constatare, caso per caso, uguaglianza fra l'indice di rifrazione dell'aria ionizzata e di quella non ionizzata. Può di qui trarsi una conclusione definitiva? Per infirmare la deduzione, che si presenta in modo evidente dalle esperienze, bisognerebbe far entrare in giuoco fattori assai difficilmente valutabili; e la revoca in dubbio non sembra probabile. Piuttosto deve osservarsi che le dimensioni del mio apparecchio non erano modificabili, e permettevano di sperimentare su un volume d'aria piuttosto piccolo. Dunque la conclusione, a tutto rigore, dovrebbe essere applicata solo agli strati d'aria di piccolo spessore. Vi è però ogni ragione di ritenere che gli strati sottili valgano come rappresentativi delle proprietà dei grandi volumi. Ogni strato grande si può sempre immaginare composto di strati sottili, e gli indici determinati per gli ultimi devono valere, a meno di errori sperimentali molto piccoli, anche per gli spessori grandi.

Non è detto che con questo si possa confutare in modo decisivo la spiegazione dello Julius sul fenomeno del raggio verde, spiegazione fondata sull'ipotesi di una differenza nei suddetti indici di rifrazione, ma intanto mi pare che i risultati siano una ragione di più per ritenere che la causa del fenomeno sia la rifrazione atmosferica senza intervento di dispersione anomala.

Alcune circostanze che in un primo esame della questione potrebbero originare dei dubbi si possono spiegare senza troppa difficoltà.

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1927.

(2) Questi « Rendiconti », ferie (1927), fasc. III-IV.

Per ciò che riguarda la colorazione variabile dal verde all'azzurro, riscontrata specialmente dal Guglielmo che ha osservato numerose volte il fenomeno sia al tramonto che al sorgere del sole, si deve ricordare l'assorbimento delle onde luminose da parte dell'atmosfera, provocato dai corpuscoli di diversa natura e dimensione che essa tiene in sospensione e che producono una diffrazione generale. Ciò è stato dimostrato dall'Abney, il quale, determinando il valore del rapporto fra il coefficiente di trasmissione della luce nell'atmosfera e la lunghezza d'onda, ha trovato che il valore massimo di questo rapporto è nel verde, notando nello stesso tempo che il massimo della luminosità si va spostando sempre più verso il rosso, cioè a dire i colori che più intensamente vengono assorbiti sono il violetto e poi l'azzurro e poi il verde.

Non è dunque azzardato attribuire le variazioni di colore dal verde all'azzurro degli ultimi raggi del sole che tramonta alle dimensioni variabili dei corpuscoli che l'atmosfera tiene in sospensione, specie negli strati più bassi vicini alla superficie terrestre. Ed è naturale che quando l'assorbimento sia molto intenso, il raggio verde o azzurro non si veda per niente, come capita infatti quando il sole è rosso.

Per ciò che riguarda la divergenza, in certi casi notevole, fra il tempo teorico di durata del fenomeno e la durata reale, varie cause possono intervenire. Come già ebbe ad esporre il prof. Guglielmo (loc. cit., p. 302), se il sole sorge o tramonta sul mare, il moto della superficie di questo, che si solleva o si abbassa per effetto delle onde, può causare un aumento o una diminuzione della durata del fenomeno; è anche probabile che per effetto di più masse d'aria aventi alternativamente densità maggiore o minore di quella media, i raggi che le attraversano subiscano una rifrazione e quindi una dispersione maggiore di quella teorica, che corrisponde ad una variazione regolare della densità con l'altezza.

Inoltre, se il sole tramonta dietro una linea di monti, la durata del raggio verde sarà minima se essa linea, nel punto dove essa si produce, è perpendicolare al moto del sole; sarà grandemente aumentata se gli è parallela. In queste ultime condizioni il Guglielmo ha osservato durate di circa 10 secondi.

Tuttociò è ben sufficiente a giustificare le irregolarità che accompagnano il fenomeno, ma le difficoltà, specie riguardo alla durata, si appianano ancor meglio tenendo presente una spiegazione che il prof. ing. Giorgi mi ha suggerito e che risulta come naturale conseguenza della teoria della visione dei colori che esso Autore insieme con la signorina Rosati ha recentemente presentato alla Società di Fisica ⁽¹⁾.

(1) V. le notizie pubblicate nel « Nuovo Cimento », febbraio 1927, p. xxvii, e il resoconto più esteso che è in corso di pubblicazione negli « Atti del Seminario Matematico » della R. Università di Roma.

Ricordando l'ordine secondo il quale si succedono le immagini diversamente colorate del sole che tramonta, prodotte dalla rifrazione atmosferica, avremo un disco azzurro più alto di tutti, un po' al disotto un disco verde, ancora al disotto un disco giallo, per ultimo un disco rosso. Questi diversi dischi, eccetto che per una sottile porzione del primo (azzurro, superiormente) e dell'ultimo (rosso, inferiormente) saranno sovrapposti, o per meglio dire, le onde luminose da essi inviate non arriveranno al nostro occhio cromaticamente separate; infatti dalla zona nella quale si sommano le radiazioni provenienti dall'immagine rossa e dalla gialla e dalla verde e dall'azzurra, avremo luce bianca, e questa sarà l'immagine abbagliante del disco solare, che col suo splendore impedirà di distinguere le due sottilissime zone (inferiore e superiore), dove le immagini non sono sovrapposte e che saranno quindi colorate. Quando però il sole tramonta, dopo sparita dietro l'orizzonte l'immagine abbagliante bianca, sarà visibile una zona colorata nella quale saranno sovrapposte soltanto le immagini gialla, verde, azzurra, blu, oltremare e violetta, con piccola intensità della violetta. Ora queste radiazioni, componendosi addittivamente insieme (si tratta di vera composizione addittiva, con risultato diverso da quello che si ottiene coi dischi giranti), producono nell'occhio precisamente il verde, che è un verde visivo, non un verde spettrale; per conseguenza l'osservatore può avere la sensazione luminosa di luce verde prima che siano arrivate all'orizzonte (mi si passi l'espressione) le radiazioni monocromatiche provenienti dall'immagine verde. Ecco che allora il raggio verde non deve durare un secondo, come si era calcolato precedentemente per la durata del verde spettrale, ma almeno il doppio. La divergenza col tempo reale di durata del fenomeno si riduce a poca cosa, e forse può rendersene ragione interamente. Intanto per spiegare le altre irregolarità intervengano le considerazioni che già sono state esposte.

Sembra quindi che per questa via una spiegazione completa del fenomeno possa ottenersi in modo soddisfacente.

Chimica. — *Porpore d'oro.* Nota II⁽¹⁾ di C. G. FONTANA⁽²⁾ presentata dal Socio G. BRUNI.

In un precedente lavoro⁽³⁾ ho avuto occasione di occuparmi di quelle porpore di oro e di stagno che vanno sotto il nome di porpore di Cassio, misurando le dimensioni dei granuli di oro, in esse contenuti, con il metodo di Scherrer⁽⁴⁾ e verificando che il grado di dispersione dell'oro è indipendente dalla quantità di sopporto.

Restava da esaminare se, variando la natura del sopporto stesso, anziché la sua quantità, il grado di dispersione ne era influenzato.

Ho perciò preparato ed esaminato nello stesso modo le porpore d'oro aventi per sopporto gli idrati di alluminio, zirconio e torio. La preparazione di esse richiede, mancando il riduttore, a differenza cioè dal caso dell'ione stannoso, un sol rosso ed alcalino di oro.

Tale soluzione venne da me sempre preparata, utilizzando le indicazioni contenute nella Memoria di H. R. Kruyt e della signora H. G. van Arkel-Adriani⁽⁵⁾, indicazioni riferentisi al metodo indicato da Temnick-Groll⁽⁶⁾. A 90 cmc. di acqua distillata si aggiungono 10 cmc. di una soluzione al 3% di H₂O₂ (ottenuta diluendo del *Perhydrol* di Merck ed esattamente neutralizzata con una soluzione di NaOH) e 0,6 cmc. di una soluzione di HAuCl₄ al 0,67%; si aggiunge una quantità calcolata di soluzione di NaOH per la neutralizzazione dell'acido cloridrico formatosi. Infine si aumenta la concentrazione dell'oro, aggiungendo ancora 1,4 cmc. di soluzione di HAuCl₄ e facendo seguire un'altra neutralizzazione. Per rendere alcalina la soluzione colloidale d'oro che così si è preparata e che ha un magnifico color rosso rubino intenso, aggiungo 1 cmc. di soda caustica 0,08 n. Noto qui che, allo scopo di ottenere circa 1 gr. di prodotto e con un tenore di oro — circa

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 ottobre 1927.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del Regio Politecnico di Milano.

(3) G. R. LÉVI e C. FONTANA, «Rend. Lincei», vol. V (6), p. 996 (1927).

(4) Appendice al *Kolloidchemie* di Zsigmondy, IV ed. (1922).

(5) «Centr. B.», 1919, III, 455-56; «Rec. trav. chim. Pays-Bas», 39 (1920), 609; «Versl. Kon. Akad. A.», 27 (1919), 685.

(6) «Chem. Weekbl.», 13 (1916).

il 10% - che mi permettesse di applicare con profitto il metodo di Scherrer, era necessario di preparare circa due litri di soluzione colloidale d'oro per volta e, per quello che riguarda la precipitazione degli idrati di alluminio, zirconio e torio, procedere per prove successive, perchè la letteratura sull'argomento non indica le percentuali d'acqua trattenuta nei prodotti che si formano.

Porpora d'oro e alluminio. — La preparazione più antica, ed anche la più attendibile, di questa porpora è data dal Debray ⁽¹⁾. Egli otteneva una polvere rossa (che, trattata con mercurio, non perde il suo colore) dall'azione, a moderata temperatura, di una soluzione di ossalato potassico su di una soluzione di cloruro d'oro e acetato sodico ed avente in sospensione dell'idrato di alluminio.

Ho preferito però seguire in questo mio lavoro la via segnata da Zsigmondy ⁽²⁾ nella sua sintesi della porpora di Cassio, partire cioè dalla soluzione colloidale d'oro, far avvenire la precipitazione dell'idrato di alluminio e dell'oro nel liquido stesso; così i risultati qui ottenuti sono confrontabili con le misure ultramicroscopiche fatte da Zsigmondy sulle porpore di Cassio sintetiche, misure che sono state pienamente confermate nel lavoro precedentemente citato.

Aggiungendo al sol alcalino d'oro, contenente circa gr. 0,1 di oro, una soluzione contenente gr. 6,2 di allume potassico, ho ottenuto dei fiocchi rosso-bruni. Un'aggiunta di cloruro e idrato di ammonio completano e facilitano la precipitazione. Ho mantenuto il liquido in agitazione per circa due ore; ho lasciato depositare il precipitato per circa dodici ore, dopo di che il liquido perfettamente incolore mostrò di non contenere più tracce di oro. Il prodotto seccato all'aria, cioè alla temperatura di circa 20°, ha l'aspetto rosso-violaceo delle porpore oro-stagno, ha dato all'analisi i seguenti risultati:

Au	10,80 %
Al ₂ O ₃	66,60 %
H ₂ O	21,61 %

Fotografato con i soliti dispositivi di Debye e Scherrer, usando una radiazione X di rame puro ($\lambda_2 = 1,540 \text{ \AA}$; $\lambda_3 = 1,389 \text{ \AA}$) prodotta da un tubo Philips-Seeman, ho ottenuto un fotogramma che, come risulta dalla tabella I, mi ha permesso di stabilire la struttura del prodotto esaminato e di misurare il grado di dispersione dell'oro in esso contenuto.

(1) « C. R. », 75 (1872), 1025.

(2) « Lieb. Ann. », 301 (1898), 375.

TABELLA I.

Porpora di oro e alluminio seccata all'aria

(10.80 Au) = Anticatalodo di rame = Spessore del preparato 1 mm.

θ	39°30'	45°4'	66°30'	79°18'	112°0'
$h_1 \ h_2 \ h_3$	111	200	220	113	133
$\frac{1}{\cos \theta/2}$	1.062	1.082	1.196	1.300	2.459
B in mm.	2.37	2.56	2.86	3.35	4.34

L'analisi röntgenografica ha dunque rivelato che la struttura della porpora di alluminio è perfettamente identica a quella della porpora di Cassio: l'oro vi è contenuto allo stato elementare e i massimi delle interferenze mi hanno permesso di calcolare per a (lato della cella elementare) dei valori che sono in perfetto accordo con quelli ordinariamente dati ⁽¹⁾; l'idrato di alluminio risulta in questo prodotto praticamente amorfo. L'applicazione del metodo di Scherrer per la determinazione delle dimensioni dei granuli di oro mi ha dato per Λ (lato del granulo supposto cubico) il valore di 32,8 Å, valore che, data l'approssimazione di queste misure, può ritenersi concordante con i 36 Å di media trovati nel precedente lavoro per le porpore di Cassio.

Porpora di oro e zirconio. — Nella letteratura chimica non si fa cenno ad una porpora di oro e zirconio. Ho potuto preparare però un prodotto, che, dal modo di ottenimento e dai risultati dell'analisi röntgenografica, ha rivelato in modo chiarissimo la sua struttura analoga a quella della porpora di Cassio e di alluminio.

TABELLA II.

Porpora di oro e zirconio seccata all'aria

(10.21 Au) = Anticatalodo di rame = Spessore del preparato 1 mm.

θ	82°30'	98°0'	115°30'	117°0'
$h_1 \ h_2 \ h_3$	222	400	133	420
$\frac{1}{\cos \theta/2}$	1.336	1.530	1.777	1.914
B in mm.	2.66	2.76	2.96	3.15

(1) VÉGARD, «Phil. Mag.», 31 (1916), 83; SCHERRER, «Nach. Ges. d. Wiss. Göttingen», 1918; KAHLER, «Phys. Rev.», 18 (1921), 210.

Ad un sol alcalino di oro, preparato nel modo sopraindicato e contenente complessivamente circ gr. 0,1 di oro, ho aggiunto una soluzione concentrata contenente gr. 2,00 di solfato di zirconio. Anche qui un'aggiunta idrato e cloruro di ammonio facilita e completa la flocculazione di un prodotto rosso-bruno. Ho agitato tutto il liquido per due ore e poi ho lasciato depositare il precipitato per dodici ore. Il liquido soprastante, perfettamente incolore, mostrò di non contenere più oro. Il prodotto, che, seccato all'aria (circa 20°), ha il solito aspetto di queste porpore, ha dato all'analisi i seguenti risultati:

Au	10,21 %
ZrO ₂	63,56 %
H ₂ O	25,37 %

Esaminato con il metodo di Scherrer, esso ha rivelato unicamente le principali interferenze dell'oro, dalle quali con il calcolo già descritto in precedenti lavori si deduce per Λ (lato del granulo d'oro supposto cubico) il valore di 36,8 Å.

L'analisi röntgenografica mostra dunque che in questo prodotto l'oro si trova allo stato elementare ad un grado di dispersione identico a quello delle porpore di stagno e di alluminio; la posizione delle interferenze ci dà per a valori coincidenti con quelli ottenuti da preparati di oro puro, mentre anche l'idrato di zirconio ha struttura praticamente amorfa.

Porpora di oro e di torio. — La porpora di oro e di torio venne preparata per la prima volta da H. R. Kruyt e H. G. van Arkel-Adriani (loc. cit.), studiando le serie di flocculazioni irregolari e precisamente studiando la flocculazione di un sol alcalino d'oro operato da soluzioni diluitissime di nitrato di torio.

Ricordando che il torio ha un forte potere assorbente per i raggi X, ho preparato un prodotto con un maggior tenore di oro. Ho provocato la flocculazione completa di un sol alcalino di oro, contenente complessivamente gr. 0,12 di Au, mediante gr. 1,68 di Th(NO₃)₄ · 12H₂O e convenienti quantità di idrato e cloruro di ammonio, tenendo il liquido agitato per circa due ore e lasciando depositare il precipitato per dodici ore. Il prodotto, seccato all'aria (20°), ha l'aspetto caratteristico di tutte queste porpore ed ha dato all'analisi i seguenti risultati:

Au	11,80 %
ThO ₂	63,53 %
H ₂ O	24,87 %

Fotografato con i soliti dispositivi, ha dato dei fotogrammi quasi privi di linee. Questo induce a credere che nella porpora di torio i granuli di oro si trovino, per così dire, annegati nei granuli di idrato di torio, mentre l'assorbimento operato da tale idrato è così forte da impedire che l'oro dia il fotogramma caratteristico della sua struttura cristallina. A sua volta l'idrato di torio puro, seccato a 20°, non dà linee di interferenza caratteristiche e ciò in accordo con i risultati di G. R. Levi⁽¹⁾. Detto Autore trovò che l'idrato di torio di recente preparazione dà nette interferenze solo quando venga riscaldato al di sopra di 340°.

Così sulla porpora di torio l'analisi röntgenografica nulla ha potuto dire, pur dovendosi ritenere, a mio avviso, la spiegazione sopra data come sicura; perciò l'analogia della porpora di torio con le precedenti non è comunque infirmata da tale risultato negativo.

Riassumendo: I. Viene data la preparazione di una porpora di oro e zirconio.

II. Viene dimostrato che la struttura delle porpore di oro-alluminio ed oro-zirconio è perfettamente analoga a quella delle porpore di Cassio e che l'oro vi si trova allo stato elementare con lo stesso grado di dispersione osservato in quest'ultimo.

III. Non si è potuto verificare la conclusione parallela per la porpora di torio, assai verosimilmente per l'alto peso molecolare del sopporro.

Chimica. — *La risoluzione di una banda di assorbimento ritenuta comune al praseodimio e al neodimio.* Nota di L. FERNANDES presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulla struttura cristallina del cloruro doppio di cadmio e cesio CsCdCl_3 . (Considerazioni sulla struttura monometrica tipo A $[\text{BX}_3]$).* Nota di A. FERRARI e A. BARONI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *La struttura del clorato d'argento.* Nota di A. FERRARI e C. G. FONTANA presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Sulla presenza del Miocene nei dintorni di El-Abiàr (Cirenaica).* Nota ⁽¹⁾ di A. DESIO presentata dal Socio G. DAINELLI.

Durante il viaggio all'Oasi di Giarabùb, promosso nel 1926 dalla Reale Società Geografica Italiana, dovendo trattenermi per alcuni giorni a Bengasi, ne approfittai per compiere un'escursione sull'altipiano che domina la piana bengasina verso oriente.

Secondo gli studi e le carte più recenti della Cirenaica tutta questa parte dell'altipiano, resulterebbe costituita da terreni eocenici disposti in strati suborizzontali leggermente inclinati verso la pianura. Il limite occidentale di tali affioramenti corrisponderebbe su per giù al ciglione dell'altipiano, mentre più ad ovest, in corrispondenza della terrazza di Benina, comparirebbe il Miocene (Inferiore e Medio). Una zona gessifera è tuttavia indicata nei pressi di Er-Regema ed attribuita dubitativamente al Miocene Superiore ⁽²⁾.

Durante il percorso in ferrovia fra Benina e El-Abiàr, ebbi occasione di vedere l'affioramento di gesso già noto, che si trova poco a ovest della prima ridotta, e di osservarne anche un'altro a qualche chilometro da Bu-Mariam, lungo la strada ferrata. Il gesso si presenta come un mammellone cristallino immerso nella coltre di materiali detritici superficiali. Nelle vicinanze affiorano anche delle marne verdastre. Non avendo potuto fermarmi sul posto, non posso fornire alcuna notizia sulla posizione stratigrafica dei gessi, i quali però, a giudicare dalla associazione colle marne verdi, parrebbero rappresentare livelli piuttosto bassi del Miocene. Ciò potrebbe forse avere in certo qual modo una conferma in quello che dovrò dire più avanti.

Molto maggiore interesse presentò per me la sosta di El-Abiàr ed una rapida escursione in autocarro fino alla ridotta di Bu-Semah.

L'altipiano cirenaico nei dintorni di El-Abiàr e fino a Bu-Semah, che giace circa 26 km. a NE, è quasi completamente costituito da un calcare bianco-latteo abbastanza compatto, disposto in strati suborizzontali. I fossili sono frequenti quasi dovunque, ma in generale, sono poco ben conservati: si tratta di nuclei interni e di impronte, quest'ultime tuttavia abbastanza bene determinabili. In un primo momento, dato l'aspetto della roccia che non è diverso da quello dei calcari di Derna, credetti di trovarmi in pre-

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 ottobre 1927.

(2) STEFANINI G., *Struttura geologica della Cirenaica e Cenni descrittivi a corredo dello Schizzo Geologico Dimostrativo della Cirenaica*, in MARINELLI O., *La Cirenaica geografica, economica, politica*, Vallardi, Milano 112.

senza dell'Eocene e cercai a lungo le nummuliti di cui sapevo ricco tale calcare. Ben presto però mi convinsi della loro assenza e mi parve invece di riconoscere fra i gastropodi e i lamellibranchi, qualche forma neogenica.

Riguardando ora il materiale raccolto durante l'escursione, ho avuto conferma della mia supposizione ed anzi ho potuto determinare l'età miocenica di quei calcari.

Ecco il risultato delle determinazioni paleontologiche:

EL ABIAR:

- + × *Pecten cristato-costatus* Sacco.
- × *Dosinia lupinus* L.
- Pectunculus* sp.
- × *Protoma quadriplicata* (Bast.)
- Potamides Doboisi* Hoernes
- + × *Orbicella ellisiana* Defr.
- + × *Stylophora panamensis* Vaugh.

Fra EL-ABIAR e SIDI MAHIUS:

- × *Phacoides (Linga) columbella* Lam.
- × » *borealis* (L.)
- × *Miltha (Eomiltha) callipteryx* (Tourn.)
- × *Meretrix (Callista) erycinoides* Lam.
- × *Tapes (Calliotapes) vetulus* Bast.
- × *Mastra Kunstleri* Cossm. et Peyr.
- Hinnites* cfr. *hercolanianus* Cocc.
- × *Cardium* cfr. *edule* L.
- Arca (Barbatia) modioloides* Cantr.
- Conus* sp.
- × *Cypraea (Cavicyprae)* cfr. *subovum* d'Orb.
- × *Turritella pythagoraica* Hilb.
- » cfr. *turris* Bast.
- × *Terebralia bidentata* var. *fusiformis* (Schaffer)
- × *Natica millepunctata* Lam.
- × *Oxystele orientalis* Cossm. et Peyr.
- Fissurella graeca* (L.)
- Spatangus* sp.
- + × *Orbicella ellisiana* Defr.

SIDI MAHIUS:

- × + *Stylophora panamensis* Vaugh.

FRA SIDI MAHIUS e BU SEMAH:

- Cardita (Pteromeris) nuculina* Dujardin
- + *Strombus* cfr. *coronatus* Defr.

Circa 2 km. a NNE di BU-SEMAH:

- + × *Stylophora panamensis* Vaugh.

Ho contraddistinto con una + le forme già note nel Miocene della Cirenaica propriamente detta, con una × quelle della Marmarica⁽¹⁾.

Nel complesso questa piccola fauna rappresenta abbastanza bene non solo il Miocene, ma oserei dire anche il Miocene Medio.

Vi sono infatti contenute delle specie abbastanza caratteristiche come il *Pecten cristato-costatus* dell'Elveziano; inoltre osservo che l'*Arca modioloides* è comparsa con l'Elveziano, che la *Turritella pythagoraica* è stata finora trovata solo nel Miocene Medio e che nella medesima epoca ebbe la massima diffusione il *Phacoides (Linga) columbella*, ch'è uno dei fossili più frequenti della regione. Lo *Strombus* cfr. *coronatus* corrisponde poi a quella grossa forma di *Strombus* che fu già segnalata dal Newton in Cirenaica nel Miocene Medio⁽²⁾. Devo ancora aggiungere che insieme con i fossili macroscopici, la roccia contiene in notevole quantità briozoi, foraminiferi, *Lithotamnium*. Interessante soprattutto la presenza di una *Alveolina*, determinata come *Alveolina Bradyi* sp. n. (= *A. melo* d'Orb. pr. p.) dal prof. Silvestri che qui tengo a ringraziare, la quale se in un primo momento aveva sollevato in me dubbi sull'età della formazione, ora è venuta anch'essa a confermare l'età miocenica dei calcari di El-Abiâr.

Confrontare dettagliatamente la fauna di El-Abiâr con quella di altre parti della Cirenaica, non è opportuno, essendo la prima troppo scarsa e la seconda troppo poco conosciuta. Come si vede però dai contrassegni posti accanto alle determinazioni, la massima parte delle specie è in comune con altre località fossilifere della regione, e specialmente della Marmarica, più nota sotto il punto di vista paleontologico.

Per quanto riguarda infine l'ambiente batometrico, la fauna dei dintorni di El-Abiâr indica una profondità leggermente maggiore di quella di altre zone della nostra colonia, come ad esempio di quella di Porto Bardia e dell'Oasi di Giarabùb⁽³⁾ caratterizzata specialmente dalla grande diffusione delle *Ostreae*, e ciò del resto trova conferma anche nella natura della roccia. Mentre infatti nei dintorni di El-Abiâr predominano i calcari compatti, a Porto Bardia e a Giarabùb prevalgono le arenarie calcaree talora anche abbastanza grossolane. Ricordo tuttavia che una zona di arenaria giallo-verdastre fu da me incontrata fra Sidi Mahiùs e Bu-Semah e che gli stessi calcari con gli stessi fossili, fra cui anche l'*Alveolina Bradyi*, che può dirsi il fossile caratteristico - tanto che proporrei di contraddistinguerli col nome di

(1) Devo alla gentilezza della dott. R. Zuffardi dell'Ist. Geol. della R. Università di Torino, che qui mi è grato ringraziare, la determinazione dei coralli.

(2) NEWTON R. B., *Kainozoic mollusca from Cyrenaica*. « Quart. Journ. », vol. LXVII, 1911, n. 268, p. 626, tav. XLIII, fig. 14.

(3) A proposito di queste, vedi: DESTO A., *Gli echinodermi miocenici di Porto Bardia e dell'Oasi di Giarabùb (Marmarica)*, in questi « Rendiconti », vol. V, ser. VI, I sem. 1927, fasc. 12, p. 1021; *I molluschi miocenici di Porto Bardia e dell'Oasi di Giarabùb (Marmarica)*, Ibid., vol. VI, ser. VI, II sem., fasc. 1-2, p. 66.

« Calcari ad *Alveolina Bradyi* » — si ritrovano nei dintorni di esc-Scegga, a circa metà strada fra Porto Bardia e Giarabùb. Si potrebbe fors' anche aggiungere che nel suo complesso la fauna parrebbe di mare piuttosto caldo.

Non so fin dove si spingano verso nord i calcari ad *Alveolina Bradyi*; circa 3 km. a N. di Bu-Semah, ho raccolto dei calcari arenacei bianchi con Assiline e Nummuliti, i quali però trovandosi presso i ruderi di un' antica costruzione, potrebbero — come mi parve sul momento — non essere in posto.

La brevità della sosta non mi permise tuttavia di eliminare completamente i dubbi in proposito.

Embriologia. — *Inibizione differenziale nello sviluppo dei Cefalopodi e considerazioni sul così detto gradiente assiale*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ preventiva di S. RANZI presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Ho intrapreso lo studio delle inibizioni che, per effetto di determinati agenti (LiCl, ecc.) fatti agire in determinati momenti dello sviluppo, si possono ottenere in embrioni di Cefalopodi⁽³⁾ al fine di chiarire sia questioni riguardanti lo sviluppo di questi animali, sia di risalire a questioni più generali dell'embriogenesi. Poichè ricerche in questo senso, su questo materiale, mancavano quasi del tutto, limitandosi le nostre conoscenze a pochi dati raccolti da Schimkewitsch⁽⁴⁾ che non potè far vivere i suoi embrioni molto tempo e quindi dovè limitarsi allo studio dei primi stadi dello sviluppo, si imponevano ricerche con questo indirizzo, dovendosi stabilire se i fatti, che sui Cefalopodi si riusciva ad assodare, concordassero con le più generali teorie costruite sui dati dell'embriologia sperimentale.

Tra queste ho voluto esaminare per prima quella del gradiente assiale formulata da Child⁽⁵⁾, e di essa mi occuperò in questa nota dopo aver descritto i tipi di mostruosità che ho potuto ottenere; mi riferirò sempre a risultati ottenuti su *Loligo vulgaris* Lam. per azione di cloruro di litio, dichiarando però che le stesse inibizioni si possono osservare nelle altre forme studiate e si possono ottenere anche per azione di altri sali.

(1) Ricerche eseguite nella Stazione Zoologica di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 ottobre 1927.

(3) RANZI S., « Boll. Soc. Biol. Sper. », vol. 1, p. 343, 1926.

(4) SCHIMKEWITSCH W., « Anat. Anz. », Bd. 16, p. 564, 1899; « Zeit. f. wiss. Zool. », Bd. 67, p. 491, 1900.

(5) Vedi CHILD C. M., *Physiological foundations of behavior*, H. Holt, New York, 1924, che porta a questo soggetto ricca bibliografia.

Una prima serie di inibizioni è costituita da mostri nei quali va a poco a poco determinandosi la ciclopia. Primo stadio di questa serie è rappresentato da mostri, nei quali lo *stomodaeum* non si introflette o la sua introflessione è incompleta; la lingua invece cresce normalmente od anche più del normale, essa costituisce quindi un'appendice che sporge nel punto in cui negli embrioni normali si apre la bocca. Su questa appendice generalmente sono in posizione normale l'abbozzo delle ghiandole salivari addominali, che però può essere più o meno ridotto, e l'abbozzo del sacco della radula. In questi embrioni tutti gli altri organi generalmente sono in condizioni normali di sviluppo.

Un secondo stadio⁽¹⁾ è rappresentato da mostri nei quali questa malformazione dello *stomodaeum* si associa ad una, più o meno forte, convergenza degli occhi sulla linea medio-dorsale del capo. In questi mostri lo *stomodaeum* è generalmente più ridotto che nel caso precedente; anche la lingua è generalmente meno sviluppata ed, in taluni casi, è ridotta ad una semplice appendice frangiata, mentre ogni traccia di introflessione è scomparsa. I gangli cerebrali possono essere più o meno ridotti. Gli altri organi non risentono eccessivamente di un tale stato di cose.

Un terzo stadio è caratterizzato da un ulteriore avvicinamento degli occhi, che vengono a fondersi parzialmente, costituendo così un occhio solo a forma di otto, o completamente, costituendo così un occhio simile ad un occhio normale; in ogni caso però il cristallino è unico. In questi mostri, veri e propri ciclopi, lo *stomodaeum* generalmente è del tutto scomparso, a volte però al suo posto è una piastra di ectoderma ispessito o una corta appendice più o meno frangiata. I gangli cerebrali possono mancare od essere molto ridotti e giacciono anteriormente all'occhio, tra questo e il punto nel quale, a volte, sono le vestigia dello *stomodaeum*. I gangli ottici, pari in origine, si fondono in stadi di sviluppo successivi in un'unica massa posta sotto l'occhio. Gli abbozzi dei corpi bianchi tendono a portarsi caudalmente all'occhio e ad avvicinarsi sulla linea mediana, mai però mi è stato dato trovarli fusi.

Una seconda serie di inibizioni è rappresentata da mostri nei quali i singoli organi, occhi, statocisti, intestino, gangli, ghiandola del guscio, ecc., sono più o meno inibiti; gli occhi possono essere ridotti ad introflessioni brevi e strette o ad una semplice piastra di ectoderma ispessito; le statocisti possono anche essere notevolmente ridotte di volume od anche presentarsi come cavità informi o mancare; l'intestino e i gangli possono essere più o meno ridotti, mentre la ghiandola del guscio può restare in libera comunicazione con l'esterno e presentarsi più o meno deformata. Mentre alcuni embrioni di questa seconda serie appaiono corrispondere a embrioni normali nei quali sono avvenute le inibizioni in questione, altri corrispon-

(1) Si capisce che questa è una semplice seriazione delle malformazioni ottenute e non di stadi successivi di evoluzione di uno stesso embrione.

dono a mostri della prima serie nei quali sono avvenute le stesse inibizioni; si osserva così insieme a queste una convergenza di occhi, od anche la stessa ciclopia con l'occhio impari e mediano, più o meno ridotto.

Una terza serie di malformazioni è caratterizzata da una più forte inibizione; gli occhi mancano così completamente e non se ne osserva più traccia. Di questi mostri anoftalmi ve ne sono due tipi nettamente distinti: uno deve essere concepito come prodotto dall'inibizione di un ciclope nel quale la parte anteriore e dorsale, e quindi l'occhio non si sia, per una più forte inibizione, sviluppata; l'altro tipo presenta spesso invece una traccia dello *stomodaeum* e per l'aspetto generale si rivela corrispondere a mostri con due occhi distinti in posizione normale o quasi. Nel primo tipo si osserva in generale un maggiore sviluppo degli organi ventrali, nel secondo una maggiore inibizione di questi ⁽¹⁾.

Una quarta serie è caratterizzata da mostri nei quali, per più forte inibizione, quasi tutti gli organi sono scomparsi o ridottissimi; viene così l'embrione a prendere l'aspetto di una massa informe, nella quale si può riconoscere solo qualche organo: un ganglio, ovvero la ghiandola del guscio molto trasformata... ecc.

Oltre a queste quattro serie che, come ho fatto risaltare, sono legate tra loro da una similitudine di inibizione, ve ne è un'altra costituita da mostri, in cui le metà destra e sinistra non si comportano egualmente. In alcuni casi si tratta di una riduzione generale di un lato, onde l'embrione è più o meno asimmetrico; altre volte invece un lato è del tutto inibito ed i suoi organi non sono formati affatto, mentre quelli dell'altro lato si presentano normali. A volte si possono anche avere mostri nei quali uno dei lati presenta uno dei tipi di inibizione precedentemente descritti, l'altro un altro. Si ha così una grande varietà di mostri asimmetrici, dei quali in seguito più ampiamente parlerò.

Avendo ottenuto dalle ricerche sperimentali questi risultati, ho voluto vedere se essi fossero tali da indicare l'esistenza di un gradiente assiale.

La convergenza di occhi e la ciclopia, osservata in embrioni senza altre inibizioni deve essere posta in relazione con una primitiva unicità dell'ab-

(1) Le due sorta di anoftalmi gli uni corrispondenti ai ciclopi, gli altri ad embrioni con due occhi, che riscontro nei Cefalopodi, non sono note nei Vertebrati. Tutti gli AA. che si occupano in questi animali degli anoftalmi (STOCKARD C. R., « Journ. of exp. Zool. », vol. 6, p. 285, 1909; COTRONEI G., « Arch. Ital. de Biol. », T. 71, p. 83, 1922; LEPLAT G., « Arch. de Biol. », T. 30, p. 231, 1920, ecc.), ritengono questi mostri come stadio ulteriore di inibizione seriabile con la ciclopia, e nessuno fa menzione di un'anoftalmia dovuta all'intervento sui due lati di quella inibizione che, estrinsecandosi su di un lato, porta alla monoftalmia asimmetrica. Taluni però degli embrioni disegnati da STOCKARD (« Am. Journ. of. Anat. », voi. 10, p. 393, 1910), con autodifferenziamento bilaterale della lente e anoftalmia, rientrano certamente in questo tipo, ed in un allevamento di *Salmo fario* ho potuto trovare un anoftalmo che, dai caratteri dell'encefalo, appariva generato dall'inibizione dei due occhi laterali e non dell'occhio mediano del ciclope.

bozzo oculare. Dai dati dello sviluppo normale dei Cefalopodi sappiamo che gli abbozzi degli occhi sono tra loro più vicini in principio che non nei successivi stadi dello sviluppo e che essi vanno, col progredire di questo, spostandosi in fuori; è quindi ammissibile che i loro abbozzi, prima di essere morfologicamente riconoscibili, siano più vicini o fusi. Il fatto che in determinate condizioni sperimentali si ottengono mostri ciclopici, dimostra che l'abbozzo oculare è unico e mediano, perchè, se così non fosse, bisognerebbe ammettere: o che l'agente inibitore stimola organi corrispondenti, posti sui due lati del corpo, ad unirsi sulla linea mediana, o che esso abbia un'azione inibitoria selettiva sull'ectoderma interposto tra i due abbozzi oculari ⁽¹⁾, che verrebbe a ridursi, mentre l'ectoderma delle altre regioni del corpo si svilupperebbe normalmente, ipotesi ambedue molto poco verisimili.

I mostri della prima serie con convergenza di occhi ed i ciclopi vanno quindi considerati come prodotti da un'inibizione che ha impedito, tra l'altro, agli abbozzi oculari di raggiungere la loro posizione normale, mentre questi abbozzi, nel punto in cui sono restati, si sono sviluppati a costituire un occhio unico, se ancora uniti, due occhi separati, se già sufficientemente divisi. Ciclopi e mostri con convergenza di occhi appaiono, in altre parole, dovuti ad un'inibizione seguita da un successivo processo di regolazione, per cui gli abbozzi, sebbene in sede anomala, si sono evoluti, con processi normali, negli organi che da essi dovevano normalmente originarsi. Questi mostri non possono quindi essere presi come prova del gradiente assiale.

In altre serie di mostri osserviamo che le più forti e più frequenti malformazioni interessano gli occhi, mentre lo *stomodaeum*, in molti casi, è normalmente sviluppato. Un tale fenomeno sembra avere la sua spiegazione nel fatto che l'occhio è l'organo che nei Cefalopodi ha un lume più voluminoso e che, nei primi momenti dello sviluppo, presenta una complicata e continua evoluzione. Tra gli altri organi quelli che più, sotto questo aspetto, si avvicinano agli occhi sono le statocisti, che pure possono presentare imponenti fenomeni di riduzione ⁽²⁾. Queste forti inibizioni delle statocisti a volte sono accompagnate da leggere inibizioni di organi ad esse anteriori, che, secondo la teoria del gradiente assiale, dovrebbero essere inibiti prima di esse mentre vi sono mostri anoftalmi nei quali lo *stomodaeum*, che al suo apparire sul blastoderma è la formazione più anteriore, presenta solo deboli inibizioni. Questi fatti, ed altri che potrei citare, dimostrano che nei Cefalopodi non si può parlare di gradiente assiale. Le mie ricerche invece sem-

(1) Per i rapporti topografici fra i vari organi negli embrioni dei Cefalopodi non si potrebbe invocare altra causa di ciclopia, qualora questa fosse dovuta al fondersi passivo di due abbozzi oculari diversi, che un'atrofia dell'ectoderma destinato a formare la pelle tra i due occhi.

(2) In queste inibizioni hanno grande importanza i fenomeni di mancata secrezione di un liquido che riempie la cavità, fatto che per azione di cloruro di litio è stato già riscontrato da COTRONEI (op. cit.) negli Anfibi.

brano dimostrare che *i singoli organi sono inibiti non in ragione della loro posizione in rapporto a un ipotetico gradiente assiale, ma in ragione dell'istante in cui sono influenzati, in relazione alla maniera della loro formazione.*

Giunto alla conclusione che i fenomeni di inibizione differenziale osservati nei Cefalopodi dimostravano l'assenza di un gradiente assiale in queste forme, ho voluto vedere se i risultati delle numerose ricerche condotte dagli Aa. per dimostrare la presenza di un gradiente assiale in embrioni di altri tipi animali, fossero suscettibili di diversa interpretazione.

In questo esame mi limito per brevità ai soli Vertebrati, che sono le forme a questo fine meglio studiate, e rimando, per gli altri gruppi, al lavoro per esteso, dichiarando però fin da ora che anche i risultati ottenuti su questi conducono alle conclusioni cui sono giunto in base allo studio dei Cefalopodi.

Nei Vertebrati, le ricerche condotte con agenti inibitori dello sviluppo, ma non tossici al punto da determinare inizio di processi necrotici, hanno dato inibizioni dell'estremità cefalica (ciclopia, anoftalmia) e inibizioni della zona del labbro dorsale del blastoporo (Cotronei⁽¹⁾, Bellamy⁽²⁾). Questo sarebbe dovuto secondo Child⁽³⁾ all'esistenza di due gradienti, un gradiente principale cefalo-caudale ed un gradiente secondario caudo-cefalico, le parti dominanti dei quali sarebbero rispettivamente l'estremità cefalica e l'estremità caudale dell'embrione.

Se però prendiamo in esame i fatti osservati, vediamo che l'inibizione dell'estremità anteriore può ricondursi principalmente all'inibizione dell'encefalo precordale, dalla quale sembra dipendere l'inibizione degli altri organi (Cotronei, op. cit.). La parte anteriore dell'encefalo è senza dubbio una parte che ha uno sviluppo molto complesso, durante il quale si svolgono processi embriogenetici notevolissimi, e che presenta una cavità più ampia di quelle di tutti gli altri organi embrionali; non è quindi da stupirsi se, come nei Cefalopodi le più rilevanti malformazioni si riscontrano nell'occhio, così nei Vertebrati interessino l'encefalo precordale. La regione del labbro dorsale del blastoporo è anche facilmente suscettibile d'inibizione, ma ciò si spiega con gli importanti fenomeni embriogenetici che fin dai primi stadi dello sviluppo si svolgono in corrispondenza di essa. Mai l'inibizione, che appare all'estremità anteriore, procede verso la coda; anzi, negli Anfibi, essa sarebbe addirittura limitata all'encefalo precordale (Cotronei, op. cit.) e non progredirebbe mai oltre⁽⁴⁾.

(1) COTRONEI G., « Rend. R. Accad. Naz. Lincei » (Cl. Sc. fis. mat. e nat.), S. 5, vol. 31, sem. I, p. 473, 1922.

(2) BELLAMY A. W., « Am. Journ. of Anat. », vol. 30, p. 473, 1922.

(3) CHILD C. M., « Anat. Rec. », vol. 31, p. 369, 1925.

(4) STOCKARD (« Am. Journ. of Anat. », vol. 10, p. 369, 1910), ha ottenuto nei Pesci anche inibizioni della regione uditiva, ma trattasi di fenomeni più che altro localizzati alle otocisti.

Anche nelle ricerche compiute dalla scuola del Child⁽¹⁾ con impiego di agenti tossici in soluzioni meno diluite, ma tali da determinare a poco a poco la morte dell'embrione, vediamo iniziarsi i processi necrotici quasi nelle stesse zone nelle quali si inizia il processo d'inibizione ed, anche in questo caso la spiegazione è evidentemente la stessa: l'agente tossico agisce sulle zone nelle quali si svolgono complicati fenomeni organogenetici. Solo che la necrosi, perdurando l'azione del tossico, procede oltre, non certo per il più elevato metabolismo della zona vicina, ma per il naturale estendersi di ogni processo necrotico. In queste esperienze si nota poi la presenza di altre regioni nelle quali si può, fin dal principio dell'esperimento, ottenere l'inizio di processi disintegrativi; una di queste, in taluni stadi, si osserva a un di presso al livello del rombencefalo ed i processi necrotici, che in corrispondenza di essa si svolgono, prima che si inizino quelli dell'estremità anteriore dell'embrione, non sono certo un argomento favorevole alla teoria del gradiente assiale.

Tutto questo dimostra che quei fenomeni, che negli embrioni sembrano indicare la presenza di un gradiente assiale, hanno la loro ragione d'essere nella speciale maniera di sviluppo delle forme in esame e che il così detto gradiente assiale non è un regolatore dello sviluppo, ma una risultante più apparente che reale dei fenomeni in corso, risultante in ogni caso molto lontana dallo schema del Child di uno o due punti dominanti (all'estremità cefalica e all'estremità caudale) e delle altre parti gradatamente subordinate con metabolismo gradatamente decrescente, subordinazione e metabolismo decrescente che non sono indicati da alcun dato dell'embriologia sperimentale, anzi che sono pienamente in contrasto con molti fatti assodati.

Biologia. — *Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina.* —
III. Modificazioni della struttura ultramicroscopica del cristallino per azione della disimbibizione in aria secca e dell'idratazione in H²O, delle basse e delle alte temperature. Nota⁽²⁾ di D. CATTANEO presentata dal Socio A. DIONISI.

Continuando le ricerche sulle modificazioni che intervengono in condizioni sperimentali nella struttura del cristallino, quale si rileva all'esame ultramicroscopico col condensatore bicentrico a specchio B per campo oscuro, ho studiato ora l'azione della disimbibizione in aria secca e della imbibizione in acqua distillata e quindi l'effetto delle basse e delle alte temperature.

(1) HYMAN C. H., « Biol. Bull. », vol. 140, p. 32, 1920; « Journ. of Morphol. », vol. 42, p. 111, 1926; « Biol. Bull. », vol. 52, p. 1, 1927.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1927.

DISIMBIBIZIONE IN ARIA SECCA.

Per ottenere il disseccamento ho tenuto diversi cristallini freschissimi di bue in un comune essiccatore contenente sul fondo del cloruro di calcio puro. Secondo Bottazzi e Scalinci, in tali condizioni, la massima perdita di acqua avviene nelle prime 4-6 ore. Non si determina però opacamento del cristallino e solo dopo 24 ore si ha una tinta ambrata. Se con una fine pinza si solleva la capsula in corrispondenza del polo anteriore o posteriore, si formano numerose pieghe raggriate che stanno ad indicare il raggrinzamento della sostanza lenticolare.

Ho praticato l'esame ultramicroscopico ad intervalli diversi da 5 ore a 24.

Nell'epitelio i nuclei rimangono oscuri, otticamente vuoti, per un certo periodo; poi l'area nucleare viene mascherata dai granuli citoplasmatici che si fanno sempre più visibili e rifrangenti.

Nelle fibre corticali i condriosomi divengono molto brillanti e si conservano a lungo sotto l'aspetto di filamenti lisci o granulosi, questi ultimi ancora più rifrangenti dei primi.

Nulla degno di nota si osserva nelle fibre nucleari che rimangono otticamente vuote ed omogenee.

Se la disimbibizione si prolunga oltre le 24 ore, le fibre superficiali divengono sottili ed assumono una diffusa e spiccata rifrangenza; allora i condriosomi non sono in esse più visibili e in queste fibre tali condizioni permangono anche se si mettono i cristallini in H^2O , dove la sostanza lenticolare si rigonfia.

IMBIBIZIONE IN H^2O .

Per studiare gli effetti dell'imbibizione in H^2O , ho esaminato cristallini tenuti immersi per 1 ora, 2 ore, 3 ore, 5 ore, 8 ore, 24 ore, 30 ore in acqua distillata.

Per la rapida idratazione i cristallini ben presto si rigonfiano tendendo ad assumere la forma globosa; la capsula si stacca facilmente, al disotto si accumula una notevole quantità di liquido; se si lede la capsula, la sostanza corticale rigonfiata tende a fare ernia. Però la trasparenza non si altera e solo talvolta si osserva una leggera opalescenza con una tinta leggermente azzurrognola della corteccia.

Già dopo la prima ora si osservano modificazioni della struttura ultramicroscopica.

Nell'epitelio i nuclei permangono oscuri, il citoplasma è poco rifrangente, la struttura granulosa non è distintamente visibile.

Le più notevoli modificazioni si manifestano nelle fibre corticali: i condriosomi diminuiscono in modo apprezzabile riducendosi a corti e rari

frammenti, a granuli disseminati e distinti, fino a che scompaiono del tutto. Le fibre superficiali appaiono allora otticamente vuote, mentre si rendono manifesti i margini che le delimitano. Esse non sono così più differenziabili dalle fibre profonde della corteccia le quali, come di norma, hanno un contenuto oscuro omogeneo e sono limitate da linee regolari un po' rifrangenti. Le fibre nucleari appaiono sempre otticamente vuote.

In conclusione possiamo dire che gli effetti dell'imbibizione in H_2O si traducono in una graduale e rapida diminuzione fino alla scomparsa completa del condrioma, cioè della parte differenziata del citoplasma lenticolare, mentre rimane otticamente immutata la parte fondamentale omogenea.

Tali effetti sono paragonabili a quelli dovuti all'azione degli alcali e anche qui possiamo ammettere che la imbibizione assai notevole prevalga nella parte differenziata, onde per la rapida idratazione i condriosomi perdono la loro caratteristica rifrangenza e non si rendono più otticamente differenziabili dalla sostanza fondamentale.

AZIONE DEL FREDDO.

Si sono messi cristallini sospesi in miscele isosmotiche di $NaCl$ in miscela frigorifera; inoltre, per evitare possibili influenze perturbatrici, ho tenuto in ghiaccio bulbi interi avvolti in sacchetti di carta impermeabile. A diversi intervalli di tempo (da 6 ore a 24, 30, 48, 55, 105), si sono estratti i cristallini ed esaminati immediatamente all'ultramicroscopio.

È noto che per la diminuzione di temperatura dopo la morte si può determinare una opacificazione del nucleo lenticolare descritta sotto il nome di *cataratta spontanea postmortale* o anche *da freddo*.

Secondo Buglia, coll'abbassarsi della temperatura dopo la morte, si ha una retrocessione della dissociazione elettrolitica e conseguente diminuzione della concentrazione degli HO , per cui la reazione si sposta verso la neutralità e in corrispondenza del punto isoelettrico avviene l'opacamento della lente per la precipitazione delle sostanze albuminose.

Tanto nei cristallini isolati quanto in quelli contenuti ancora nel bulbo io non ho mai notato alterazioni apprezzabili nella trasparenza; in nessuno dei casi ho riscontrato opacificazione del nucleo lenticolare; solo in un cristallino, levato dal bulbo dopo 105 ore di permanenza in ghiaccio, si stabilì un opacamento discoide limitato agli strati corticali in corrispondenza della regione polare anteriore e posteriore.

Fino ad un certo periodo la struttura ultramicroscopica non si modifica visibilmente per azione delle basse temperature.

I nuclei dell'epitelio permangono otticamente vuoti, il citoplasma rifrangente granuloso; in seguito tutto il corpo cellulare viene invaso dai granuli citoplasmatici che si fanno più distinti e rifrangenti.

Tali modificazioni evidentemente sono in rapporto ai fenomeni che si manifestano dopo la morte delle cellule e non dipendono quindi direttamente dall'abbassamento di temperatura.

Negli strati superficiali della corteccia anteriore e posteriore si notano sempre i condriosomi sotto l'aspetto di filamenti longitudinali; le fibre nucleari appaiono otticamente vuote.

Solo negli ultimi periodi si manifestano alterazioni morfologiche del condrioma: i filamenti si trasformano in frammenti irregolari granulosi, catene di granuli, anellini intercalati, fenomeni questi postmortalì, come risulta dal fatto che modificazioni non molto dissimili si riscontrano in cristallini di controllo tenuti nelle stesse condizioni a temperatura ambiente ed esaminati dopo un egual periodo dalla morte.

Nel cristallino, il quale all'atto dell'esame presentava una zona di opacità alla regione polare anteriore e posteriore, in corrispondenza di tale zona apparivano all'osservazione ultramicroscopica numerose formazioni ovalari rifrangenti a doppio contorno simili a vacuoli, e tra essi disseminati granuli rifrangenti.

AZIONE DEL CALORE.

Analogamente a quello che si è fatto per sperimentare gli effetti delle basse temperature, seguendo gli stessi procedimenti e usando le stesse precauzioni, si sono tenuti cristallini in termostato a 40°, a 60°, a 65° ed esaminati quindi ad intervalli diversi (da 5 ore fino a 30).

A 40° il cristallino si conserva trasparente, a 60° si incomincia a notare opacificazione della corteccia.

All'osservazione ultramicroscopica l'epitelio appare più o meno alterato: i nuclei non sono più distintamente differenziabili dal protoplasma, il quale, in genere, è molto più rifrangente della norma.

Nelle fibre corticali i condriosomi tendono a scomparire, diventano meno rifrangenti e si trasformano generalmente in granuli ed anellini e si fanno sempre più rari. Le fibre nucleari rimangono fino ad un certo punto otticamente vuote.

Per seguire la involuzione dei condriosomi ho esaminato preparati di materiale allestito a fresco e messi su tavolino riscaldabile.

Dopo 5 minuti a 50° e a 55° non si notano modificazioni, a 60° i condriosomi si trovano diminuiti, mentre la parte fondamentale del citoplasma, prima otticamente vuota e quindi oscura, diventa più rifrangente.

Se si eleva la temperatura di qualche grado, i condriosomi scompaiono del tutto; la sostanza fondamentale assume un tono grigiastro.

All'osservazione con l'obbiettivo speciale ad immersione si rileva in essa una struttura finissimamente granulosa.

Dalle ricerche di Ph. Russo riguardo all'azione del calore sulle condizioni di vita del protoplasma tanto nelle cellule animali quanto nelle cellule

vegetali, risulta che se la temperatura cresce oltre un optimum che è di 43°, 44° per le cellule animali, di 50° per le cellule vegetali, i movimenti dei granuli citoplasmatici da prima vivissimi, cessano completamente e la cellula prende un aspetto granuloso brillante.

Secondo Mayer e Schaeffer, i quali invece concepiscono il protoplasma con un gel otticamente omogeneo, il calore agisce sul protoplasma come su quale che sia gel negativo, facendovi apparire dei granuli che precipitano.

Dalle mie esperienze risulta che per effetto del calore sulle fibre cristalline, mentre si ha una graduale scomparsa della parte differenziata, cioè del condrioma, si produce una precipitazione del colloide che costituisce il protoplasma fondamentale, il quale da omogeneo diventa granuloso.

In sostanza è lo stesso fenomeno che si determina per azione degli acidi e che abbiamo definito *processo di granulificazione del protoplasma lenticolare*.

BIBLIOGRAFIA

BOTTAZZI e SCALINCI, *Ricerche chimico-fisiche sulla lente cristallina*, « Atti della R. Accademia dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze fisiche », 1908-1909.

BUGLIA, *Sulla reazione chimica attuale della lente cristallina in condizioni di trasparenza normale e nell'opacamento (cataratia) postmortale o da freddo*, « Arch. di Oftalm. », XXXII, 1925.

CATTANEO, *Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina*. — I. *La struttura ultramicroscopica del cristallino normale*, « Atti della R. Accademia dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze fisiche », 1927.

Id., *Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina*. — II. *Modificazioni della struttura ultramicroscopica del cristallino per azione di sali, alcali e acidi*, « Atti della R. Accademia dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze fisiche », 1927.

MAYER et SCHAEFFER, *Sur la structure des Gels. Application à l'étude de la constitution du protoplasma animal et des liquides de l'organisme*, « C. Rend. Soc. de Biol. », LXIV, 1908.

RUSSO PH., *De la signification des aspects que présentent à l'ultramicroscope les cellules vivantes ou mortes*, « Arch. intern. de Phys. », X, 1910.

Fisiologia. — *Sulla curva termica giornaliera del ratto albino* ⁽¹⁾.

Nota ⁽²⁾ di A. GALAMINI ⁽³⁾ presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Le osservazioni sulla temperatura dei ratti albini sono scarsissime. Davis, Gley e Roudeau ⁽⁴⁾ fissarono la loro temperatura media a 38° c°. Secondo Rice Jones ⁽⁵⁾ il valore medio sarebbe di 38.01° c°: il massimo di 39.3: il minimo di 36. Le osservazioni furono fatte su 200 esemplari.

Stammey ⁽⁶⁾ su 82 ratti trovò una media di 38° c°, un massimo di 38.8 e un minimo di 36. Il maggior numero dei ratti avevano una temperatura di 38.3.

Le presenti ricerche furono fatte su 9 ratti, dei quali 7 (I-VII) giovani in via di sviluppo, due (VIII-IX) adulti.

Il I e il II erano alimentati con una dieta iperproteica, iperlipinica, subcarboidrosica; il III con una dieta iperlipinica; il IV, V, VI con una dieta ipercarboidrosica, sublipinica, subproteica; il VII, VIII, IX con una miscela composta di pane, formaggio, verdura, burro ecc., che i ratti in laboratorio hanno sempre mostrato di prediligere, riuniti in proporzione corrispondente presso a poco a quella colla quale erano abitualmente ingejerti dai ratti.

La temperatura era misurata facendo penetrare completamente nel retto degli animali il bulbo di un piccolo termometro a mercurio, che si teneva in sito per 5'. Dopo un certo periodo gli animali si abituano a tal genere di misurazioni senza reagire.

I dati raccolti nel periodo di perfetta tolleranza su ciascun animale sono riuniti nelle seguenti tabelle:

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia Umana della R. Università di Roma diretto dal prof. Silvestro Baglioni.

(2) Pervenuta all'Accademia il 4 ottobre 1927.

(3) Nelle ricerche fui coadiuvato dai dott. Giuseppe De Lellis e Mario Alessandrini che si servirono dei dati raccolti per la loro tesi di laurea.

(4) CH. RICHER, *Dictionnaire de Physiologie*, 1 fasc., tom. III, p. 89.

(5) RICE JONES, *Journal Path. Bact.*, 28, p. 525, 1925.

(6) STAMMEY A. D., *Journal of Physiology*, vol. 61, n. 3, p. 333, 1925.

TABELLA I.

Data	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	
20-12-25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	37.8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	(A) Ratto I ♂ di 4 mesi
21-12-25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	37.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
22-12-25	—	—	38.6	—	—	38.4	—	—	—	—	39.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
23-12-25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	38.7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
24-12-25	—	—	39.4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
28-12-25	—	—	—	37.8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
29-12-25	—	—	—	—	39.2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
30-12-25	39.7	—	—	39.5	—	—	39.5	—	—	39.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
31-12-25	—	—	39.5	—	—	39	—	38.9	—	—	39.4	—	38.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
1-1-26	39.8	—	—	39	—	—	—	—	38.4	—	—	—	—	38.8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
2-1-26	39.9	—	—	—	38.7	—	—	38.6	—	—	—	—	38.8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
3-1-26	39.6	—	—	—	38.9	—	—	38.7	—	—	—	—	38.8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
4-1-26	39.9	—	—	—	38.9	—	—	38.5	—	—	—	—	39.2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
5-1-26	39.1	—	—	—	39.2	—	—	38.5	—	—	—	—	39	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
6-1-26	39.8	—	—	—	39.4	—	—	38.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
7-1-26	39.7	—	—	38.2	—	—	39.4	—	38.2	—	39.4	—	39	—	—	39.6	—	—	40	—	—	38.8	—	—	39	»
9-1-26	—	39.8	—	—	39.1	—	—	—	39.2	—	—	—	39.2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
10-1-26	—	39.4	—	—	38.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
11-1-26	38.9	39.7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	38.4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	»
12-1-26	38.9	39.7	—	38.1	—	—	—	—	—	38.6	—	—	38.2	—	—	39.2	—	—	39.5	—	—	38.3	—	—	38.7	»
16-1-26	39.7	—	—	39.2	—	—	38.5	—	—	39	—	—	39.1	—	—	38.2	—	—	39.7	—	—	39.2	—	—	—	»

TABELLA III.

Data	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7
	39,6	—	—	39,1	—	—	39,1	—	—	38,9	—	—	39,7	—	—	40	—	—	39	—	—	39,5	—	—	—
	39,7	—	—	38,9	—	—	38,9	—	—	38,3	—	—	39,2	—	—	39,1	—	—	39,6	—	—	38,4	—	—	39,2
	39,8	—	—	39,3	—	—	39,5	—	—	39,3	—	—	39,7	—	—	39,7	—	—	40	—	—	39,2	—	—	—
(C) Ratto III ♂ di 3 mesi																									
	39,6	—	—	39,2	—	—	38,9	—	—	38,5	—	—	38,8	—	—	39,2	—	—	39,5	—	—	37,9	—	—	39,1
(A) Ratto IV ♂ di 4 mesi																									
	39,4	—	—	38,4	—	—	38,6	—	—	38,7	—	—	39,4	—	—	39,8	—	—	39,2	—	—	39,4	—	—	—
	39,3	—	—	39	—	—	38,6	—	—	38,8	—	—	39,1	—	—	38,8	—	—	39	—	—	38,3	—	—	39,7
(B) Ratto V ♂ di 3 mesi																									
	39	—	—	38,2	—	—	38,6	—	—	38,8	—	—	38,8	—	—	39	—	—	38,4	—	—	37,4	—	—	38,2
	37,7	—	—	37,6	—	—	38,3	—	—	38,4	—	—	38,7	—	—	39,7	—	—	38,4	—	—	38,8	—	—	—
	38,9	—	—	38,6	—	—	37,5	—	—	39,2	—	—	39,2	—	—	38,8	—	—	37,5	—	—	37,6	—	—	38
(D) Ratto VI ♂ di 4 mesi																									
	38,4	—	—	38	—	—	38,1	—	—	38,3	—	—	38,4	—	—	38,8	—	—	38,3	—	—	37,7	—	—	38,8
	38,4	—	—	37,4	—	—	38,7	—	—	38,6	—	—	38,6	—	—	39,2	—	—	38,6	—	—	38,3	—	—	—
	38,8	—	—	38,6	—	—	38,3	—	—	38,6	—	—	38,6	—	—	38,8	—	—	38,6	—	—	38,2	—	—	38,9
Ratto VII ♂ di 3 mesi																									
	38,7	—	—	38,2	—	—	37,5	—	—	37,8	—	—	39	—	—	38,8	—	—	37,9	—	—	38,3	—	—	—
	38,6	—	—	38,2	—	—	37,8	—	—	38,4	—	—	38,6	—	—	39,2	—	—	38,6	—	—	38,3	—	—	—
	38,6	—	—	38,4	—	—	37,7	—	—	38,1	—	—	37,8	—	—	38,5	—	—	38,2	—	—	37,6	—	—	38,6

TABELLA IV.

Data	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
27- 3-26	36.8	—	—	38.8	—	—	39	—	—	37.8	—	—	Ratto VIII ♂ adulto
27- 3-26	38.7	—	—	38.8	—	—	39	—	—	37.8	—	—	
28- 3-26	38.3	—	—	38.2	—	—	38.3	—	—	38.3	—	—	Ratto IX ♀ adulto
29- 3-26	38.3	—	—	38.7	—	—	38.8	—	—	38.3	—	—	
30- 3-26	38.4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	

Segue TABELLA IV:

Data	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	
27- 3-26	—	—	37.7	—	—	—	38.7	—	—	39.1	—	—	39	Ratto VIII ♂ adulto
27- 3-26	37.7	—	—	38.7	—	—	39.2	—	—	38.9	—	—	—	
28- 3-26	38.9	—	—	38.8	—	—	39	—	—	38.2	—	—	—	Ratto IX ♀ adulto
29- 3-26	38.4	—	—	38.6	—	—	38.8	—	—	38.7	—	—	—	
30- 3-26	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	

TABELLA V.

Data	Ratto	Valore medio giornaliero di temperatura	Media dei valori massimi	Media dei valori minimi	Oscillazioni massime giornaliere
7-1-26	I	39.1	39.7	38.5	1.7
12-1-26	»	38.8	39.4	38.2	1.5
16-1-26	»	39	39.1	38.6	1.5
Valori medi	. . .	38.9	39.4	38.4	1.63
5-1-26	II	39.05	39.5	38.2	1.5
7-1-26	»	39.1	39.7	38.6	1.7
12-1-26	»	38	39.4	38.2	1.8
Valori medi	. . .	38.9	39.5	38.3	1.66

Segue TABELLA V:

Data	Ratto	Valore medio giornaliero di temperatura	Media dei valori massimi	Media dei valori minimi	Oscillazioni massime giornaliere
5-1-26	III	39.3	39.7	38.9	1.1
7-1-26	»	39	39.5	38.3	1.4
12-1-26	»	39.5	39.9	39.2	0.8
Valori medi		39.2	39.7	38.8	1.1
5-1-26	IV	38.9	39.4	38.2	1.1
7-1-26	»	39.1	39.5	38.8	1.4
12-1-26	»	38.9	39.4	38.3	1.4
Valori medi		38.9	39.4	38.4	1.3
5-1-26	V	38.5	38.7	37.5	1.6
7-1-26	»	38.4	39	38	1.6
12-1-26	»	38.3	38.7	37.5	1.7
Valori medi		38.4	38.8	38	1.65
3-1-26	VI	38.3	38	38.1	0.8
7-1-26	»	38.4	38.8	37.8	1.8
12-1-26	»	38.6	38.8	38.2	0.7
Valori medi		38.4	38.5	38	1.1
3-1-26	VII	38.2	38.8	37.7	1
7-1-26	»	38.5	38.9	38	1.1
12-1-26	»	38.1	38.6	37.6	1
Valori medi		38.2	38.7	37.7	1.1
27-3-26	—	38.6	39.1	38.3	0.8
28-3-26	—	38.5	38.6	38.2	0.4
29-3-26	—	38.6	38.8	38.3	0.5
Valori medi		38.53	38.8	38.3	0.6

Dai dati su esposti si desume che i valori medi di temperatura, nei ratti esaminati hanno variato da 38.2 a 39.2: i valori massimi da 38,5 a 39.7: i minimi da 37.7 a 38.8. I dislivelli massimi giornalieri di temperatura hanno variato da 0.6 a 1.66.

Le presenti ricerche furono eseguite allo scopo di determinare le variazioni della curva termica giornaliera e non l'azione dell'età e degli alimenti ingeriti sulla temperatura. Essi perciò sono sotto questi punti di vista incompleti.

Tuttavia si possono fare alcune osservazioni. Trascurando i dati del ratto n. VIII, perchè raccolti in un solo giorno, si osserva che nel ratto adulto IX, il dislivello medio giornaliero di temperatura, fu di 0.6, cioè minore di quelli, 1.1-1.64, subiti dai ratti in via d'accrescimento. I valori di temperatura dei ratti I, II, III sono stati superiori a quelli dei ratti IV, V, VI, VII. Può darsi che il fatto sia dipeso dalla maggiore percentuale di grassi presente nella dieta dei primi, in confronto con la dieta dei secondi. Le percentuali in calorie degli idrati di C, dei grassi, delle proteine, nelle diete dei suddetti ratti sono riuniti nella seguente tabella:

Ratto	Proteine	Grassi	Idrati di C.
I-II	28 %	63.5 %	8.5 %
III	11.5 %	60.5 %	28 %
IV-V-VI	7 %	4 %	89 %
VII	26.5 %	26.5 %	47 %

Con i dati riuniti nelle precedenti tabelle sono state costruite le anesse grafiche (fig. 1), ponendo sull'ascissa le ore, nelle quali fu misurata la temperatura, sulle ordinate le temperature misurate espresse in centigradi. Si nota che la curva giornaliera della temperatura del ratto albino è caratterizzata da due massimi e da due minimi. Un massimo è raggiunto intorno alle 7 del mattino: la temperatura poi si abbassa gradatamente fino a raggiungere un minimo alle 13-16: un nuovo massimo è raggiunto alle 22-24: il secondo minimo alle 4.

Queste variazioni si accordano colle abitudini di vita del ratto.

Esso resta tranquillo sonnecchiante nella gabbia dalle 8 alle 16: si sveglia alle 17: diviene vivace, mangia, si muove, cerca di uscire dalla gabbia e compie allo scopo sforzi muscolari non indifferenti. Questo periodo di attività si protrae fino a mezzanotte: poi l'animale si assopisce di nuovo e dorme fino alle prime ore del mattino.

Nel ratto IX, adulto, femmina, tenuta in condizioni di vita diverse dagli altri, libera in una stanza, anzichè rinchiusa in una gabbia metallica; esaminata in un periodo diverso dell'anno, si è osservato che la temperatura giornaliera fu soggetta a oscillazioni meno ampie e che la sua curva, pur ripetendo gli accidenti delle curve degli altri ratti, ha i valori massimi e i minimi spostati di alcune ore. Un valore massimo del giorno si ebbe due

volte alle ore 13 e una volta alle 19: il secondo all' 1: il primo valore minimo alle 7 e il secondo alle 16. Queste differenze sono probabilmente dipendenti, oltre che dalle condizioni speciali di vita dell'animale, anche dal fatto ch'esso non era, come gli altri, da tempo abituato a tale genere di ricerche.

Nella curva dei ratti V-VI-VII, e più evidente in quella dei ratti I e II si osserva un innalzamento della temperatura alle ore 16. Tale innalzamento è seguito o da una diminuzione o da un ulteriore innalzamento, che conduce all'abituale massimo delle ore 22. In rapporto con tale fatto la curva termica giornaliera dei ratti I e II appare caratterizzata da 3 mas-

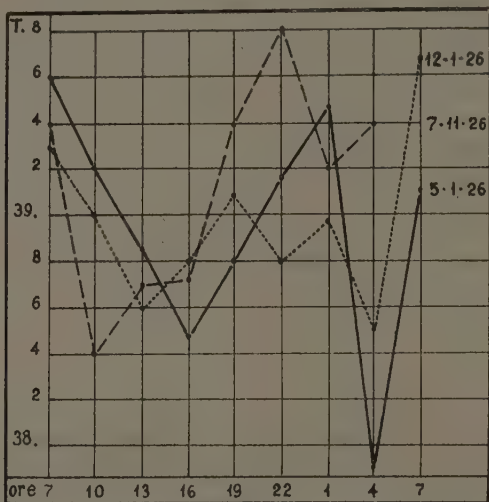


Fig. 1.

simi, alle ore 7, alle 16 e alle 21-1 e da 3 minimi, alle ore 10-13, alle ore 19-22 e alle 14. Però l'innalzamento delle ore 16, non essendo costante, sembra, piuttosto che un fatto normale, una modificazione artificiale, da porre in rapporto col fatto che ai ratti era somministrata la miscela alimentare alle prime ore del pomeriggio.

I ratti svegliati si muovevano e spesso mangiavano, aumentando così la produzione di calore e per i processi digestivi e per i movimenti muscolari.

Le ricerche dei precedenti autori (Mosso U. ⁽¹⁾, Benedict e Snell ⁽²⁾ ecc.) hanno condotto alla conclusione che la curva termica giornaliera ha una

(1) Mosso U., *Esperienze fatte per invertire le oscillazioni diurne della temperatura nell'uomo sano*, «Giornale della R. Accademia di Medicina», 1888, n. 5.

(2) FRANKIS GANO BENEDICT, *Studies in Body-temperature of the inversion of the daily routine: the temperature of night-workers*. «The American journal of physiology», vol. 11, 1904.

fisionomia propria, che tende a restare costante anche se si invertono le condizioni di vita, lavorando di notte e riposando di giorno. La costanza della curva termica dipenderebbe, secondo il Luciani ⁽¹⁾, dalla resistenza del sistema nervoso centrale, regolatore del ricambio materiale e dinamico, ad invertire le fasi del suo tono funzionale, che hanno acquistato coll'abitudine un determinato ritmo. Si può pensare che la tendenza della curva termica giornaliera a mantenersi sostanzialmente imm modificata valga, oltre che per l'uomo, anche pel ratto, e che quindi la curva da noi raccolta, a parte le modificazioni determinate dalle condizioni speciali di vita, nelle quali i ratti si trovavano, si accosti molto alla curva termica giornaliera del ratto in libertà.

Fisiologia. — *Gli elementi circolanti dell'Emolinfa dei crostacei Eufillopodi.* ⁽²⁾ Nota ⁽³⁾ di C. ARTOM, presentata dal Corrispondente F. RAFFAELE.

L'Emolinfa dei crostacei Eufillopodi è stata sino ad oggi oggetto di assai scarse osservazioni. In modo positivo si sa solamente che l'Emolinfa stessa contiene emoglobina disciolta; mentre invece gli elementi circolanti non ne contengono, essendo essi del tutto incolori. Già in base anche a solo questo fatto pare logico inferire che gli elementi suddetti debbano avere una qualche altra funzione che non deve essere quella respiratoria. Nulla poi si sa sulla loro origine. È molto probabile che non vi sia un apposito organo linfoide che li produca, ma che assai semplicemente cellule del mesenchima entrino nel sistema delle lacune, quando già si è formata l'emolinfa. Ignoto è parimenti il modo di moltiplicarsi di detti elementi. Essi non sono mai stati trovati in cariocinesi. Bisogna quindi ammettere che essi si dividano amitoticamente. Ma se così è, bisogna altresì ammettere che tali divisioni dirette debbano succedersi con rapidità molto grande. Tanto è vero che neppure stadi sicuri di tali processi sono stati notati. Ciò che per esempio è stato osservato dal Bruntz in *Chirocephalus*, osservo, è vero, io pure nel *Branchipus stagnalis*: gli elementi cioè circolanti non sono tutti dello stesso ordine di grandezza ed i nuclei più grandi assumono realmente talora la tipica forma di ferro di cavallo. Ma, in base a questi soli fatti, non mi sembra si possa senz'altro concludere, come fa il Bruntz, ch'è gli elementi più grandi sieno elementi vecchi in procinto di dividersi; e che

(1) LUCIANI I., *Fisiologia dell'Uomo*, vol. V, p. 72.

(2) (Dall'Istituto di Zoologia della R. Università di Pavia).

(3) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1927.

viceversa, gli elementi più piccoli sieno elementi giovani, in cui sarebbe appena all'inizio il periodo di accrescimento.

Desiderando incominciare un primo studio di orientamento sulla funzione dei suddetti elementi dell'Emolinfa, trascurando per ora di occuparmi della loro origine embriologica e del loro modo di moltiplicarsi, credo che il compararli anche solo morfologicamente, possa fornirci già qualche elemento per poternè chiarire la funzione.

Anzitutto specie tra loro vicinissime possiedono elementi notevolmente diversi. Per esempio nelle due specie di *Artemia* (diploide e tetraploide) i linfociti si differenziano non solo per le diverse dimensioni, come del resto diversifica per grandezza qualsiasi altro elemento cellulare nelle due specie di *Artemia*; ma i linfociti sono anche sostanzialmente diversi per quanto riguarda la forma e la grandezza di quelle caratteristiche sferule di sostanze grasse, inglobate in tale quantità entro il linfocito, da rimanerne il nucleo, talvolta, persino quasi del tutto mascherato.

In due generi indubbiamente affini tra loro (*Artemia* e *Branchipus*) le differenze che si notano nei linfociti sono poi considerevolissime. Nell'*Artemia* salina il nucleo è moriforme di struttura; nel *Branchipus stagnalis* esso è invece assai più compatto. Ma ciò che soprattutto è degno di rilievo è il fatto che sia nei *Branchipus*, sia in genere in altri Fillopodi anostraci di acqua dolce, i linfociti presentano scarsissime inclusioni di sostanze grasse; abbondantissime, invece, nei linfociti delle *Artemie*. Evidentemente non vi è altro da inferire che le diverse condizioni di ambiente e di nutrizione permettano un eccezionale accumulo di sostanze grasse nei linfociti delle *Artemie*. Che tutti i tessuti delle *Artemie* sieno in genere ripieni di goccioline certamente di sostanze grasse, sovente colorate in rosso per la presenza di un lipocromo, è un fatto stato sperimentalmente accertato dal Cusmano. Di tali goccioline sono talora persino ripieni i Nauplius appena schiusi dall'uovo, in uno stadio cioè in cui è da escludersi che possa essere avvenuta una qualsiasi ingestione di cibo. Le *Artemie* adulte devono, in definitiva, essere dei veri e propri accumulatori di sostanze grasse; sostanze che vengono distribuite in tutti gli organi e che vengono anche accumulate nelle uova durante il loro periodo di crescita. È per l'appunto in grazia di questo accumulo di sostanze di riserva, che le *Artemie* sono resistentissime al digiuno, potendo esse infatti rimanere in vita anche per un tempo considerevole, in acque praticamente prive di qualsiasi sostanza nutritizia.

Il primo problema da risolvere sarebbe quello di potere stabilire da dove le *Artemie* assorbono quantità di grasso così notevoli. Orbene, io credo che le acque dei bacini salati debbano contenere in sospensione ingenti quantità di grasso e anche di lecitine, solo quando si pensi alla notevole quantità di organismi che, trasportati passivamente nelle acque delle saline, vi trovano subito la morte, in causa del forte squilibrio osmotico, per poi subire successivamente la disgregazione di tutti i loro tessuti.

Il secondo problema sarebbe quello di poter determinare il modo con cui avviene nell'*Artemia* l'assorbimento dei grassi. Orbene, a me pare di potere già sin da ora asserire che tale assorbimento avviene attraverso le cellule dell'epitelio intestinale. Infatti entro le cellule dell'intestino delle *Artemie* si osservano assai di sovente piccole sferule che, per il loro aspetto e per il loro annerirsi all'acido osmico, devono ritenersi di sostanze grasse.

Il terzo problema sarebbe quello di poter stabilire se realmente le sferule di grasso che si osservano nei linfociti provengano dai grassi assorbiti attraverso le cellule dell'intestino. A questo quesito a me pare che le esperienze assai interessanti di Hardy sui linfociti in *Daphnia*, rispondano affermativamente. Di guisa che i linfociti dei Fillopodi in genere sarebbero elementi destinati ad elaborare i grassi assorbiti attraverso l'epitelio intestinale e sarebbero altresì il veicolo, mediante il quale viene assicurata la diffusione dei grassi stessi a tutti i tessuti dell'organismo. Ed ecco in tal modo la possibilità di spiegarci ragionevolmente perchè i linfociti dell'*Artemia* sono così carichi di sferule di grasso; mentre ne sono quasi del tutto privi i linfociti degli altri Fillopodi anostraci delle acque dolci. Nel caso dell'*Artemia* cioè, i linfociti si trovano nella condizione di poter assorbire notevoli quantità di grasso attraverso le cellule dell'intestino, perchè l'acqua delle saline che viene ingerita ne contiene in ragguardevole quantità; nel caso invece degli altri Fillopodi di acqua dolce, i linfociti devono contenere scarse inclusioni di sostanze grasse, perchè tali organismi non si trovano nelle eguali condizioni di poter assorbire dall'ambiente notevoli quantità di sostanze grasse.

Dato l'interesse che presenta in tal modo lo studio dell'Emolinfa in genere di tutti gli Eufillopodi, oltre le *Artemie* e i *Branchipus*, ho fatto oggetto delle mie osservazioni l'Emolinfa di un altro Eufillopodo, il *Triops cancriformis*, quest'anno insolitamente abbondante nella Lomellina e nel Pavese.

L'Emolinfa di tale gigantesco notostraco è stato oggetto di scarse osservazioni. È noto che tale Emolinfa è ricca di emoglobina disciolta. Di color rosso, esposta all'aria, essa diventa rapidamente di colore bruno. Anche in questa specie si nota un gran numero di elementi circolanti; tondeggianti però, ed assai più piccoli degli elementi che si osservano in *Branchipus* ed in *Artemia*. Inoltre questi elementi non sono sempre egualmente abbondanti nel plasma circolante.

Se si lascia cadere una goccia di tale Emolinfa su di un vetrino e la si lascia poi asciugare, si vedono prodursi quelle caratteristiche deformazioni, dovute ad emissione di pseudopodi, già descritte da altri autori per l'Emolinfa di altri Crostacei. Il metodo perciò comunemente usato in Ematologia (fissazione sul preparato essiccato col May-Grunwald e successiva colorazione col Giemsa) non dà buoni risultati; per quanto però si riesca a colorare veramente in modo molto elettivo la trama nucleare e a discernerne un aspetto che potrebbe definirsi quasi come spugnoso. Risultati molto mi-

gliori si ottengono con la fissazione con l'acido osmico e successiva colorazione col Giemsa assai diluito. Anche la fissazione e contemporanea colorazione con una soluzione di Brillant-Cresyl-Blau dà ottimi risultati.

Essenzialmente però ho voluto con queste mie preliminari ricerche cercare di stabilire se anche i linfociti di Triops possono annoverarsi tra quegli elementi che, come avverrebbe per altri Fillopodi, sarebbero deputati alla funzione della nutrizione. Ho incominciato ad osservarli con colorazioni vitali (Neutral-Rot e Janus-Green). Si mettono in tal modo molto bene in evidenza delle caratteristiche granulazioni le quali, forse per un processo di dissolvimento a cui possono andare incontro i linfociti stessi, si possono rinvenire nello stesso liquido circolante e dotati di un caratteristico movimento Browniano. Queste granulazioni si colorano elettivamente col Sudan III. Perciò io le ritengo costituite di sostanze lipoidee. Ma questi elementi, pur dovendo ritenere che adempiano ad una funzione analoga a quella che dobbiamo attribuire ai linfociti dell'Artemia, contengono sempre una quantità di sostanze grasse notevolmente inferiore. Dirà in seguito l'esperienza se, per esempio, facendo ingerire ai Triops, acque a cui sia stata aggiunta una certa quantità di grasso finemente emulsionato, si riuscirà consecutivamente ad osservare una maggiore quantità di granulazioni grasse negli elementi circolanti dell'Emolinfa.

In conclusione, i problemi che concernono gli elementi dell'Emolinfa dei Crostacei Fillopodi sono, mi pare, interessanti: essi riguardano anzitutto l'origine e il modo di dividersi degli elementi stessi. Per quanto riguarda poi la loro funzione, a me pare di possedere già elementi sufficienti per ammettere quanto già si presume per gli elementi dell'Emolinfa di altri Crostacei entomostraci; che cioè essi adempiano ad una funzione di elaborazione dei grassi assorbiti in un primo tempo dall'epitelio dell'intestino e poi adempiano alla successiva funzione di trasportare e cedere ai vari tessuti i grassi elaborati.

BIBLIOGRAFIA

- ARTOM C., 1926, *Tetraploidismo e Gigantismo*, «Intern. Revue der ges. Hydrob. und Hydrog.», Bd. XVI, Heft. 1/2, 51-80.
- BRUNTZ. L., 1905, *Etude Physiol. sur les phyllopoies Branchiopoies*, «Archives de Zoologie expérimentales et generales», serie IV, vol. 4, fascicolo 4.
- CUENOT, 1891, *Etudes sur le sang*, ecc., «Archiv. Zoologie exp. et generale», serie II, to. 9, pp. 71-90.
- CUSMANO G., 1909, *Sul grasso dell'Artemia salina di Cagliari*, «Biologica», vol. II, n. 11, Torino, Clausen.
- HAMBURGER C., 1905, *Zur Kenntniss der Dunaliella salina*, ecc., «Archiv fur Protistenkunde», VI Band, pp. 111-130.
- REGNARD et BLANCHARD, 1883, *Note sur la presence de l'hémoglobine dans le sang des Crustacés branchiopoies*, «Zool. Anzeiger, VI, pp. 253-255.
- WINTERSTEIN HANS, 1925, *Handbuch der vergl. Physiol.*, I Band., I Heft. *Crustaceen* (SCHULZ), pp. 669-746.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 6 novembre 1927 (Anno VI)

Presidenza del Socio anziano sen. E. PATERNÒ

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica. — *Sul fenomeno Doppler d'accelerazione.* Nota ⁽¹⁾ del Socio Corrisp. G. GIORGI.

1. — Quando una sorgente luminosa ha moto non uniforme rispetto a un osservatore, si presenta il quesito se, oltre al noto effetto Doppler dovuto alla velocità, avvenga un secondo effetto dello stesso tipo, dovuto all'accelerazione relativa.

Vari astronomi, da De Sitter a Bernheimer, hanno già osservato che ammettendo l'ipotesi balistica (di Ritz e La Rosa) intorno alla composizione della velocità della luce con la velocità della sorgente, l'effetto Doppler d'accelerazione dovrebbe prodursi nelle stelle doppie, con risultati in disaccordo da quelli osservati. A tale grave deduzione, che si presenterebbe decisiva contro la teoria balistica, hanno dato una parziale conferma Corbino e Levi-Civita in una nota presentata a questa Accademia ⁽²⁾, sviluppando una teoria completa del previsto fenomeno.

(1) Presentata nella seduta del 6 novembre 1927.

(2) *Il principio di Doppler e la ipotesi balistica della luce.* Nota di O. M. CORBINO e T. LEVI-CIVITA; questi «Rendiconti», vol. III, serie 6^a (giugno 1926), pp. 707-714. Devo anche segnalare una Nota molto interessante di G. WATAGHIN, *Sull'ipotesi balistica e l'effetto Doppler*, negli stessi «Rendiconti», vol. IV, serie 6^a (agosto 1926), pp. 138-145, alla quale non avrò occasione di fare riferimento ulteriore, perchè le argomentazioni finali che contiene contrarie alla teoria balistica esorbitano dalla considerazione dell'effetto Doppler d'accelerazione.

Quando due nomi così autorevoli si associano per enunciare una conclusione in un argomento fondamentale, è naturale che quanto essi hanno dedotto venga accettato e inteso con una portata che può andare oltre il pensiero e il detto stesso degli autori. E l'impressione generale è stata diffusa che la teoria balistica fosse stata definitivamente confutata da queste ricerche.

Ora, io credo bensì che l'insieme dei fatti sperimentali di varie categorie si presenti già in massima più contrario che favorevole alla troppo ingegnosa teoria ideata da W. Ritz. Ma la definitiva prova contraria, se potrà ottenersi, non si ricaverà dall'effetto Doppler d'accelerazione. E in questo momento in cui ricerche sperimentali decisive sono particolarmente da invocare, sarebbe nocivo al progresso della scienza lasciar credere che la questione fondamentale nella legge di propagazione della luce sia definitivamente risolta. Per questo desidero ritornare sull'analisi del fenomeno che ha dato origine alla discussione.

Considero un osservatore terrestre, e una sorgente stellare animata da moto radiale rispetto all'osservatore. Le stelle doppie hanno, è vero, un moto tangenziale oltre a quello radiale, ma la maggior parte delle conseguenze che ora ci preoccupano dipende soltanto dal modo d'avvicinamento e allontanamento; e per semplicità ridurrò la discussione a questo caso tipico.

Bisogna distinguere nettamente due ipotesi: irradiazione a onde mantenute (emesse cioè da radiatori permanenti di tipo classico), e irradiazione quantizzata. Per quanto la prima ipotesi sia lungi da ciò che avviene nei fenomeni luminosi, pure per non escludere nessun fenomeno di altra natura e per seguire le tracce dei precedenti autori, consideriamola per prima.

2. — Sia una stella che a un'epoca generica t_0 abbia una distanza D dall'osservatore, e si allontani con velocità $v = \frac{dD}{dt}$, e con accelerazione

$j = \frac{d^2 D}{dt^2}$. Se l'emissione di una certa onda (intendo dire, di una certa fase dell'onda) avviene all'epoca t_0 , e se la frequenza della sorgente radiante è di n periodi al secondo, l'emissione della m^{ma} onda successiva (o più precisamente, della fase di quell'onda che corrisponde alla prima emissione considerata) avviene all'epoca $t_1 = t_0 + \frac{m}{n}$. Fermiamo attenzione a una

successione di m onde che comprende una durata pari a quella di un'impressione visiva o fotografica: quindi $\frac{m}{n}$ dell'ordine di grandezza di un decimo di secondo; il che vuol dire m non molto discosto da 10^{14} . In questo breve intervallo, il moto della sorgente si ritenga come uniformemente accelerato. Allora all'epoca t_1 la distanza dall'osservatore è divenuta

$D + v \frac{m}{n} + j \frac{m^2}{2 n^2}$, e la velocità d'allontanamento è $v + j \frac{m}{n}$.

Facendo ora intervenire l'ipotesi balistica, la prima emissione viaggia verso l'osservatore terrestre con la velocità $c - v$ (la velocità e accelerazioni essendo tutte riferite alla terra stessa), e siccome deve percorrere la distanza D , arriva all'epoca

$$t'_0 = t_0 + \frac{D}{c - v}$$

e quest'epoca è assoluta, perchè nella teoria di Ritz i tempi avrebbero valore universale.

La seconda emissione considerata viaggia invece con la velocità $c - \left(v + j \frac{m}{n}\right)$, e deve percorrere la distanza $D + v \frac{m}{n} + j \frac{m^2}{2n^2}$; arriva dunque all'epoca

$$t'_1 = t_0 + \frac{m}{n} + \frac{D + v \frac{m}{n} + j \frac{m^2}{2n^2}}{c - \left(v + j \frac{m}{n}\right)}.$$

L'intervallo fra i due arrivi ha dunque il valore

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta t' &= t'_1 - t'_0 = \frac{m}{n} + \frac{D + v \frac{m}{n} + j \frac{m^2}{2n^2}}{c - v - j \frac{m}{n}} - \frac{D}{c - v} \\ &= \frac{m}{n} \frac{c + \frac{Dj}{c - v} - j \frac{m}{2n}}{c - v - j \frac{m}{n}} \end{aligned} \right.$$

Di qui si calcola l'intervallo medio fra gli arrivi delle successive onde del gruppo, $\delta t' = \frac{\Delta t'}{m}$, e prendendo il reciproco di $\delta t'$ si ha la frequenza media d'arrivo n' presa attraverso il gruppo. Il rapporto fra le due frequenze, di emissione e di arrivo, risulta quindi dato da questa formola esatta:

$$(2) \quad \frac{n'}{n} = \frac{c - v - j \frac{m}{n}}{c - \frac{Dj}{c - v} - j \frac{m}{2n}} = \frac{1 - \frac{v}{c} - j \frac{m}{nc}}{1 + \frac{Dj}{c(c - v)} - j \frac{m}{2nc}}.$$

La corrispondente lunghezza media d'onda non è definibile con pari esattezza, perchè ogni distanziamento fra onde varia durante il percorso, e quindi non ha lo stesso valore se misurato immediatamente prima e imme-

diatamente dopo il punto d'arrivo. Ma si può ritenere un valore approssimativo o intermedio

$$(3) \quad \lambda = (\text{media delle due velocità d'arrivo}) \delta t' = \\ = \frac{c + \frac{Dj}{c-v} - j \frac{m}{2n}}{n} \times \frac{c-v-j \frac{m}{2n}}{c-v-j \frac{m}{n}}.$$

3. — La formola che nella Nota di Corbino e Levi-Civita corrisponde alla nostra (2) è quella indicata con (11') a p. 710; che nel caso del moto radiale, scritta coi simboli qui adoperati, assume la forma

$$(4) \quad \frac{n'}{n} = \frac{1}{1 + \frac{v}{c-v} + \frac{Dj}{(c-v)^2}} = \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{Dj}{c(c-v)}}.$$

La diversità dalla (2) consiste nell'assenza degli ultimi due termini, a numeratore e a denominatore, il che proviene dall'avere [scrivendo l'equazione che porta il numero (11)] calcolato la frequenza in base ai differenziali dt' e dt invece che alle differenze finite $\delta t'$ e δt . Scrivendo la nostra formola così

$$(5) \quad \frac{n'}{n} = \frac{1 - \frac{v - j \frac{m}{n}}{c}}{D + \frac{c-v}{2} \frac{m}{n} + j \frac{c(c-v)}{2n}}$$

e riflettendo al significato fisico dei simboli, si riconosce che nei casi astronomici, $j \frac{m}{n}$ è del tutto trascurabile in confronto a v , e similmente $\frac{c-v}{2n}$ (che è dell'ordine di grandezza d'una lunghezza d'onda) è da trascurare di fronte a D . Si può quindi, quando si calcola la frequenza elementare, cioè corrispondente a un'onda singola (caso $m = 1$), accettare senza alcun errore effettivo la formola semplificata (4). Quando invece si vuol ricavare con esattezza la frequenza media di gruppo, che è quella che ha effetto nelle osservazioni spettroscopiche, bisogna introdurre il valore di m , assai elevato, indicato più sopra; e non è escluso che uno dei due termini con m^2 possa in certi casi, di j molto grande, portare influenza.

4. - Lasciamo da parte questi ultimi casi, e proseguiamo la discussione sulla formola (4), che allora è valida indiscriminatamente per le onde sin-
gole e pei gruppi. Trascurando v in confronto a c , si ha quest'altra

$$(6) \quad \frac{n'}{n} = \frac{1}{1 + \frac{v}{c} + \frac{Dj}{c^2}}$$

che equivale alla (12) di Corbino e Levi-Civita. Mantenendola scritta in questa forma, senza preoccuparsi del rapporto fra i vari termini che vi figurano, si può ricavare direttamente una conseguenza che conferma quelle additate dai due illustri autori, ma è ancor più significativa. Quando il verso dell'accelerazione è diretto verso la Terra, il terzo termine a denominatore è negativo, e per valori sufficientemente grandi del prodotto Dj , il denominatore può annullarsi: si ha allora $n' = \infty$.

Questo fatto costituisce forse un assurdo? No, perchè nella teoria del La Rosa, le onde emesse dopo, devono in certi casi raggiungere e oltrepassare quelle antecedenti: nell'atto della sovrapposizione la lunghezza d'onda si annulla, e ciò equivale a divenire la frequenza infinita. Poniamo cioè che, nell'ipotesi di onde emesse da radiatori isocroni, l'effetto Doppler d'accelerazione si verificherebbe certo, e in misura illimitata, ma non costituirebbe una previsione nuova, bensì coinciderebbe coi fenomeni stessi su cui il La Rosa fa assegnamento.

Se consideriamo i diagrammi che hanno per ascisse i tempi d'emissione e per ordinate i tempi d'arrivo, vediamo che i valori $n' = \infty$ devono verificarsi in tutti i punti dei diagrammi che hanno tangente parallela all'asse delle ascisse; e negli archi di curva contigui si devono incontrare tutti i valori intermedi da $n' = n$ fino a $n' = \infty$.

5. - Ora si deve porre la domanda: queste variazioni di n' saranno rivelate da spostamenti di righe spettrali? La risposta non sembra dubbia, perchè, o la posizione delle righe dipenda dalla frequenza o dipenda dalla lunghezza d'onda, la perturbazione avverrà sempre, sia pure con legge diversa. Nei momenti critici considerati, λ' si annulla effettivamente nell'atto che $n' = \infty$. Del resto, tutte le leggi constatate dall'effetto Doppler di velocità, poste a confronto con la (8) tendono a provare che gli effetti spettroscopici dipendono da n' e non da λ' , nè da altre combinazioni delle due variabili.

Quest'ultima riflessione vale anche a dimostrare che nei momenti di massima accelerazione d'allontanamento di una stella variabile di quelle considerate, in cui il secondo termine a denominatore della (6) si annulla, e il terzo raggiunge il valore del primo ma positivo, la frequenza si riduce a metà della normale, e le righe dello spettro visibile devono passare nell'ultrarosso.

Il risultato è che *se esistesse una radiazione luminosa emessa da vibratorii permanenti*, l'effetto di variazione d'intensità di luce invocato dal La Rosa sarebbe inseparabile da oscillazioni di righe spettrali, al di là di entrambi i limiti della spettro visibile; e l'osservazione non rivela oscillazioni di questo tipo, nè piccole, nè grandi.

6. — Ora, esiste in natura una radiazione permanente? Certo, se in una stella vi fosse qualche cosa di paragonabile a una stazione radiotelegrafica a onde mantenute, il caso supposto si verificherebbe e si potrebbe in qualche forma pensare all'*experimentum crucis*.

Ma restiamo nei limiti della realtà conosciuta oggi. Le esperienze si fanno con radiazioni luminose propriamente dette, percettibili all'occhio o alla fotografia, e queste sono radiazioni emesse da atomi, con meccanismo quantistico. Ben a ragione Corbino e Levi-Civita hanno escluso l'applicabilità delle loro deduzioni alle radiazioni quantizzate. Per farci un'idea di quello che può avvenire coi raggi di luce, occorre fare intervenire altre ipotesi. Sicuramente, la radiazione non avviene col mezzo dei fotoni puntiformi immaginati un tempo da Einstein, perchè i fenomeni d'interferenza e di diffrazione che si osservano anche coi quanti singoli non sono spiegabili con questo semplice meccanismo; e nemmeno una modificazione dell'ottica ondulatoria di tipo classico può essere riconciliabile col vero. Ritengo che le teorie ingegnose costruite sugli schemi di De Broglie e di Schrödinger non abbiano ancora rivelato per intero l'andamento dei fenomeni: esse però hanno mostrato che un meccanismo intimo esiste; e nessuna teoria che prescindendo dalla conoscenza di esso può render conto completo dei fatti. Nei limiti attuali delle cognizioni odierne, dobbiamo ragionare su modelli fittizi, applicabili a certi ordini di fenomeni. Limitatamente ai fatti che qui ci preoccupano, un modello utilizzabile della radiazione è quello dovuto, se non erro, a Jeans e a Lorentz, che la descrive come formata di treni d'onda staccati e successivi. Una radiazione così fatta si può paragonare a quella di una stazione Marconi del tipo antico, a onde non mantenute.

Allora, immaginiamo una sorgente di questo tipo in moto radiale accelerato; essa emette i suoi quanti successivi: ogni quanto dà luogo a un treno d'onde, e nell'ambito di ognuno di essi valgono le leggi di rifrazione e d'interferenza che conseguono dal fatto delle onde. È d'accordo col postulato fondamentale quantistico l'ammettere che il quanto una volta emesso è risoluto in un treno d'onde, dà luogo a un distanziamento delle medesime che dipende dall'energia del quanto solamente. L'ipotesi balistica porta allora a questa conseguenza: che il quanto viaggia con la velocità $c - v$, rispetto alla Terra: l'osservatore terrestre riceve le radiazioni con la frequenza $n' = n \frac{c - v}{c}$, e quindi risente solamente l'effetto Doppler di velocità, senza altra perturbazione; per effetto dell'accelerazione, non varia il

distanziamento delle successive onde, ma quello dei successivi quanti, e quindi avvengono le variazioni d'intensità previste dal La Rosa, non accompagnate da oscillazioni di righe spettrali diverse da quelle dovute alla velocità.

È, per contro, appena necessario ricordare che mantenendo, in combinazione coi fatti quantistici, la teoria relativista einsteiniana in luogo delle ipotesi di Ritz, le conseguenze riguardo agli effetti spettroscopici sono le stesse, e vengono solo a mancare le variazioni d'intensità luminosa.

7. — *Concludendo*: Dalla ricerca di un fenomeno Doppler d'accelerazione non si può, nei limiti delle cognizioni attuali, ricavare argomento nè favorevole nè contrario all'ipotesi balistica.

Idromeccanica. — *Sul carattere solenoidale del tensore di Ricci per le forme ternarie.* Nota del Socio Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *L'azione dell'ossido di azoto sui tiosolfati dei metalli dell'ottavo gruppo.* Nota del Socio Corrisp. L. CAMBI e di A. CLERICI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Farmacologia. — *Ricerche farmacologiche col permanganato di sodio per iniezioni endovenose.* Nota del Socio L. SABBATINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Enigmi tettonici nei monti di Valdieri e le valli del Gesso, della Stura e della Vermentina.* Nota del Socio Corrisp. S. FRANCHI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sul valore nutritivo delle sostanze azotate di alcuni generi alimentari conservati.* Nota del Socio Corrisp. S. BAGLIONI e L. SETTIMI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Le condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione intera sia di un certo genere e di un certo ordine anche in senso precisato.* (A proposito di un carteggio fra i sigg. J. Hadamard ed E. Landau). Nota di S. MINETTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio Corrisp. G. GIORGI.

Introduzione. — Nel fascicolo di luglio del corrente anno di questi « Rendiconti », distribuito e pervenutomi però solo in questi giorni, compare l'estratto di un carteggio intervenuto fra i Soci Stranieri sigg. J. Hadamard ed E. Landau ⁽²⁾ e nel quale figura un notevolissimo risultato conseguito dal Landau e che egli ottiene precisando in modo del tutto originale un teorema del Lindelöf. Vi figurano altresì alcune argomentazioni ed osservazioni dell'Hadamard di sommo interesse scientifico.

Data la notorietà dei due eminenti scienziati fra i quali il carteggio era intervenuto, l'interesse dell'argomento ivi trattato, ed il fatto infine che mi sto attualmente occupando appunto della teoria delle funzioni intere fui, com'è naturale, condotto a rifletter anch'io su quei risultati ed è così che sono stato condotto a stabilire due fatti analitici che, credo, siano di notevole interesse scientifico:

1° che i ragionamenti del Landau hanno una portata ben maggiore di quella già grande che apparisce nella menzionata Nota degli Autori predetti, potendosi con essi stabilire le condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione intera sia di un certo genere p , e di un certo ordine ρ nel senso di Borel;

2° che detti risultati possono anche essere estesi in modo da condurre a stabilire le condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione intera sia di un certo genere p , e di un certo ordine $[\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p]$, ordini in senso precisato che io introduco in quella teoria e che contengono in particolare gli ordini $(\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p)$ ⁽³⁾ introdotti a suo tempo

(1) Nella seduta del 6 novembre 1927.

(2) « Rend. Reale Acc. dei Lincei », Classe di Scienze, ecc., vol. VI, serie 6ª, 2° semestre, fasc. 1-2, Roma, luglio 1927.

(3) Vedi E. LINDELÖF, *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini*, « Acta Societatis Scientiarum Fennicae », tomus XXXI, n. 1, 1903. Vedi anche a p. 130 della bella Nota IV bibliografica riassuntiva del VALIRON che compare nella II^{me} édition delle *Leçons sur les fonctions entières* del BOREL, 1921.

dal Lindelöf per $M(r)$ [massimo del modulo della funzione intera $f(x)$ che si considera per $|x| = r$].

La presente esposizione è in grandi linee, rimandando il cortese lettore alla Nota dell'Hadarnard e Landau sia per il simbolismo adottato come per tutte quelle parti che sarebbero state comuni alle due trattazioni.

In un'altra mia Nota, a questa successiva, darò poi le dimostrazioni di taluni fatti che qui, per amore di brevità, mi limito soltanto ad asserire e taluni completamenti dei risultati a cui qui giungo.

§ 1. — *Condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione intera sia di un certo genere p , e di un certo ordine ρ nel senso di Borel.*

Il Landau parte, nei suoi ragionamenti, dal fatto ben noto che, per qualsiasi u , è

$$|\mathcal{S}_k(u)| \leq e^{c(k)} |u|^{k+1}.$$

Ora io osservo che, ben più generalmente, si ha anche

$$|\mathcal{S}_k(u)| < e^{c|u|^{\tau}}$$

con $k \leq \tau \leq k+1$ ⁽¹⁾ e c , naturalmente, costante positiva fissa.

Ciò premesso si può senz'altro enunciare il seguente Teorema ben più lato ed enormemente più importante di quello enunciato da quell'Autore.

« **TEOREMA.** — La funzione intera $f(x)$ ha l'ordine ρ ⁽²⁾ ed il genere non superiore all'ordine se, e soltanto se, sono verificate le due condizioni

« 1^a $\sum_{\omega} \frac{1}{\omega^{\rho + \varepsilon_1}}$ convergente e $\sum_{\omega} \frac{1}{\omega^{\rho - \varepsilon_2}}$ divergente

« 2^a $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_r}{r^{\rho + \sigma}} = 0$

« dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sigma$ sono positivi qualunque.

« Alla prima della 1^a si può inoltre sostituire l'altra condizione

« (a) $\int_0^{\infty} \frac{M_r}{r^{\rho + \varepsilon + 1}} dr$ convergente

« dove è $M_r = M_r(\log |f|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi$

« ed $\varepsilon > 0$ è del resto qualunque.

« Se poi le stesse condizioni sono verificate per $\varepsilon = \varepsilon_1 = \sigma = 0$ allora « la $f(x)$ è di ordine ρ per eccesso, altrimenti per difetto; e viceversa ».

(1) Il segno $=$ della disuguaglianza mista di sinistra vale solo se $k > 1$.

(2) S'intende nel senso di Borel; vedi le *Leçons* già citate, 11^{me} édition, p. 26.

« Se invece il genere p supera l'ordine ρ alla 2^a va sostituita l'altra condizione

$$(2^a) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_r}{r^{\rho + \varepsilon}} = 0 \text{ »}.$$

Eid infatti se $f(x)$ è di ordine ρ e di genere non superiore all'ordine, scelto k eguale all'intero immediatamente inferiore a ρ , se ρ non è intero; ovvero eguale a $\rho - 1$ o a ρ , se ρ è intero, secondochè la serie $\sum_{\omega} \frac{1}{\omega^\rho}$ è convergente o divergente, sarà intanto verificata la condizione 1^a con $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ se ρ è per difetto, e la stessa 1^a con $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 > 0$ se ρ è per eccesso, mentre la $f(x)$ sarà necessariamente della forma della forma

$$f(x) = e^{P(x)} \prod_{\xi} \mathcal{G}_k \left(\frac{x}{\xi} \right)$$

dove $P(x)$ è un polinomio di grado $\leq k$ e

$$\mathcal{G}_k(u) = (1 - u) e^{\lambda = \sum_{\lambda=1}^k \frac{u^\lambda}{\lambda}}.$$

Ricordando allora la (1) si può con Landau scrivere

$$\log \text{Max}_{|x|=r} \left| \prod_{\xi} \mathcal{G}_k \left(\frac{x}{\xi} \right) \right| \leq \sum_{\omega \leq r} \left\{ \log \left(1 + \frac{r}{\omega} \right) + \sum_{\lambda=1}^k \frac{1}{\lambda} \left(\frac{r}{\omega} \right)^\lambda \right\} + c \sum_{\omega > r} \left(\frac{r}{\omega} \right)^\tau$$

che vale per ogni $t > 0$. Scelto quindi, intanto, $\tau > p$, sarà

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{Max}_{|x|=r} \left| \prod_{\xi} \mathcal{G}_k \left(\frac{x}{\xi} \right) \right|}{r^\tau} \leq c \sum_{\omega > r} \frac{1}{\omega^\tau}.$$

Valendosi ora dell'arbitrarietà di τ , nulla ci vieta di poter assumere $\tau = \rho$, se $f(x)$ è di ordine per eccesso, e $\tau = \rho + \sigma$ se $f(x)$ è di ordine ρ per difetto, con $\sigma > 0$ qualunque ⁽¹⁾.

Con tale scelta di τ la serie $\sum_{\omega} \frac{1}{\omega^\tau}$ è sempre convergente e si chiude quindi subito la validità della condizione 2^a.

Per la parte reciproca della dimostrazione si noti poi che anche qui le condizioni 1^a e 2^a portano per necessaria conseguenza che la $f(x)$ sia della forma

$$f(x) = e^{P(x)} \prod_{\xi} \mathcal{G}_k \left(\frac{x}{\xi} \right)$$

con $P(x)$ funzione intera e k scelto nel modo dianzi precisato.

(1) Si noti bene, cosa essenziale, che se $\rho = k$, ρ è sempre lecito supporlo ordine per difetto.

Si giunge così col Landau alla condizione

$$\left| b^{(l)}(0; R) \right| = l! \left| a_l; R \right| \leq \frac{2^{l!} M_2 R}{R^l}$$

e qui è chiaro che, tenuto conto della 2^a e notando $K + 1 > \rho + \varepsilon$ o al più $K + 1 = \rho$, nel qual'ultimo caso è sempre lecito supporre ρ ordine per eccesso⁽¹⁾, si può scrivere

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| b^{(l)}(0; R) \right| = 0$$

e quindi anche qui

$$P^{(l)}(0) = 0 \quad \text{per} \quad l \geq k + 1$$

Inoltre alla prima della condizione 1^a si può sostituire la (α).

Noto infatti che è lecito scrivere

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \leq r} \frac{1}{\omega^{\rho + \varepsilon}} &= \sum_{\omega \leq r} \left\{ - \frac{(\rho + \varepsilon)(\log r - \log \omega) + 1}{r^{\rho + \varepsilon}} \right\}^\infty_\omega = \\ &= (\rho + \varepsilon)^2 \sum_{\omega \leq r} \int_0^\infty \frac{\log r - \log \omega}{r^{\rho + \varepsilon + 1}} dr = (\rho + \varepsilon)^2 \int_0^\infty \frac{dr}{r^{\rho + \varepsilon + 1}} \sum_{\omega \leq \min(1; r)} \log \frac{r}{\omega} \end{aligned}$$

e valendosi poi di disequaglianze evidenti e del notissimo e classico teorema di Jensen che afferma in particolare essere

$$\sum_{\omega \leq r} \log \frac{r}{\omega} = M_r$$

si conchiude subito l'equivalenza completa fra la prima della 1^a ed (α).

Rilevo poi che si assumerà $\varepsilon > 0$ od $\varepsilon = 0$ secondoche l'ordine sia, per difetto o per eccesso.

Analoghe argomentazioni si seguirebbero, nel caso in cui il genere p superasse l'ordine ρ , come del resto vedremo nella annunciata Nota a questa successiva.

§ 2. — Fin qui le condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione intera $f(x)$ sia di un certo genere p , e di un certo ordine ρ (per eccesso o per difetto) nel senso di Borel.

Osservo però che la considerazione esclusiva degli ordini, nel senso di Borel, allo stato attuale dello sviluppo così progredito, della teoria delle

(1) Chè altrimenti la discussione si sposterebbe dal caso del genere k a quello del genere $k + 1$.

funzioni intere, non è più sufficiente per lo studio approfondito di dette funzioni ⁽¹⁾.

In particolare il Lindelöf nella sua Memoria sulle funzioni intere di genere finito, nello studio del problema ben interessante, ma non unico, della crescita di $M(r)$, (e quindi di M_r), sentì il bisogno, al fine di conseguire risultati ben più precisi di quelli che aveva raggiunto nella stessa questione il Borel, di introdurre per $M(r)$ la definizione di ordine

$$(\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p)$$

col dire, in sostanza, che $M(r)$ è di tale ordine se, ϵ essendo positivo qualunque il quoziente

$$\frac{M(r)}{V(r)}$$

resta a partire da un certo valore di r , inferiore a $(\log^p r)^\epsilon$ e superiore a $(\log^p r)^{-\epsilon}$ per una successione di valori di r indefinitamente crescenti, dove è

$$V(r) = r^\rho (\log r)^{\rho_1} \dots (\log^p r)^{\rho_p} \quad (2)$$

Questa definizione di ordine $(\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p, \text{ « per } M(r) \text{ »})$ puramente utilitaria per il particolare problema che studiava il Lindelöf fu però in seguito e a torto travisata, nel senso che oggi vi è l'uso di dire « che la $f(x)$ è di ordine $(\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p)$ quando l' $M(r)$ relativo ad essa è di tale ordine nel senso di Lindelöf ⁽³⁾ ».

Ora gli ordini di una funzione intera $f(x)$ costituiscono un insieme non archimedeo ed è d'uopo pertanto, per i bisogni attuali della teoria in parola, estendere e precisare ulteriormente la definizione di ordine « per la $f(x)$ » che fu a suo tempo data dal Borel, cosa che per quanto è a mia notizia non è stato mai fatto.

Introduco pertanto in quella teoria questa nuova definizione di « ordine precisato »:

« Una funzione intera $f(x)$ si dirà di ordine $[\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p]$ se

$$\sum_{\omega} \frac{1}{\omega^\rho (\log \omega)^{\rho_1} \dots (\log^p \omega)^{\rho_p + \epsilon}}$$

(1) Il Borel stesso, del resto, presagì ed avvertì codesta deficienza; vedi sempre le *Leçons* citate, II^{me} édition, p. 23.

(2) \log^p sta ad indicare la potenza p^{ma} dell'operatore \log ; quindi

$$\log^2 x = \log(\log x) \text{ ecc.}$$

(3) Credo che il primo a fare questo uso, non perfettamente corretto, della definizione data dal Lindelöf sia stato il Valiron; vedi la già citata sua Nota IV nelle *Leçons* del BOREL, p. 130.

« è convergente o divergente, se essendo $|\varepsilon|$ qualunque, è rispettivamente $\varepsilon > 0$ od $\varepsilon < 0$ ».

Nella mia annunciata successiva Nota, dimostrerò come gli ordini

$$(\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p)$$

di Lindelöf per l' $M(r)$ di una certa $f(x)$, corrispondono a casi particolari dei miei ordini $[\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p]$ per la $f(x)$.

In particolare, ad esempio, l'ordine (ρ, ρ_1) per l' $M(r)$ di una $f(x)$ corrisponde all'ordine $[\rho, 1 - \rho_1]$ per la $f(x)$.

Il fatto essenziale che voglio ora comunicare è quello che, seguendo le traccie del Landau si può giungere a stabilire le condizioni necessarie e sufficienti perchè una $f(x)$ intera sia di un certo genere e di un certo ordine precisato.

Limitandoci in questa Nota, per amore di semplicità, al caso di un genere k e di un ordine $[\rho, \rho_1]$ con K non superiore a ρ , può dimostrarsi infatti che i due gruppi di condizioni

$$1^\circ \quad \sum_{\omega} \frac{1}{\omega^2 (\log \omega)^{\rho_1 + \varepsilon}}$$

convergente o divergente secondochè per $|\varepsilon|$ qualunque è $\varepsilon > 0$ od $\varepsilon < 0$

$$2^\circ \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_r}{r^{\rho + \varepsilon}} = 0$$

sono appunto necessari e sufficienti perchè la $f(x)$ che si considera sia di genere k ed ordine (ρ, ρ_1) .

Ed inoltre, cosa importantissima, anche qui alla prima del gruppo 1° può sostituirsi una condizione che non contenga le ω e che contenga invece il valor medio M_r ; precisamente

$$(\beta) \quad \int_0^\infty \frac{M_r}{r^{\rho+1} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon}} dr \text{ convergente, per } \rho_1 > 0$$

Rilevo infatti qui sommariamente, (riservandomi di dare nella Nota seguente tutti gli sviluppi sistematicamente), che può scriversi

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \leq t} \frac{1}{\omega^2 (\log \omega)^{\rho_1 + \varepsilon}} &= \sum_{\omega \leq t} \left\{ -\frac{\rho (\log r - \log \omega) + 1}{r^{\rho} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon}} \right\}_{\omega}^{\infty} = \\ &= \rho^2 \sum_{\omega \leq t} \int_{\omega}^{\infty} \frac{(\log r - \log \omega)}{r^{\rho+1} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon}} dr + (\rho_1 + \varepsilon) \rho \sum_{\omega \leq t} \int_{\omega}^{\infty} \frac{(\log r - \log \omega)}{r^{\rho+1} (\log r)^{2(\rho_1 + \varepsilon)}} dr + \\ &\quad + (\rho_1 + \varepsilon) \int_{\omega}^{\infty} \frac{dr}{r^{\rho+1} (\log r)^{2(\rho_1 + \varepsilon)}} \end{aligned}$$

e che se

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{\log r - \log \omega}{r^{\rho+1} (\log r)^{\rho_1+s}} dr$$

è convergente, lo sono « a fortiori » gli altri due integrali

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{\log r - \log \omega}{r^{\rho+1} (\log r)^{2(\rho_1+s)}} dr \quad \text{e} \quad \int_{\omega}^{\infty} \frac{dr}{r^{\rho+1} (\log r)^{2(\rho_1+s)}}.$$

E allora con l'applicazione successiva dei ragionamenti del Landau scaturisce appunto l'equivalenza fra la prima del gruppo 1° e la (β).

Matematica. — *Sulla nozione di parità e sul carattere reale delle varietà abeliane reali.* — II. *Le matrici riemanniane realizzate.* Nota ⁽¹⁾ di S. CHERUBINO, presentata dal Socio Corrispondente G. SCORZA.

4. Una matrice riemanniana inerente ad una simmetria S si dirà *realizzata* quando il suo aspetto mette immediatamente in evidenza il suo carattere reale e (quindi) la struttura delle successioni fondamentali di parità diritta e rovesciata.

Per avere matrici realizzate, conviene partire da matrici già sottonormali. Le tabelle *pseudonormali* del Comessatti sono appunto matrici sottonormali e realizzate.

È utile premettere le seguenti proposizioni, la cui dimostrazione non offre alcuna notevole difficoltà:

a) se ad una simmetria S sono inerenti gli integrali u_s , lo sono anche tutti quelli che da questi si ottengono combinandoli linearmente con coefficienti reali;

b) tutte le matrici riemanniane inerenti alla stessa simmetria hanno lo stesso carattere reale;

c) ogni matrice riemanniana non sottonormale inerente ad una simmetria S, si può sempre sostituire con una sottonormale, senza alterare il carattere reale;

d) se ad una simmetria sono inerenti gli integrali u_s ed una matrice ω , ad una sua accoppiata (cioè della schiera ottenuta da essa moltiplicando per trasformazioni birazionali ordinarie di prima specie per V_p) sono inerenti gli integrali $i u_s$ e (quindi) la matrice $i \omega$;

f) se una matrice riemanniana ω si trasforma in un'altra ω' col cambiamento di cicli primitivi $C'_i = \sum_k b_{ik} C_k$, mentre i parametri restano inva-

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1927.

riati, i periodi diritti (e rovesciati) di ω , i cui intieri caratteristici sono m_k (ed n_k) si trasformano nei periodi anch'essi diritti (e rovesciati) di ω' i cui intieri caratteristici μ_r (e ν_r) sono legati agli m_k (agli n_k) con le relazioni

$$m_k = \sum_r b_{rk} \mu_r \quad ; \quad n_k = \sum_r b_{rk} \nu_r \quad (k = 1, 2, \dots, 2p)$$

cosicchè le successioni fondamentali di parità per ω si trasformano in quelle (di egual ordine) per ω' e le due matrici hanno egual carattere reale;

b) cambiando i parametri u_s in altri legati ad essi con combinazioni lineari a coefficienti reali, gli intieri caratteristici dei periodi diritti e rovesciati restano inalterati.

5. Se si ha a che fare con una matrice riemanniana inerente ad una simmetria S che sia già sottonormalizzata, valgono anche le seguenti proprietà (alcune di verifica forse un po' meno facile):

a) i periodi diritti hanno i primi p intieri arbitrarii e gli ultimi p nulli, quindi una successione fondamentale di parità diritta si può sempre supporre formata con gli intieri di una tabella a p righe e $2p$ colonne con le prime p colonne costituenti un determinante unimodulare (arbitrario) e le ultime p di zeri;

b) fra gli intieri caratteristici m_{sr} ed n_{sk} di due successioni fondamentali di parità una diritta e l'altra rovesciata per la stessa ω valgono delle relazioni come

$$n_{sk} = \sum_{r=1}^{2p} b_{rk} m_{sr} \quad (s = 1, 2, \dots, p \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, 2p)$$

ove $|b_{rk}|$ è un determinante unimodulare.

c) due matrici sottonormali equivalenti (Scorza) hanno lo stesso carattere reale.

Quest'altra osservazione vale per matrici qualsiasi:

d) se due matrici riemanniane ω ed ω' sono relative agli stessi cicli, ma ad integrali $u_s; v_s$ che si ottengono gli uni dagli altri con sostituzioni a coefficienti reali, le colonne delle sole parti reali (o delle sole parti immaginarie) relative agli stessi k cicli in ω ed ω' formano due matrici con la stessa caratteristica.

6. Dalle a) e b) ora enunciate segue che:

a) anche fra i $2p$ intieri caratteristici dei periodi rovesciati per una matrice riemanniana sottonormale ve ne sono p arbitrarii e p determinati dai precedenti. Però l'arbitrarietà di questi p intieri caratteristici non si verifica necessariamente sulle stesse prime p colonne, come per quelli dei periodi diritti.

Cosicchè, lo schema degli intieri caratteristici dei periodi diritti e rovesciati per una matrice sottonormale inerente ad una S è del tipo:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} m_1 & m_2 & \dots & m_q & m_{q+1} & \dots & m_p & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n_1 & n_2 & \dots & n_q & n'_{q+1} & \dots & n'_p & n'_{p+1} & \dots & n'_{p+q} & n_{p+q+1} & \dots & n_{2p} \end{array}$$

inalterato il carattere reale ed anche inalterati gli interi caratteristici delle successioni fondamentali di parità diritta e rovesciata.

Per una matrice come la (R), il determinante dell'antisostituzione riemanniana involutoria (3), dovuta alla S, viene ad assumere eguali ad 1 i primi p elementi della diagonale principale, eguali a -1 gli ultimi $p-q$ e nulli tutti gli altri delle prime p linee e delle ultime $p-q$.

Allora le ${}^*(I)$ diventano

$$a_{p+1r} x_{p+1} + \dots + a_{p+qr} x_{p+q} = -2x_r \quad (r = 1, 2, \dots, p)$$

$$a_{p+1p+s} x_{p+1} + \dots + a_{p+qp+s} x_{p+q} = -x_{p+s} \quad (s = 1, 2, \dots, q)$$

$$a_{p+1p+q+h} x_{p+1} + \dots + a_{p+qp+q+h} x_{p+q} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p-q)$$

Confrontando con le

$$\alpha_{p+1} x_{p+1} + \dots + \alpha_{p+q} x_{p+q} = -x_r \quad (r = 1, 2, \dots, p)$$

le cui soluzioni danno anch'esse gli interi caratteristici dei periodi rovesciati di (R) e tenendo presente che

$$a_{p+jp+s} = (-1)^q \quad (j, s = 1, 2, \dots, q)^{(1)}$$

si ottengono le importanti relazioni:

$$|n'_{jp+h}| \cdot |\alpha_{jp+h}| = (-1)^q \quad (j, h = 1, 2, \dots, q)$$

$$\alpha_{p+h} = \frac{1}{2} a_{p+h,r} \quad (h = 1, 2, \dots, q; r = 1, 2, \dots, p)$$

$$|n'_{sp+h}| \cdot |a_{p+h,s}| = (-2)^q.$$

Possiamo dunque concludere che la normalizzazione ha ridotto la (R) alla forma

$$(R)' : \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{\epsilon_{11}}{2} + i\beta_{1p+1} & \dots & \frac{\epsilon_{1q}}{2} + i\beta_{1p+q} & i\beta_{1p+q+1} & \dots & i\beta_{12p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\epsilon_{p1}}{2} + i\beta_{pp+1} & \dots & \frac{\epsilon_{pq}}{2} + i\beta_{pp+q} & i\beta_{pp+q+1} & \dots & i\beta_{p2p} \end{array} \right\|$$

dove gli $\epsilon_{rh} = a_{p+h,r}$ sono interi opportuni.

8. Dopo di ciò - sommando opportunamente le colonne ad elementi complessi con convenienti multipli delle prime $p^{(2)}$ - è facile ridurre gli ϵ_{rh} ad assumere i valori zero od uno, secondo che siano pari o dispari.

(1) Perché $|a_{rs}| = (-1)^p$. Cfr. Mem. I, n. 19.

(2) Cioè operando nuove trasformazioni di cicli primitivi.

Cosicchè risulterà $|\varepsilon_{rs}| = \pm 1$.

E poichè le ${}^*(I)$ vengono, dopo ciò, a ridursi alle

$$\varepsilon_{r1} n'_{sp+1} + \dots + \varepsilon_{rq} n'_{sp+q} = -2\eta_{rs} \quad (r, s = 1, 2, \dots, q)$$

ove η_{rs} è zero od uno secondo che $r \neq s$ od $r = s$, si deduce che gli n'_{sp+h} sono tutti pari e che

$$(4) \quad \left| \frac{n'_{sp+h}}{2} \right| = (-1)^q.$$

Onde si è già ottenuto che il carattere reale di (R) - quindi di (R)' - è q .

Dopo di ciò, utilizzando la (4) per trasformare nuovamente i cicli primitivi $C_{p+1} \dots C_{p+q}$ e sommando opportunamente con multipli dei cicli reali, si perviene alla matrice *pseudonormale* del Comessatti.

Da quanto precede, è facile dedurre che cosa è necessario per accertarsi che una matrice della forma (R) è effettivamente realizzata.

Matematica. — *Sopra una derivazione covariante nel calcolo assoluto generalizzato.* Nota II⁽¹⁾ di G. VITALI, presentata dal Socio Corrisp. G. FUBINI.

§ 8. — Noi abbiamo visto come partendo da un sistema di Pascal U_α covariante ad un indice di 2^a classe, o da un sistema U^α si possa pervenire ad un altro $U_{\alpha, h}$, o rispettivamente U_h^α che abbiamo chiamato suo derivato covariante che ha in più del sistema di partenza un indice h di covarianza di 1^a classe, e che sono dati rispettivamente dalle (11) e (12). Possiamo poi ricordare che se U_k è un sistema covariante ad un indice di 1^a classe, e se U^k è un sistema controvariante ad un indice di 1^a classe, da essi si può dedurre un sistema $U_{k, h}$ o rispettivamente U_h^k , che sono dati dalle formule

$$(18) \quad U_{k, h} = \frac{\partial U_k}{\partial u_h} - \sum_p \left[\begin{matrix} k & h \\ & p \end{matrix} \right]_1 \cdot U_p \quad [p \text{ variante in } (1)].$$

$$(19) \quad U_h^k = \frac{\partial U^k}{\partial u_h} + \sum_p \left[\begin{matrix} p & h \\ & k \end{matrix} \right]_1 \cdot U^k \quad [p \text{ variante in } (1)].$$

e sono i relativi derivati covarianti dati dal calcolo del Ricci. Noi ora vogliamo dedurre da ogni sistema (6) di Pascal un nuovo sistema da dirsi suo derivato covariante e che oltre agli indici di covarianza e controvarianza

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1927.

di (6) ne abbia un altro h di covarianza e di 1^a classe. Io dico che tale è il sistema

$$(20) \quad U_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, h}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s} = \frac{\partial U_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}}{\partial u_h} \\ - \sum_1^r \sum_{\gamma} \left[\begin{matrix} a_n h \\ \gamma \end{matrix} \right] \cdot U_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \gamma, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_r}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s} \\ + \sum_1^s \sum_{\gamma} \left[\begin{matrix} \gamma h \\ \beta_n \end{matrix} \right] \cdot U_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, \gamma, \beta_{n+1}, \dots, \beta_s}$$

dove le somme secondo γ si riferiscono alla variazione di γ nella classe dell'indice che sostituisce nel fattore U , e i simboli di Christoffel devono essere della stessa classe del γ , e quindi dell' α_n o del β_n , che vi figura.

§ 9. — La dimostrazione si conduce nel modo consueto. Se

$$(21) \quad X_n^{\beta_n} \quad (n = 1, 2 \dots s)$$

sono s qualunque covarianti ad un indice β_n della stessa classe dell'indice omonimo in (6), e se

$$(22) \quad X_n^{\alpha_n} \quad (n = 1, 2 \dots r)$$

sono r qualunque controvarianti ad un indice α_n della stessa classe dell'indice omonimo in (6), la funzione

$$(23) \quad \varphi = \sum_{\alpha\beta} U_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s} \cdot \left(\prod_1^r X_n^{\alpha_n} \right) \left(\prod_1^s X_n^{\beta_n} \right)$$

è, pel principio della saturazione degli indici, un invariante.

Ora indicando rispettivamente con $X_{\beta_n}^n$ ed $X_n^{\alpha_n}$ i derivati covarianti dei sistemi (21) e (22), si ha

$$(24) \quad \frac{\partial X_{\beta_n}^n}{\partial u_h} = X_n^{\beta_n, h} + \sum_{\gamma} \left[\begin{matrix} \beta_n h \\ \gamma \end{matrix} \right] X_n^{\gamma} \\ \frac{\partial X_n^{\alpha_n}}{\partial u_h} = X_n^{\alpha_n, h} - \sum_{\gamma} \left[\begin{matrix} \gamma h \\ \alpha_n \end{matrix} \right] X_n^{\gamma}$$

dove le \sum_{γ} si riferiscono alla variazione dell'indice nel campo di variabilità del corrispondente β_n o α_n .

Ma $\frac{\partial \varphi}{\partial u_b}$ è un sistema covariante ad un indice b di 1^a classe, e

$$(25) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_b} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial U^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}}{\partial u_b} \left(\prod_{i=1}^r X_n^{\alpha_i} \right) \left(\prod_{i=1}^s X_n^{\beta_i} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^r \sum_{\alpha\beta} U^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r} \cdot X_n^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_{i-1}} \cdot \frac{\partial X_n^{\alpha_i}}{\partial u_b} \cdot X_n^{\alpha_{i+1}} \dots X_n^{\alpha_r} \left(\prod_{i=1}^s X_n^{\beta_i} \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^s \sum_{\alpha\beta} U^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r} \left(\prod_{i=1}^r X_n^{\alpha_i} \right) X_{\beta_1} \dots X_{\beta_{i-1}} \cdot \frac{\partial X_{\beta_i}}{\partial u_b} \cdot X_{\beta_{i+1}} \dots X_{\beta_s}$$

e per le (24)

$$(26) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} = A + B + C +$$

$$+ \sum_{i=1}^r \sum_{\alpha\beta} U^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r} X_n^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_{i-1}} \cdot \left(\sum_{\gamma} \left[\gamma \begin{smallmatrix} b \\ \alpha_i \end{smallmatrix} \right] X_n^{\gamma} \right) \cdot X_n^{\alpha_{i+1}} \dots X_n^{\alpha_r} \left(\prod_{i=1}^s X_n^{\beta_i} \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^s \sum_{\alpha\beta} U^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r} \left(\prod_{i=1}^r X_n^{\alpha_i} \right) X_{\beta_1} \dots X_{\beta_{i-1}} \cdot \left(\sum_{\gamma} \left[\beta_i \begin{smallmatrix} b \\ \gamma \end{smallmatrix} \right] X_{\gamma} \right) \cdot X_{\beta_{i+1}} \dots X_{\beta_s}$$

dove A indica il 1° termine del 2° membro di (25), B indica il 2° termine

del 2° membro di (25) in cui la $\frac{\partial X_n^{\alpha_n}}{\partial u_b}$ è sostituita con $X_n^{\alpha_n}$ ed infine C in-

dica il 3° termine del 2° membro di (25) in cui la $\frac{\partial X_n^{\beta_n}}{\partial u_b}$ è sostituita con $X_n^{\beta_n}$.

Per il principio della saturazione degli indici B e C sono covarianti ad un indice b della 1^a classe, quindi la somma dei restanti termini del 2° membro di (26) sarà un covariante ad un indice b di 1^a classe che noi indicheremo con M_b .

Se nella penultima sommatoria del 2° membro di (26) scambiamo l'indice γ col corrispondente α_n , e nell'ultima sommatoria scambiamo l'indice γ col corrispondente β_n , otteniamo

$$M_b = \sum_{\alpha\beta} U^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, b} \left(\prod_{i=1}^r X_n^{\alpha_i} \right) \left(\prod_{i=1}^s X_n^{\beta_i} \right),$$

ma poichè i sistemi (21) e (22) sono qualunque si deve concludere che il sistema (20) ha le covarianze e controvarianze richieste.

§ 10. — Osservando che il sistema derivato covariante di $A_{\alpha, \beta}$ è dato da

$$\begin{aligned} A_{\alpha, \beta, b} &= \frac{\partial A_{\alpha, \beta}}{\partial u_b} - \sum_{\gamma} \left[\begin{matrix} \alpha h \\ \gamma \end{matrix} \right]_2 A_{\gamma, \beta} - \sum_{\gamma} \left[\begin{matrix} \beta h \\ \gamma \end{matrix} \right]_2 A_{\alpha, \gamma} \\ &= \frac{\partial A_{\alpha, \beta}}{\partial u_b} - \left(\begin{matrix} \alpha h \\ \beta \end{matrix} \right)_2 - \left(\begin{matrix} \beta h \\ \alpha \end{matrix} \right)_2 \end{aligned}$$

si ha in virtù delle (13)

$$A_{\alpha, \beta, b} = 0.$$

Il sistema derivato covariante di $A^{\alpha, \beta}$ è dato da

$$A_{\beta}^{\alpha, \beta} = \frac{\partial A^{\alpha, \beta}}{\partial u_b} + \sum_{\gamma} \left[\begin{matrix} \gamma h \\ \alpha \end{matrix} \right] A_{\gamma, \beta} + \sum_{\gamma} \left[\begin{matrix} \gamma h \\ \beta \end{matrix} \right] A^{\alpha, \gamma}$$

e per la (15)

$$A_{\beta}^{\alpha, \beta} = 0.$$

Si ha così il

Teorema. — Il derivato covariante di ognuno dei sistemi $A_{\alpha, \beta}$ ed $A^{\alpha, \beta}$ è nullo.

§ 11. — Ripetendo noti ragionamenti⁽¹⁾, sarebbe facile estendere qui le note regole di derivazione di somma, di differenza, di prodotto e di sistemi composti, che valgono nel calcolo del Ricci.

Inoltre posso ricordare che se f è una funzione (invariante) e se f_{α} è il covariante ad un indice di 2^a classe definito al § 1 (v. anche il § 3), si ha, quando α assume uno dei valori $1, 2, \dots, v$, se $f_{\alpha, b}$ indica il derivato covariante di f_{α} ,

$$f_{\alpha, b} = 0,$$

e se $\alpha = pq$:

$$F_{p, q, b} = f_{\alpha, b}$$

è un covariante di Ricci a tre indici.

Dal lavoro citato in corso di stampa risulta che se si indica con X_n, p, q, b l'analogo di $F_{p, q, b}$ quando per f si prenda la x_n del § 4, le

$$X_n p, q, b \quad (n = 1, 2, \dots, v)$$

sono proporzionali ai coseni direttori di una direzione perpendicolare allo spazio 2-tangente alla varietà.

(1) VITALI, *Sopra alcune operazioni di Calcolo Assoluto*, « Rendiconti del Reale Istituto Lombardo », vol. LV, 1922.

Nello stesso lavoro è dimostrato che i simboli di Christoffel di 2^a classe si possono esprimere in modo semplice mediante gli elementi $A_{\alpha, \beta}$, le loro derivate ed i loro reciproci, infatti si ha

$$2 \cdot \left(\begin{matrix} rsh \\ pq \end{matrix} \right)_2 = \frac{\partial A_{rs, pq}}{\partial u_h} + \frac{\partial A_{rp, qh}}{\partial u_s} + \frac{\partial A_{sh, pq}}{\partial u_r} - \frac{\partial A_{rs, qh}}{\partial u_p} - \frac{\partial A_{rp, sh}}{\partial u_q}$$

$$\left(\begin{matrix} rsh \\ p \end{matrix} \right)_2 = \frac{\partial A_{rs, p}}{\partial u_h} - A_{rs, ph}.$$

Matematica. — *Sulle superficie di Bernoulli.* Nota di M. PA-STORI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio CORRISP. U. CISOTTI.

Nello studio del moto stazionario dei fluidi, sia perfetti che viscosi, si presentano ⁽²⁾ delle superficie, le superficie di Bernoulli ⁽³⁾ sulle quali il noto trinomio di Bernoulli ha valore costante e per le quali la normale in un punto generico ha la direzione del vettore:

$$(1) \quad \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{v}$$

(dove \mathbf{v} è la velocità) supposto naturalmente che tale vettore sia determinato nei punti della regione di spazio che si considera. Ricordiamo in particolare che quando il fluido è viscoso, affinchè esistano le superficie di Bernoulli, deve inoltre essere soddisfatta la condizione ⁽⁴⁾:

$$(2) \quad \text{rot}^2 \mathbf{v} = 0.$$

In ogni caso le superficie di Bernoulli sono ad un tempo di flusso e vorticosi, e cioè su ciascuna di esse è tracciato un doppio sistema di linee, quelle di flusso e quelle vorticosi, che possono presentare particolarità geometriche in relazione con le superficie stesse.

Di notevole semplicità sono le condizioni a cui deve soddisfare il moto di un fluido (perfetto o viscoso) affinchè le linee di flusso siano geodetiche per le superficie di Bernoulli, e quello di un fluido viscoso affinchè le linee vorticosi siano assintotiche per le medesime superficie. Si trova precisamente nel primo caso che le traiettorie ortogonali delle linee di flusso devono essere isotachie, e nel secondo che il modulo di $\text{rot } \mathbf{v}$ non deve va-

(1) Nella seduta del 6 novembre 1927.

(2) Sotto certe condizioni che a noi non occorre di specificare.

(3) B. CALDONAZZO, *Un'osservazione a proposito del teorema di Bernoulli* « Bollettino dell'Unione Mat. Italiana », febbraio 1925.

(4) B. CALDONAZZO, loc. cit., n. 3.

riare nelle direzioni delle normali alle superficie⁽¹⁾. Si vede poi facilmente che se le linee di flusso o le linee vorticoso sono assintotiche per le superficie di Bernoulli, esse sono geodetiche per altre superficie.

I. - CONDIZIONE AFFINCHÈ LE LINEE DI FLUSSO SIANO GEODETICHE
PER LE SUPERFICIE DI BERNOULLI.

L'equazione differenziale delle geodetiche è, indicando con N il vettore unitario avente in ogni punto la direzione della normale alla superficie che si considera:

$$dP \wedge d^2P \times N = 0$$

che per $dP = hv$ prende la forma:

$$v \wedge dv \times N = 0.$$

Quest'ultima si può anche scrivere:

$$v \wedge \frac{dv}{dP} v \times N = 0.$$

Applicando allora la formola seguente⁽²⁾:

$$(3) \quad \frac{dv}{dP} v = (\text{rot } v) \wedge v + \frac{1}{2} \text{grad } v^2$$

si ha, tenendo presente che N ha la direzione (1):

$$v \wedge N \times \text{grad } v^2 = 0.$$

Essa ci dice che v non deve variare lungo le traiettorie ortogonali delle linee di flusso. E poichè il ragionamento è evidentemente invertibile, possiamo concludere:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè le linee di flusso siano geodetiche per le superficie di Bernoulli è che le loro traiettorie ortogonali siano isotachie⁽³⁾.

(1) Quest'ultima condizione si riferisce, più in generale, a tutte le superficie vorticoso nei moti soddisfacenti alla (2). Cfr. n° 3.

(2) C. BURALI FORTI e R. MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale*, n. 47.

(3) Il prof. Cisotti gentilmente mi comunica che in una Nota del prof. B. Caldonazzo, presentata contemporaneamente a questa, viene studiata una classe di moti nei quali la condizione è soddisfatta. Si tratta dei moti per cui $v \times \text{rot } v = 0$. Le linee di flusso sono appunto geodetiche, e le vorticoso (traiettorie ortogonali delle prime) isotachie.

La stessa condizione si deduce anche dalla formola che dà la curvatura geodetica delle linee le cui tangenti hanno in ogni punto la direzione del vettore unitario $\alpha^{(1)}$:

$$G_x = -N \times \text{rot } \alpha$$

ponendovi $\alpha = \frac{v}{v}$ e $G_x = 0$.

Osserviamo che la condizione trovata è in particolare soddisfatta tutte le volte che le superficie di Bernoulli sono isotachie ⁽²⁾.

2. - RELAZIONI TRA LE ASSINTOTICHE DELLE SUPERFICIE DI BERNOULLI E LE GEODETICHE DI ALTRE SUPERFICIE.

L'equazione differenziale delle linee assintotiche è:

$$(4) \quad N \times d^2P = 0.$$

Supponiamo che sia soddisfatta per le linee vorticosi, lungo le quali è $dP = b \text{ rot } v$. Tenendo presente che N ha la direzione (1) potremo dare all'equazione precedente la forma:

$$dP \wedge d^2P \times v = 0.$$

che coincide con l'equazione differenziale delle geodetiche per le superficie ortogonali alle linee di flusso, supposto naturalmente che tali superficie esi-

(1) C. BURALI FORTI, *Fondamenti per la geometria differenziale di una superficie col metodo vettoriale generale* «Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo», 1912, vol. XXXIII, n. 22. V. anche M. PASTORI, *Sulle superficie ortogonali a una congruenza normale di curve*. «Rendic. Istituto Lomb. di Scienze e Lettere», 1927, vol. LX, n. 5.

(2) Le superficie di Bernoulli sono, ad es., isotachie per i moti dei liquidi perfetti che lasciano inalterata la distribuzione locale delle pressioni (B. CALDONAZZO, *Sui moti di un liquido* ecc. Questi «Rendiconti», luglio 1925); ora in tal caso le linee di flusso sono rette (U. CISOTTI, *Moti di un liquido* ecc. Questi «Rendiconti», aprile 1910) e quindi geodetiche per tutte le superficie su cui sono tracciate.

Un'altra classe di moti per cui le superficie di Bernoulli sono isotachie è stata studiata dal prof. B. FINZI, *Moti liquidi laminari potenziali su sviluppabili*. Questi «Rendiconti», novembre 1925 e *Moti spaziali vorticosi in corrispondenza univoca con traslazioni uniformi*. Questi «Rendiconti», febbraio 1926. L'Autore dimostra che le superficie di Bernoulli sono sviluppabili sulle quali le linee di flusso formano appunto un sistema di geodetiche. Osserviamo a questo proposito che la forma data dall'A. all'elemento lineare $\left(ds^2 = \frac{1}{v^2} (d\varphi^2 + d\psi^2)\right)$ con le $\psi = \text{cost}$ per le linee di flusso) permette di dedurre immediatamente la condizione da noi trovata in generale, quando si tolga la limitazione che le superficie di Bernoulli siano isotachie e quindi sviluppabili (cfr. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 3^a ed., vol. I, p. 284).

stano, ossia che le linee di flusso formino una congruenza normale⁽¹⁾. Si conclude quindi:

Se le linee vorticose sono assintotiche per le superficie di Bernoulli esse sono geodetiche per le superficie ortogonali alle linee di flusso e reciprocamente.

E in modo analogo si trova:

Se le linee di flusso sono assintotiche per le superficie di Bernoulli esse sono geodetiche per le superficie ortogonali alle linee vorticose (nel caso che tali superficie esistano, ossia che le linee vorticose formino una congruenza normale) e reciprocamente.

3. — CONDIZIONE AFFINCHÈ LE LINEE VORTICOSE SIANO ASSINTOTICHE PER LE SUPERFICIE DI BERNOULLI.

Consideriamo ora il caso di un fluido viscoso e supponiamo quindi soddisfatta la (2). Supposto che le linee vorticose siano assintotiche, dovrà la (4) essere soddisfatta ponendovi $d^2P = dh \operatorname{rot} \mathbf{v} + h d \operatorname{rot} \mathbf{v}$.

Ad essa potremo quindi dare la forma:

$$\mathbf{N} \times \frac{d \operatorname{rot} \mathbf{v}}{dP} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$$

che per la (3) (applicata a $\operatorname{rot} \mathbf{v}$) diventa:

$$\mathbf{N} \times \operatorname{grad} (\operatorname{rot} \mathbf{v})^2 = 0.$$

Quindi:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè le linee vorticose siano assintotiche per le superficie di Bernoulli (nei moti dei fluidi soddisfacenti alla (2)) è che il modulo di $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ non vari nelle direzioni delle normali alle superficie stesse.

La condizione è in particolare soddisfatta quando il modulo di $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ è dovunque costante.

Osserviamo che nel ragionamento precedente non entra l'ipotesi che la superficie vorticosa che si considera sia anche di flusso. La condizione trovata vale quindi per ogni superficie vorticosa nei moti soddisfacenti alla (2).

(1) Le linee di flusso formano una congruenza normale quando è $\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$. Cfr. nota (2) a pag. 2.

Geometria. — *Un'osservazione sulla serie Jacobiana di una serie lineare.* Nota di G. GHERARDELLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

Nel *Trattato di Geometria algebrica* di F. Severi, a proposito della serie Jacobiana di una data serie lineare g_n^r , si avverte opportunamente che « l'insieme dei gruppi Jacobiani delle g_n^r di una data g_n^r , appena sia $r > 2$ non costituisce da solo una serie lineare » ⁽²⁾.

Si intende che ciò vale « in generale »; eccezionalmente può ben darsi, anche per $r > 2$, che quell'insieme costituisca da solo una serie lineare. Precisando si può dimostrare che, se C è la curva di S_r immagine proiettiva della data g_n^r , il caso eccezionale si verifica allora e allora soltanto che la rigata delle tangenti di C sia contenuta in $\binom{r-1}{2}$ complessi lineari di rette, linearmente indipendenti.

Si indichi infatti con λ il numero dei punti *variabili* del gruppo Jacobiano di una g_n^r (variabile) della data g_n^r , che dapprima per chiarezza supponiamo semplice; e con G_λ il gruppo da essi costituito. Sarà in ogni caso $\lambda \geq 2r - 2$. Sarà anche opportuno tener conto, pel seguito, che un punto fisso del gruppo Jacobiano di una g_n^r variabile in una g_n^r , è multiplo per ∞^{r-1} gruppi della g_n^r , (ivi compreso il caso che il punto sia fisso per la g_n^r ovvero che, essendo la g_n^r composta, il punto sia multiplo per l'involuzione che la compone). Se i gruppi G_λ costituiscono da soli una serie lineare altrettanto avviene dei gruppi Jacobiani (completi) e viceversa.

Il numero λ rappresenta il primo rango della curva C di S_r immagine proiettiva della g_n^r ; cosicchè su C λ punti costituiscono un gruppo G_λ se e solo se le tangenti in essi alla curva (incontrano un medesimo $[r - 2]$ cioè se) appartengono ad un medesimo complesso lineare speciale. Ora i complessi lineari di rette della S_r segnano sulla rigata delle tangenti di C una serie lineare di gruppi di generatrici, d'ordine λ ; i gruppi dei relativi punti di contatto formano su C una serie lineare della quale fanno parte i gruppi G_λ . Anzi, fra le serie lineari d'ordine λ contenenti i gruppi G_λ , questa ha la dimensione minima. In effetto, la varietà dei complessi lineari speciali

(1) Nella seduta del 6 novembre 1927.

(2) F. SEVERI, *Trattato di Geometria Algebrica*, Zanichelli, Bologna, vol. I, Parte 1^a, pag. 121.

appartiene al sistema lineare di tutti i complessi dello S_r o; in altre parole, ogni complesso lineare di rette è ottenibile come combinazione lineare di complessi lineari speciali.

Se la rigata delle tangenti di C è contenuta in t complessi lineari, linearmente indipendenti, la dimensione σ di detta serie è espressa dalla:

$$\sigma = \frac{(r-1)(r+2)}{2} - t$$

I gruppi G_λ costituiscono da soli una serie lineare se $\sigma = 2r - 2$; cioè se $t = \binom{r-1}{2}$. Quando ciò avvenga gli $[r-2]$ appoggiati a $2r-2$ tangenti di C , in numero di $\frac{1}{r} \binom{2r-2}{r-1}$, incontrano tutti, ulteriormente, le medesime $\lambda - (2r-2)$ tangenti di C ; cosicchè l'insieme dei gruppi G_λ viene riferito birazionalmente, senza eccezioni, non già all'insieme degli $[r-2]$ di S_r (come avviene in generale) ma ai gruppi di un'involuzione lineare d'ordine $\frac{1}{r} \binom{2r-2}{r-1}$ di tali $[r-2]$.

Se la data g_n^r è composta con un'involuzione γ_μ^r i gruppi G_λ (nei quali, come si è detto, si fa astrazione dagli elementi fissi) risultano composti con la stessa γ_μ^r ; se il loro insieme costituisce da solo una serie lineare, ciò avverrà anche per l'insieme dei gruppi G_λ corrispondenti ai G_λ sulla curva C , e viceversa. Ora il ragionamento precedente prova che i gruppi G_λ formano da soli una serie lineare se e solo se la rigata delle tangenti di C è contenuta in $\binom{r-1}{2}$ complessi lineari, linearmente indipendenti.

Ad es: i gruppi Jacobiani delle g_n^r estratte dalla g_n^r completa costituita da tutti i gruppi di n punti di una retta, costituiscono da soli la serie lineare g_{2n-2}^r pure completa. L'immagine proiettiva della g_n^r è la C^n razionale normale di S_n le cui tangenti sono contenute appunto in $\binom{n-1}{2}$ complessi lineari linearmente indipendenti.

Idromeccanica. — *Sopra alcune proprietà di moti liquidi permanenti i cui vortici sono normali alle velocità.* Nota di B. CALDONAZZO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio Corrisp. U. CISOTTI.

Si consideri un liquido perfetto dotato di moto vorticoso permanente sotto l'azione di forze conservative, con la condizione che le linee di corrente e le linee vorticosi si taglino ortogonalmente. Risulta così definito in tutto il campo del moto un sistema triplo ortogonale di linee costituito dalle tre seguenti congruenze: 1° le linee di corrente l_1 tangenti alla velocità \mathbf{v} ; 2° le linee l_2 tangenti a $(\text{rot } \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$; 3° le linee vorticosi l_3 tangenti a $\text{rot } \mathbf{v}$. Le prime due sono congruenze normali rispettivamente ad una famiglia di superficie vorticosi Σ_1 e ad una famiglia di superficie di corrente e vorticosi insieme Σ_2 . Ebbi già occasione di considerare le Σ_2 proponendo di chiamarle superficie di Bernoulli, perchè nei moti stazionari esse sono superficie di livello per il trinomio di Bernoulli ⁽²⁾.

Si capisce come altre proprietà energetiche e geometriche del moto attualmente considerato possano essere illustrate riferendosi al sistema triplo ortogonale di linee l_1, l_2, l_3 . Due di queste proprietà sono messe in rilievo nella presente Nota. Precisamente si trova che *le linee vorticosi sono linee isotachie*, vale a dire su ogni linea vorticiosa il valore della velocità è costante. Ne segue che sulle linee vorticosi pressione e potenziale delle forze di massa sono legati tra loro linearmente come nel caso statico. L'altra proprietà notevole consiste in ciò che *le linee di corrente sono geodetiche delle superficie di Bernoulli*. Per conseguenza le linee vorticosi costituiscono per queste superficie un sistema di linee geodeticamente parallele.

I moti qui considerati, coll'ulteriore condizione che anche la congruenza delle linee vorticosi risulti normale ad una famiglia di superficie Σ_3 , furono studiati dal Viterbi ⁽³⁾. Egli trovò che in tal caso sono possibili o i moti simmetrici rispetto ad un asse lungo i piani diametrali o i moti piani oppure infine i moti uniformi lungo rette parallele con velocità in generale diversa da retta a retta. Se poi nei moti del Viterbi le superficie di Ber-

(1) Nella seduta del 6 novembre 1927.

(2) Cfr. la mia Nota: *Una estensione del teorema di Bernoulli*, questi « Rend. », vol. IV, serie 6°, (1926), pp. 124-126.

(3) A. VITERBI, *Sopra una classe di moti vorticosi permanenti*, « Atti del R. Ist. Veneto », t. LXI, pp. 449-464 e t. LXII, pp. 175-176.

Recentemente F. SBRANA in una Nota dello stesso titolo negli « Atti della Società Ligustica di Scienze e Lettere di Genova », vol. VI, fasc. II, è giunto agli stessi risultati del Viterbi con un procedimento analitico sensibilmente più semplice.

noulli sono parallele, recentemente il Segre ed il Finzi trovarono che sono possibili soltanto i moti piani ⁽¹⁾.

Questi risultati si possono ritrovare con facilità sfruttando le proprietà geometriche del sistema triplo ortogonale di superficie Σ e facendo uso dell'analisi vettoriale. Il pregio di questo procedimento non è puramente formale perchè si opera prevalentemente sopra elementi geometrici e cinematici di immediata intuizione. Ciò spero potrà giustificarmi se in un'altra Nota tratterò per questa via i moti del Viterbi, tanto più che così potrò portare un piccolo complemento alle ricerche precedenti. In questa Nota mi limito ad una prima discriminazione puramente geometrica dei casi possibili per i moti del Viterbi e ad accennare soltanto alla corrispondenza tra questi ed i risultati del Viterbi.

I. Le equazioni di moto e di continuità nel caso attuale sono

$$(1) \quad (\text{rot } \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} = \text{grad} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} \right) \quad ; \quad \text{div } \mathbf{v} = 0,$$

essendo ρ la densità costante del fluido, p la pressione specifica ed U il potenziale specifico delle forze di massa. Per ipotesi è inoltre

$$(2) \quad \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = 0 \quad , \quad \text{con } \text{rot } \mathbf{v} \neq 0.$$

La prima delle (1) ci assicura manifestamente dell'esistenza delle superficie Σ_2 normali alle linee l_2 . La (2) poi è condizione caratteristica per l'esistenza delle Σ_1 normali alle linee di corrente l_1 ⁽²⁾.

Prendiamo il rot di entrambi i membri della prima delle (1); tenendo conto della seconda si ottiene (A. V. G. 42, [3])

$$\frac{d \text{rot } \mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dP} \text{rot } \mathbf{v}.$$

D'altra parte prendendo il gradiente di entrambi i membri della (2) si ottiene (A. V. G. 42, [1])

$$\frac{d \text{rot } \mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}}{dP} \text{rot } \mathbf{v} = (\text{rot}^2 \mathbf{v})' \wedge \mathbf{v}.$$

Per la precedente ne segue

$$(3) \quad 2 \frac{d \text{rot } \mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} = 2 \frac{d\mathbf{v}}{dP} \text{rot } \mathbf{v} = (\text{rot}^2 \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}.$$

(1) B. SEGRE, *Sul moto sferico vorticoso di un fluido incompressibile*, « Ann. di Mat. pura ed appl. », serie 4^a, t. I, pp. 31-55; B. FINZI, *Moti di fluidi incompressibili il cui vortice è normale alla velocità*, questi « Rend. », vol. XXXIII, serie 5^a, (1924), pp. 275-278. Il Segre aveva trovato la possibilità cinematica anche dei moti per sfere concentriche, che il Finzi constatò incompatibili con forze conservative.

(2) Cfr. C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale*, vol. I, 62. Mi riferirò in seguito a questa opera citandola semplicemente A. V. G.

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{v} si ottiene in particolare

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dP} \operatorname{rot} \mathbf{v} \right) \times \mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} \right) \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0,$$

da cui segue facilmente

$$(4) \quad \operatorname{grad} \operatorname{mod} \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

Questa relazione mette in evidenza che lungo le linee vorticosi il valore della velocità $v = \operatorname{mod} \mathbf{v}$ non cambia e che per conseguenza le *superficie isotachie*, cioè le superficie $v = \text{costante}$, sono superficie vorticosi. Poichè il trinomio di Bernoulli, che compare nella (1), ha un valore costante sulle Σ_2 e quindi su ogni linea vorticiosa, nel caso attuale su ciascuna di queste linee risulterà

$$U - \frac{p}{\rho} = \text{costante}$$

come nel caso statico, salvo che ora la costante è diversa in generale da linea vorticiosa a linea vorticiosa.

II. Per la (4) la normale principale alle linee l_1' coincide in direzione e verso con $(\operatorname{rot} \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$ e la binormale con $\operatorname{rot} \mathbf{v}^{(1)}$. In altre parole le linee l_1, l_2, l_3 sono tangenti in ogni punto P agli spigoli di triedro principale delle linee di corrente. Se queste non sono rette il triedro risulta univocamente determinato dalla loro configurazione. Se invece sono rette il triedro, che geometricamente risulterebbe indeterminato, viene in tal caso definito dalla natura del moto liquido che ha per supporto queste rette. In ogni caso risulta chiaramente che la normale principale alle linee di corrente l_1 coincide con la normale alle superficie di Bernoulli Σ_2 . Ne segue che le linee di corrente sono geodetiche delle superficie di Bernoulli. Di conseguenza le linee vorticosi, traiettorie ortogonali delle l_1 su ciascuna Σ_2 , costituiscono un sistema di linee geodeticamente parallele delle superficie di Bernoulli.

III. Se anche le linee vorticosi l_3 formano una congruenza normale ad una famiglia di superficie Σ_3 avremo i moti del Viterbi. Si ha così accanto al sistema triplo ortogonale di linee l_1, l_2, l_3 il sistema triplo ortogonale di superficie $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. Come è noto i due sistemi di linee orto-

(1) Basta osservare che la binormale \mathbf{b}_1 alle l_1 , la tangente avendo lo stesso verso di \mathbf{v} , è (cfr. la mia Nota *Sulla geometria differenziale di superficie aventi interesse idrodinamico*, questi « Rend. », vol. XXXIII, serie 5^a, (1924), p. 339), $\mathbf{b}_1 = c_1 \operatorname{rot} (\mathbf{v}/v) = = (c_1/v) \operatorname{rot} \mathbf{v} - (c_1/v^2) \operatorname{grad} v \wedge \mathbf{v}$, essendo c_1 la flessione delle l_1 . Ma per la (4) $\operatorname{grad} v$ giace nel piano normale a $\operatorname{rot} \mathbf{v}$, nel quale per le condizioni del problema giace pure \mathbf{v} . Quindi $\operatorname{grad} v \wedge \mathbf{v}$, e per conseguenza anche \mathbf{b}_1 , è parallelo a $\operatorname{rot} \mathbf{v}$.

gonali l che giacciono su una qualsiasi Σ sono linee di curvatura per la Σ stessa ⁽¹⁾. In particolare le l_1 che sono geodetiche per le Σ_2 sono pure linee di curvatura per le stesse. Perciò le l_1 sono *piane* e le Σ_2 sono superficie *modanate* ⁽²⁾. Le stesse l_1 , perchè geodetiche delle Σ_2 , sono asintotiche per le Σ_3 e quindi *linee di curvatura asintotiche piane* per le Σ_3 . Ciò importa necessariamente che le Σ_3 sono *superficie sviluppabili*.

Se le Σ_3 sono piani ogni sistema di linee tracciate su di esse è un sistema di linee di curvatura ed asintotiche insieme. Se non sono piani, poichè uno dei due sistemi di linee di curvatura (le l_1 o le l_2) di ciascuna Σ_3 è costituito dalle sue generatrici rettilinee, sono certamente rette o le linee di corrente l_1 o le l_2 . Quindi tre sono i casi che si possono presentare: 1° superficie Σ_3 piane; 2° linee di corrente rettilinee; 3° linee l_2 rettilinee.

Dimostrerò in una Nota successiva che nel primo caso il moto è simmetrico rispetto ad un asse (e, come caso limite, moto piano), nel secondo il moto avviene uniformemente lungo rette parallele con velocità in generale diversa da retta a retta e che nel terzo si ha un moto che partecipa delle proprietà dei due moti precedenti, giungendo così ai risultati del Viterbi.

Meccanica. — *Sur la stabilité trigonométrique de l'équilibre dans la Dynamique.* Nota di G. VRANCEANU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Dipendenza funzionale dal contorno del tensore di Green-Somigliana per le equazioni di elasticità.* Nota di G. KRALL, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idromeccanica. — *Sopra una categoria di moti stazionari dei liquidi (pesanti) viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali.* Nota di U. CRUDELI, presentata dal Socio T. LEVI CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Cfr. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 3ª ediz., vol. I, p. 184.

(2) Cfr. L. BIANCHI, loc. cit., p. 296 e p. 510.

Fisica-matematica. — *Sulle condizioni di validità di alcuni sviluppi degli operatori funzionali.* Nota di LODOVICO STRANEO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio Corresp. G. GIORGI.

Il prof. G. Giorgi ha richiamata la mia attenzione su un paradosso che si presenta nel calcolo degli operatori funzionali.

Vi sono operatori funzionali la cui valutazione è stata ottenuta applicando l'operatore a un particolare operando, e poi sviluppando l'operatore in serie di potenze e spezzando lo sviluppo in due parti, cioè in due serie, una delle quali, applicata a quel particolare operando, dà risultato nullo, di guisa che il calcolo si prosegue considerando solo i termini residui, ossia l'altra serie, applicata all'operando speciale.

Così Heaviside ⁽²⁾, studiando l'operatore $e^{-\beta \sqrt{\Delta}}$ (ove $\Delta = \frac{d}{dt}$) operatore che si presenta nello studio dei fenomeni di diffusione (propagazione del calore, propagazione di perturbazioni nei fluidi, correnti elettriche variabili, ecc.) e nell'integrazione delle equazioni a derivate parziali di tipo parabolico, ha considerato l'applicazione di questo operatore al particolare operando $1(t)$, cioè alla funzione integrale della funzione impulsiva ⁽³⁾, che per $t < 0$ è uguale a 0, e per $t \geq 0$ è uguale all'unità ⁽⁴⁾.

Heaviside procede così. Considerando l'operatore $e^{-\beta \sqrt{\Delta}}$ applicato alla $1(t)$ abbiamo:

$$e^{-\beta \sqrt{\Delta}} 1(t) = \left(1 - \frac{\beta \sqrt{\Delta}}{1!} + \frac{\beta^2 \Delta}{2!} - \frac{\beta^3 \sqrt{\Delta}^3}{3!} + \dots \right) 1(t),$$

e separando i termini di posto pari da quelli di posto dispari

$$e^{-\beta \sqrt{\Delta}} 1(t) = \left(1 + \frac{\beta^2 \Delta}{2!} + \frac{\beta^4 \Delta^2}{4!} + \dots \right) 1(t) - \left(\frac{\beta \sqrt{\Delta}}{1!} + \frac{\beta^3 \sqrt{\Delta}^3}{3!} + \dots \right) 1(t).$$

Considera il caso che sia $t > 0$ e dice che, essendo le derivate della funzione $1(t)$ per $t > 0$ tutte nulle, la prima serie, applicata a $1(t)$ si riduce al primo termine. Per $t = 0$ il ragionamento cadrebbe, perchè ognuno

(1) Nella seduta del 6 novembre 1927.

(2) O. HEAVISIDE, *Electromagnetic theory*, vol. II, London, 1899, art. 227.

(3) G. GIORGI, *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate dai problemi di elettrodinamica*. «Atti dell'Associazione Elettrotecnica Italiana», vol. IX, fasc. 6° (dic. 1905), pp. 651-699, art. 3.

(4) HEAVISIDE denota con 1 questa funzione; ma poichè questa notazione può dare luogo a qualche confusione, io seguirò qui le notazioni del GIORGI (op. cit.).

dei termini della prima parentesi, in cui compaiono le Δ , applicato alla $1(t)$, per $t = 0$ dà una funzione impulsiva, che non potrebbe essere trascurata. Una obbiezione si presenta quindi spontanea. È lecito seguire il metodo di Heaviside? Con quale diritto si possono tralasciare quei termini? È vero che nel caso considerato, si tratta di un operando speciale; ma, dalla valutazione dell'operatore applicato a $1(t)$, si può risalire, come dimostro in altra Nota ⁽¹⁾, alla valutazione in confronto a un operando qualsiasi. I risultati di Heaviside sono esatti: d'altra parte vi sono sviluppi che contengono solamente quei termini che da Heaviside vengono trascurati e non danno risultato nullo. Dunque non si può dire nè che quei termini siano da trascurare, nè che il loro complesso formi uno sviluppo dello zero. Possiamo convincercene anche per altra via. Consideriamo un operando $e^{\rho t}$ ed appliciamogli una $f(\Delta)$. Da una formola fondamentale del calcolo funzionale ⁽²⁾ è noto che

$$f(\Delta) e^{\rho t} = f(\rho) e^{\rho t}$$

e, nel caso di Heaviside

$$e^{-\beta\sqrt{\Delta}} e^{\rho t} = e^{-\beta\sqrt{\rho}} e^{\rho t}$$

e sviluppando in serie $e^{-\beta\sqrt{\rho}}$ si ha:

$$e^{-\beta\sqrt{\rho}} e^{\rho t} = \left(1 - \frac{\beta\sqrt{\rho}}{1!} + \frac{\beta^2\rho}{2!} - \frac{\beta^3\sqrt{\rho^3}}{3!} + \dots \right) e^{\rho t}.$$

I termini che col metodo di Heaviside sono trascurati, $\left(\frac{\beta^2\rho}{2!}, \frac{\beta^4\rho^2}{4!} \text{ ecc.} \right)$ intervengono anch'essi nel risultato e la loro somma non può essere nulla perchè essi hanno tutti lo stesso segno. Quindi in questo caso non sarebbe lecito trascurare tali termini.

Allora come giustificare il procedimento di Heaviside? E ciò che più importa, come dobbiamo regolarci in altri casi in cui intervengano sviluppi di operatori funzionali? Come si fa a stabilire quando quei termini possono essere trascurati oppure no? Ritengo che la risposta a tutti questi interrogativi si possa ottenere ragionando nel modo seguente.

L'operatore $e^{-\beta\sqrt{\Delta}}$ ha forma tale che, se in luogo del simbolo Δ si sostituisce una variabile complessa, la funzione $e^{-\beta\sqrt{\Delta}}$ tende asintoticamente a zero nelle direzioni $\Delta \rightarrow \pm i\infty$. Quindi, in virtù di un teorema dimostrato dal Giorgi ⁽³⁾ esso è diffusivo; è tale cioè che, applicato a una fun-

(1) In corso di pubblicazione nel « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana ».

(2) G. GIORGI, op. cit., art. 15.

(3) G. GIORGI, *On the functional dependence of physical variables*. Estratto dai « Proceedings » del Congresso Internazionale di Matematica a Toronto, 1924, part. 9, art. 29, regola 9.

zione impulsiva, genera una funzione non impulsiva. Per conseguenza la sua valutazione rispetto a un operando qualunque $U(t)$ può trovarsi mediante la formola (1)

$$(1) \quad e^{-\beta \sqrt{\Delta}} U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - \tau) U(\tau) d\tau$$

dove la G , cosiddetta funzione generatrice, è una funzione non impulsiva data da

$$(2) \quad G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-\beta \sqrt{\omega}} e^{\omega t} d\omega.$$

In questa formola C denota una qualunque linea che, lasciando alla sua sinistra tutti i punti singolari della $e^{-\beta \sqrt{\omega}}$ nel piano complesso della variabile ω , si estenda da $\omega \rightarrow -i\infty$ sino a $\omega \rightarrow +i\infty$. Si può scegliere come linea C una semicirconferenza a destra dell'asse immaginario, di raggio infinitamente grande. Per t negativo, l'integrale è nullo, perchè lungo tutto il percorso d'integrazione, l'integrando diventa infinitesimo di ordine esponenziale. Per $t = 0$, non interessa domandarci quale valore assuma $G(t)$, perchè questa funzione è destinata a figurare solamente sotto il segno di integrale, e abbiamo già rilevato che essa non è impulsiva. Nulla quindi ci vieta, per $t = 0$, di attribuirle convenzionalmente il valore 0.

La funzione $G(t)$ può dunque considerarsi nulla per $t \leq 0$, e data dall'integrale soprascritto per $t > 0$. Quindi basta fare intervenire nella (1) i valori di $G(t)$ per $t > 0$ e la formola definitiva di valutazione di $e^{-\beta \sqrt{\Delta}}$ risulta, con rigore, la seguente:

$$e^{-\beta \sqrt{\Delta}} U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - \tau) U(\tau) d\tau.$$

Accertato questo, la validità dei diversi passaggi applicati da Heaviside può essere investigata per confronto. La separazione che egli ha fatto dei termini di posto pari e dispari della serie sviluppo di $e^{-\beta \sqrt{\Delta}}$, equivale a scrivere

$$e^{-\beta \sqrt{\Delta}} 1(t) = [\text{Cosh}(\beta \sqrt{\Delta}) - \text{Senh}(\beta \sqrt{\Delta})] 1(t);$$

ad essa corrisponde dunque lo scrivere $G(t)$ in questo modo:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C [\text{Cosh}(\beta \sqrt{\omega}) - \text{Senh}(\beta \sqrt{\omega})] e^{\omega t} d\omega$$

(1) G. GIORGI, op. cit., nell'annotazione 3 a p. 292, art. 4.

e spezzarlo in due integrali come segue :

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \text{Cosh}(\beta\sqrt{\Delta}) e^{\omega t} d\omega - \frac{1}{2\pi i} \int_C \text{Senh}(\beta\sqrt{\Delta}) e^{\omega t} d\omega .$$

Ora, se questa separazione si eseguisce prima di avere limitato ai soli valori positivi il campo di variazione della t , essa non è lecita: infatti su quei due integrali separati non si può ripetere lo stesso ragionamento fatto sulla formola (2): così nell'integrale che contiene il Cosh abbiamo che

$$\text{Cosh}(\beta\sqrt{\omega}) = \frac{e^{\beta\sqrt{\omega}} + e^{-\beta\sqrt{\omega}}}{2} \text{ non diviene infinitesimo lungo il percorso}$$

d'integrazione, come accadeva per $e^{-\beta\sqrt{\Delta}}$ e analoga osservazione vale per l'altro termine. Inoltre nè l'una nè l'altra delle funzioni in cui rimane spezzato $e^{-\beta\sqrt{\omega}}$ gode la proprietà di annullarsi per $\omega \rightarrow \pm i\infty$ che è condizione di diffusività. Se invece ci si limita ai valori positivi di t , l'operazione è lecita, perchè i due integrali si comportano in modo regolare. Questo fatto corrisponde al riconoscere che il primo membro non è impulsivo, perchè l'operatore è diffusivo, mentre ciascuno dei due termini $\text{Cosh}(\beta\sqrt{\Delta}) \mathbf{1}(t)$ e $\text{Senh}(\beta\sqrt{\Delta}) \mathbf{1}(t)$ è impulsivo: ciò significa che gli impulsi del primo termine e quelli del secondo si distruggono mutuamente perchè il totale è diffusivo. Siccome del resto noi vogliamo conoscere la valutazione dell'operatore, che già abbiamo detto non contenere elementi impulsivi, possiamo tralasciare la computazione degli impulsi originati dai termini in cui l'operatore viene decomposto, e studiare l'uno e l'altro termine separatamente per $t > 0$.

Riassumendo possiamo enunciare il seguente

Teorema. — Se un operatore $f(\Delta)$ si può decomporre nella somma di due altri $\varphi(\Delta)$ e $\psi(\Delta)$, il fatto che uno di essi $\varphi(\Delta)$ dia risultato nullo quando è applicato al particolare operando $\mathbf{1}(t)$ non autorizza ad effettuare la valutazione di $f(\Delta)$ tenendo conto solo dell'altro termine componente. Quando però $f(\Delta)$ si annulli nelle direzioni $\Delta \rightarrow \pm i\infty$, e soddisfi alla condizione di successione⁽¹⁾, è lecito, nel computo di cui sopra, trascurare $\varphi(\Delta)$.

Questo teorema rende ragione del fatto che il metodo di Heaviside, nei casi singoli in cui egli lo ha applicato, ha dato risultati esatti, mentre altri autori, applicandolo similmente, hanno ottenuto risultati erronei.

(1) Cioè dà luogo a una funzione generatrice che sia nulla pei valori negativi di t : ciò avviene quando l'insieme dei punti singolari di $f(\Delta)$ è limitato verso destra. Vedi G. GIORGI, op. cit., nell'annotazione 3, p. 293, art. 32. Si confronti anche la definizione di operatori retrospettivi, data da N. WIENER [Operational Calculus § 7; in « Mathematische Annalen » vol. 25 (anno 1926) pp. 557-584].

Astrofisica. — *Contributo alla « Teoria balistica delle stelle variabili ».* — Nota del dott. C. CANNATA ⁽¹⁾, presentata ⁽²⁾ dal Socio Corresp. M. LA ROSA.

Come è noto il fenomeno di variabilità offerto da molte stelle è stato recentemente addotto come un forte elemento di prova in favore di quell'ipotesi che attribuisce alla luce una velocità soggiacente al principio di composizione.

Contro questo tentativo che mira a porre sopra base sperimentale l'interessante ipotesi, sono state rivolte molte obiezioni alle quali però è stato risposto con successo. Gli elementi di fatto che nel vivace dibattito vi sono stati contrapposti, sono stati portati facilmente sotto la cornice dello schizzo della « teoria balistica delle variabili », ed alcuni anzi hanno portato nuovo sviluppo ed imprevedute conferme. L'ostacolo più grave, e cioè quello riguardante la discordanza essenziale tra una limitazione della teoria ed i dati dell'osservazione, discordanza segnalata dal prof. Thirring e dal dott. Bernheimer, è stato recentemente eliminato ⁽³⁾, sicchè si presentava oramai come urgente il compito di allargare e completare le basi della « teoria balistica delle variabili » così da avvicinarla alle condizioni che in concreto più spesso si presentano, in modo da dare più larga base al controllo anche numerico dei particolari più notevoli, sia col materiale di osservazione dall'Astronomia già acquisito, sia con nuove osservazioni che si potrebbero istituire. Un tale sviluppo potrà anche servire a prevenire nuove e facili obiezioni, che alimentando una ingiustificata sfiducia, allontanano dall'interessante argomento l'attenzione degli studiosi.

Con questo intento è stato a me affidato dal prof. La Rosa il compito di schizzare i tratti essenziali del « fenomeno di variabilità » offerto dall'astro mobile, allorchè l'orbita descritta anzichè un circolo sia un'ellissi, comunque posta rispetto all'osservatore.

*
* *

Supporremo in un primo tempo, che l'osservatore si trovi nel piano dell'orbita e che il movimento dell'astro si veda avvenire nel verso indicato dalla freccia A-B (vedi fig.).

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Palermo.

(2) Nella seduta del 6 novembre 1927.

(3) Congresso Internazionale di Fisica per la commemorazione Voltiana, a Como.

Assumendo come assi x, y , rispettivamente le rette orientate CR, CS (ossia gli assi dell'ellissi) e denotando con E l'anomalia eccentrica relativa alla posizione generica $M(x, y)$ dell'astro; risulta:

$$x = a \cos E, \quad y = b \sin E$$

sicchè le componenti v_x, v_y , della velocità v dell'astro sono date da:

$$v_x = -a \sin E \frac{dE}{dt}, \quad v_y = b \cos E \frac{dE}{dt}.$$

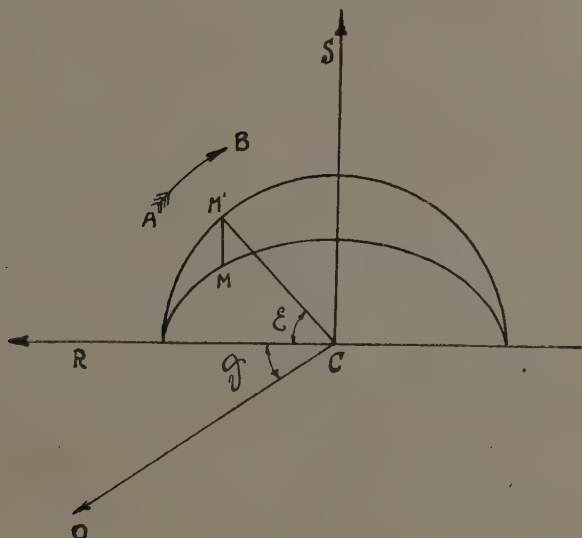


Fig. 1.

Se ϑ è l'angolo formato dalla retta orientata CO (che va dal centro C dell'ellissi all'osservatore) con l'asse x , e v_r è la componente di v secondo CO, componente che indicheremo col nome di *velocità radiale* dell'astro, abbiamo:

$$(1) \quad v_r = -(a \cos \vartheta \sin E + b \sin \vartheta \cos E) \frac{dE}{dt}$$

Se di più poniamo:

$$(2) \quad \begin{cases} b \sin \vartheta = p \sin \varphi \\ a \cos \vartheta = p \cos \varphi \end{cases}$$

con $p > 0$, così che

$$(3) \quad p = \sqrt{a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \vartheta,$$

la relazione (1) potrà scriversi:

$$(4) \quad v_r = -p \sin(E + \varphi) \frac{dE}{dt}$$

Ma poichè l'astronomia c'insegna che la relazione che lega E a t è del tipo:

$$(5) \quad E - e \sin E = mt$$

in cui e è l'eccentricità ed m è una costante, dipendente dall'astro che si considera, si ha:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m}{1 - e \cos E}.$$

E quindi sostituendo in (4) si trova:

$$(6) \quad v_r = - \frac{mp}{1 - e \cos E} \sin(E + \varphi).$$

Premesso ciò, possiamo facilmente stabilire la forma generale dell'equazione fondamentale della teoria balistica delle variabili, cioè della relazione che deve intercedere tra i tempi di osservazione T ed i tempi di emissione t della luce proveniente dalla stella in moto.

Il fascio di luce partito dall'astro, quando esso occupava la posizione determinata dal valore E della anomalia eccentrica, è stato emesso all'istante t dato dalla (5), cioè:

$$(7) \quad t = \frac{1}{m} (E - e \sin E).$$

e' giunge all'osservatore all'istante T , dato da:

$$T = t + t_{v_r}$$

in cui t_{v_r} denota il tempo che la luce impiega a percorrere la distanza d che separa l'astro dall'osservatore. Nell'ipotesi che la velocità della luce si componga con quella della sorgente, avremo dunque:

$$T = t + \frac{d}{c + v_r},$$

la quale si può scrivere:

$$T = t + \delta \left(1 - \frac{v_r}{c} + \frac{v_r^2}{c^2} - \dots \right),$$

avendo posto $\frac{d}{c} = \delta$.

Se ci fermiamo — come è lecito sempre di fare — al primo ordine del rapporto $\frac{v_r}{c}$, potremo brevemente scrivere:

$$(8) \quad T = t + \delta \left(1 - \frac{v_r}{c} \right)$$

od anche per la (7) e la (6):

$$(9) \quad T = \frac{1}{m} (E - e \sin E) + \frac{m p \delta}{c} \frac{\sin (E + \varphi)}{1 - e \cos E} + \delta.$$

Questa relazione in connessione con la (7) ci permette di determinare T in funzione di t . Essa è tale che ad ogni valore di E , o meglio ad ogni istante di partenza, corrisponde uno ed un solo istante di arrivo, mentre ad ogni valore di T possono corrispondere in generale più valori di E e quindi di t . Ed è di molto interesse stabilire sotto quali condizioni la t risulta funzione monodroma di T , in modo che non si verifichino sovrapposizioni di luce proveniente da posizioni diverse dell'astro. Ora, condizione necessaria e sufficiente perchè ciò avvenga è che la $\frac{dT}{dt}$ non cambi mai di segno.

Derivando ambo i membri della (9) rispetto a t , risulta:

$$\frac{dT}{dt} = 1 + \frac{m^2 p \delta}{c} \cdot \frac{\cos (E + \varphi) - e [\cos E \cos (E + \varphi) + \sin E \sin (E + \varphi)]}{(1 - e \cos E)^3}$$

ossia

$$(10) \quad \frac{dT}{dt} = 1 + H \frac{\cos (E + \varphi) - e \cos \varphi}{(1 - e \cos E)^3}.$$

avendo posto

$$\frac{m^2 p \delta}{c} = H$$

Siccome, per $E = 0$, il 2° membro di (10) è positivo se

$$(11) \quad H \cos \varphi > -(1 - e)^2$$

ed è negativo se

$$(12) \quad H \cos \varphi < -(1 - e)^2$$

affinchè $\frac{dT}{dt}$ non cambi mai di segno occorre e basta che sia:

$$(13) \quad \min \left[H \frac{\cos (E + \varphi) - e \cos \varphi}{(1 - e \cos E)^3} \right] \geq -1$$

ovvero

$$(14) \quad \max \left[H \frac{\cos(E + \varphi) - e \cos \varphi}{(1 - e \cos E)^3} \right] \leq -1,$$

rispettivamente.

Supposte soddisfatte le (11) e (13), ovvero (12) e (14), l'intensità luminosa media osservata in un intervallo ΔT si può considerare proporzionale al rapporto $\frac{\Delta t}{\Delta T}$ (tra l'intervallo di tempo in cui la luce è stata emessa e quello in cui viene ricevuta) e più precisamente l'intensità luminosa osservata in un certo istante T , alla derivata

$$\frac{dt}{dT} = \frac{(1 - e \cos E)^3}{(1 - e \cos E)^3 + H [\cos(E + \varphi) - e \cos \varphi]}.$$

Dunque, se per ogni valore di E , si calcolano le T , $\frac{dt}{dT}$ corrispondenti, e si portano in ascisse ed ordinate, rispettivamente, si otterrà la curva che dà l'intensità luminosa in funzione dei tempi di osservazione, cioè la *curva di luce* dell'astro considerato, le cui equazioni parametriche sono pertanto:

$$(15) \quad \begin{cases} T = \frac{1}{m}(E - e \sin E) + \frac{H}{m} \frac{\sin(E + \varphi)}{1 - e \cos E} + \delta \\ \frac{dt}{dT} = \frac{(1 - e \cos E)^3}{(1 - e \cos E)^3 + H [\cos(E + \varphi) - e \cos \varphi]} \end{cases}$$

Volendo togliere l'ipotesi accessoria che l'osservatore si trovi nel piano dell'orbita, denoteremo con α, β i coseni direttori della linea visuale, rispetto ai due assi, scelti come al solito. Si ha allora:

$$v_r = (b \alpha \cos E - a \beta \sin E) \frac{dE}{dt}.$$

Ponendo

$$-b \alpha = p \sin \varphi, \quad a \beta = p \cos \varphi,$$

con $p > 0$, si ritrova, salvo il diverso significato di p, φ , la formula (4):

$$v_r = -p \sin(E + \varphi) \frac{dE}{dt}.$$

Questi risultati verranno meglio illustrati in una prossima nota, in cui se ne farà applicazione a qualche caso concreto. Le curve di luce che si trovano si accostano nettamente al tipo delle « cefeidi ».

Astrofisica. — *Le Problème de l'index de couleur en astronomie.* Nota ⁽¹⁾ di G. TIERCY, presentata ⁽²⁾ dal Socio Corrispondente G. ABETTI.

1. On sait qu'on appelle *index de couleur* la différence entre la magnitude photographique et la magnitude visuelle. Lorsque les astronomes commencèrent à s'occuper de cet index I , ils pensèrent tout d'abord qu'il caractérisait le type spectral d'une étoile, et qu'on pouvait établir une échelle numérique des I , aux échelons de laquelle correspondraient respectivement les divers types de spectres (des types B aux types M et N). Mais on s'aperçut bien vite que cette correspondance n'était pas si simple qu'on l'avait cru tout d'abord, et que les dimensions des étoiles jouaient un rôle dans la question. On fut ainsi amené à établir une échelle des I pour les étoiles géantes et une échelle pour les étoiles naines.

Nous reproduisons ci-dessous ces deux échelles, telles qu'on les trouve dans le traité de MM. Russell-Dugan-Stewart ⁽³⁾.

Type spectral	B ₀	B ₅	A ₀	A ₅	F ₀	F ₅	G ₀	G ₅	K ₀	K ₅	M ₀	N
I (géants)	— 0.33	— 0.18	0.00	0.20	0.33	0.47	0.67	0.92	1.12	1.57	1.73	2.6
I (nains)	— 0.33	— 0.18	0.00	0.20	0.33	0.47	0.57	0.65	0.78	0.98	1.45	—

Jusqu'au type F₅, les deux échelles coïncident, parce que les différences de dimensions entre les géants et les nains ne sont pas énormes pour ces premiers types spectraux; par contre, à partir du type F₅, ces différences deviennent de plus en plus considérables, au fur et à mesure qu'on se rapproche des types M.

Mais il est bien évident qu'on n'a là que de vagues moyennes; et il ne faut pas attribuer à ces échelles une précision qu'elles n'ont pas. Si 1.73 et 1.45 sont les valeurs moyennes de I correspondant à la classe M₀, quelle sera la variation de l'*index de couleur* pour le groupe des géants M₀ ou pour le groupe des nains M₀? Voilà le problème. En réalité, il faudrait établir, non pas une échelle pour les géants pris ensemble et une échelle pour les nains pris ensemble, mais une échelle pour chaque valeur du rayon stellaire.

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri — Firenze.

(2) Nella seduta del 6 novembre 1927.

(3) RUSSELL-DUGAN-STEWART, *Astronomy*, vol. II, p. 734.

2. Nous étudions ce problème des valeurs de I à l'occasion des recherches que nous faisons à l'Observatoire d'Arcetri⁽¹⁾, avec le réflecteur à prismes⁽²⁾; ces recherches portent sur un groupe de Céphéides à courtes périodes, et la première partie du travail a été consacré à l'étoile SU Cassiopeiae.

L'examen de la variation du spectre de SU Cassiopeiae nous a amené à étudier les variations de la température T , du rayon R , de la pression moyenne P qui règne dans la couche renversante de l'étoile, de l'*index de couleur* I ⁽³⁾, et de l'ionisation dans la couche renversante⁽⁴⁾.

Les résultats que nous avons obtenus sont rassemblés dans le tableau suivant :

Plaque	Spectre	Phase	Magn. m	P (en atm.)	T	R ($\odot=1$)	I	Remarques
E 70	A ₉	0.002	6.52	0.004000	8150°	9.300	0.261	
71	A ₉ — F ₀	0.191	6.57	0.003751	7928	9.508	0.285	
81	F ₀	0.268	6.60	0.003685	7839	9.568	0.295	
84	F ₁	0.423	6.70	0.003580	7606	9.666	0.325	
85	F ₁	0.475	6.73	0.003577	7550	9.673	0.333	
64	F ₁₋₂	0.497	6.74	0.003574	7532	9.676	0.335	
R max.	F ₁₋₂	0.500	6.76	0.003573	7497	9.676 (3)	0.340	
79	F ₅	0.835	6.94	0.003773	7292	9.487	0.374	
T min.	F ₆	0.880	6.97	0.003833	7285	—	0.377	I max.
75	F ₅₋₆	0.977	6.984	0.003963	7307	9.328	0.376	
Min. lum.	F ₅₋₆	1.050	6.99	0.004076	7348	9.240	0.372	
63	F ₅	1.371	6.90	0.004485	7684	8.950	0.333	
82	F ₄	1.410	6.89	0.004510	7712	8.936	0.330	
R min.	F ₃	1.480	6.80	0.004528	7882	8.925	0.307	
65	F ₂	1.579	6.70	0.004485	8046	8.951	0.284	
67	F ₁	1.660	6.62	0.004413	8163	8.998	0.268	
73	F ₀	1.673	6.61	0.004400	8175	9.007	0.266	
77	A ₉	1.722	6.58	0.004341	8204	9.046	0.259	
T max.	A ₈₋₉	1.777	6.54	0.004260	8210	—	0.256	I min.
69	A ₈₋₉	1.855	6.53	0.004145	8204	9.188	0.257	
Max. lum.	A ₉	1.949	6.52	0.004000	8150	9.300	0.261	

(1) Comme « Rockefeller-fellow ».

(2) Equatorial Peratoner, couplé avec un télescope à « prisme-objectifs ». Voir « Pubblicazioni del R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri », fasc. n. 41.

(3) « Pubblicazioni del R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri », fasc. n. 44.

(4) « Archives des Sciences physiques et naturelles, Genève », n. de novembre-décembre 1927.

— Nous reproduisons ci-dessous la courbe de lumière que nous avons trouvée, ainsi que la répartition des spectres le long de cette courbe (fig. 1).

On voit immédiatement les curiosités de cette variation:

1° — Le spectre le moins avancé (A_{8-9}) ne correspond pas au maximum de lumière, non plus que la phase de T max.; de même, T min. et le spectre le plus avancé (F_6) ne coïncident pas avec le minimum de lumière;

2° — À égalité de magnitude, l'index de couleur I est plus faible sur la branche ascendante que sur la branche descendante de la courbe de lumière;

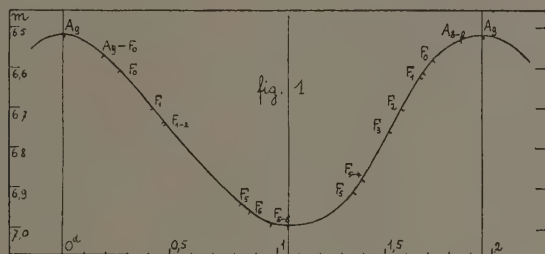


Fig. 1.

3° — Ou bien, ce qui revient au même, la température T est plus forte sur la branche ascendante que sur la descendante; on a en effet la relation:

$$I = \frac{7200}{T} - 0.611^{(1)} ;$$

4° — À égalité de type spectral, l'index I est plus faible sur la branche ascendante que sur la descendante.

3. Les conclusions n. 2 et n. 4 sont importantes. Elles montrent que la simple connaissance de la valeur de I n'est suffisante, ni pour fixer la magnitude, ni pour fixer le type spectral. Nous insistons particulièrement sur le n. 4. On y trouve la distinction de Russell entre les « géants » et les « nains » de même type spectral; le rayon R de l'étoile est en effet toujours plus grand pour une phase de la branche descendante de la courbe de lumière que pour une phase de la branche ascendante. Il n'est sans doute plus question ici de « géant » et de « nain »; l'étoile est géante, et reste géante pendant toute sa variation lumineuse. Mais il n'en subsiste pas moins que l'étoile est plus grande lors d'une phase de la branche descendante que

(1) « Pubblicazioni del R. Osservatorio di Arcetri », loc. cit., fasc. n. 44.

lors d'une phase de la branche ascendante; et qu'à cette étoile plus grande correspond un index I plus fort.

Pour le type F_5 , par exemple, on a :

Branche	I	R	m	M_v
descendante	0.374	9.487	6.94	— 0.78
ascendante	0.333	8.950	6.90	— 0.82

Il en est de même pour chacun des types spectraux considérés dans la variation de SU Cassiopeiae; dans le petit tableau ci-dessus, nous avons indiqué aussi les magnitudes visuelles (ordinaire et absolue).

On remarquera que ces valeurs de I sont toutes deux plus faibles que celle indiquée pour la classe F_5 dans les premières échelles générales de I, soit pour les géants, soit pour les nains; ce qui montre qu'en tous cas, la distinction entre géants et nains est sensible avant la classe F_5 .

De même, étudiant le phénomène de l'étoile variable T Vulpeculae, nous avons trouvé les résultats suivants pour le type F_5 :

Branche	I	R	m	M_v
descendante	0.454	10.376	5.96	— 0.74
ascendante	0.266	7.768	5.85	— 0.85

Et nous avons commencé le calcul pour tout un groupe de Céphéides à courtes périodes.

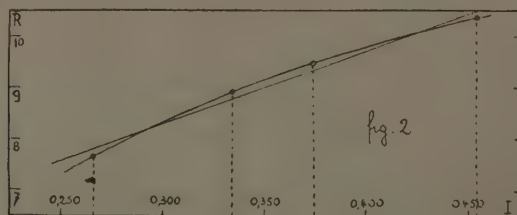


Fig. 2.

4. Nous pensons qu'on peut espérer beaucoup de l'étude des I des Céphéides. Nous expliquons notre pensée ci-dessous, en utilisant les deux petits tableaux qui précèdent.

Le calcul étant supposé terminé pour un groupe d'étoiles variables, nous rassemblerons tous les renseignements relatifs à un type spectral, F_5 , par exemple (naturellement, la même opération se répètera pour les autres types); et nous en déduirons deux courbes fort importantes.

Les I servent d'abscisses; les R sont portés en ordonnées (fig. 2). La courbe étant construite avec suffisamment de données, on voit ce qu'on en pourra tirer: il suffira de mesurer directement l'index I d'une étoile F_5 , pour trouver le rayon R correspondant. En particulier, on pourra de la sorte trouver la variation de R pour les étoiles variables dont on ne possède pas directement la « courbe des vitesses radiales ».

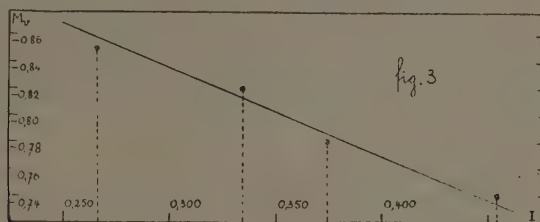


Fig. 3.

Les M_v sont portées en ordonnées (fig. 3). Supposons la courbe construite avec suffisamment de matériaux; il suffira dès lors de mesurer directement l'index I d'une étoile de type F_5 , pour trouver immédiatement sa grandeur M_v .

Ces deux calculs pouvant être faits pour chaque type spectral, on voit bien tout le bénéfice que l'on pourra retirer, pour les étoiles en général, de l'étude des I des Céphéides.

Chimica-fisica. — *Relazioni fra i potenziali di ionizzazione degli elementi omologhi.* Nota ⁽¹⁾ di G. PICCARDI, presentata ⁽²⁾ dal Socio Corrisp. L. ROLLA.

I potenziali di ionizzazione di primo ordine, degli elementi omologhi, considerati come funzione del numero atomico, non mostrano seguire alcuna relazione semplice. Anche per gli elementi a struttura atomica periferica meno complicata, come l'idrogeno, i metalli alcalini ed i metalli nobili, che possiedono un unico elettrone sull'orbita più esterna, si osservano delle discontinuità o delle diversità di comportamento, la cui ragione ancora ci

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 6 novembre 1927.

sfugge. Sembra proprio che una causa misteriosa abbia reso impossibile al potenziale di ionizzazione di variare secondo una legge continua, spostando gli uni rispetto agli altri, i periodi e sottoperiodi in cui è spezzato il sistema degli elementi.

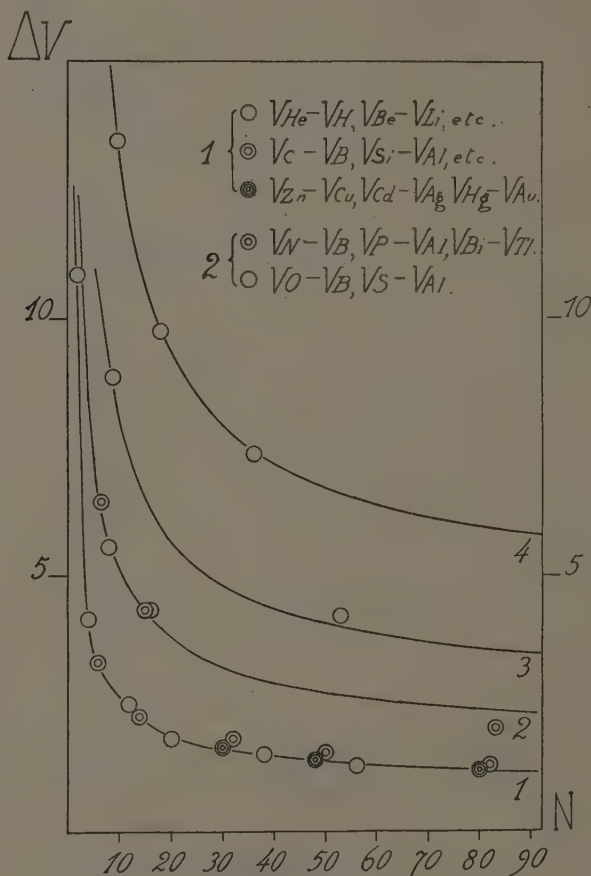


Fig. 1.

Per questo fatto, anche le notevoli proprietà periodiche già osservate⁽¹⁾, che dimostrano così esaurientemente l'intima connessione fra il potenziale di ionizzazione ed il sistema degli elementi, malgrado il loro carattere sostanzialmente quantitativo, non possono servire per calcoli numerici.

(1) L. ROLLA e G. PICCARDI, «Gazzetta chim. it.», 56, 512, 1921.

Io ho pensato allora di cercare, non una relazione fra i valori assoluti dei potenziali degli elementi omologhi, ma una relazione fra i valori che i potenziali di ionizzazione di questi elementi presentano rispetto a quelli di certi elementi che chiamerò *fondamentali*.

Gli elementi fondamentali sono quelli che possiedono un unico elettrone sulla stessa orbita esterna nella quale gli elementi da considerare hanno i loro elettroni periferici.

Perciò è riferito il valore relativo ad un metallo alcalino terroso (due elettroni sull'orbita s) a quello relativo al metallo alcalino precedente (un elettrone sull'orbita s); quello relativo ad uno dei metalli bivalenti, zinco, cadmio, mercurio (due elettroni sull'orbita s) al metallo nobile precedente (un elettrone sull'orbita s) e quello relativo ad uno degli elementi del gruppo del carbonio, dell'azoto, dell'ossigeno, degli alogeni e dei gas nobili (rispettivamente due, tre, quattro, cinque e sei elettroni sull'orbita p) a quello relativo al metallo trivalente precedente (un elettrone sull'orbita p) ⁽¹⁾.

In tal modo, restando eliminata le discontinuità esistenti fra periodo e periodo e fra sottoperiodo e sottoperiodo, l'aumento che il potenziale di ionizzazione subisce, coll'aumento degli elettroni nella zona esterna deve risultare perfettamente regolare (data anche la perfetta identità di conformazione degli atomi degli elementi omologhi).

Per studiare queste variazioni ho costruito il diagramma qui unito, che porta in ascisse il numero atomico ed in ordinate ΔV , cioè la differenza, espressa in volta, che passa fra il potenziale di ionizzazione di un elemento e quello del relativo elemento fondamentale.

Esaminiamo il diagramma:

1. *Elio e metalli alcalino-terrosi*. — I valori del ΔV che si ottengono per questi elementi sono qui sotto elencati:

N.	Elemento	Pot. di ionizz.	N.	Elem. fondam.	Pot. di ionizz.	ΔV
2	He	24.41	1	H	13.54	10.87
4	Be	9.50	3	Li	5.37	4.13
12	Mg	7.61	11	Na	5.13	2.48
20	Ca	6.09	19	K	4.32	1.77
38	Sr	5.67	37	Rb	4.16	1.51
56	Ba	5.19	55	Cs	3.89	1.30
88	Ra	5 ?	87	—	—	—

(1) Per queste considerazioni abbiamo adottato la configurazione atomica e la notazione di F. HUND) vedi F. HUND, *Linienpektren und periodisches System der Elemente*, Berlino, 1927).

Essi stanno sopra una curva continua (curva 1), si può dire esattamente, poichè le deviazioni che si riscontrano sono sempre inferiori a 0,1 volta.

2. *Metalli bivalenti* Zn, Cd, Hg. — I valori del ΔV , relativi a questi metalli, e cioè:

N.	Elemento	V	N.	Elem. fondam.	V	ΔV
30	Zn	9.35	29	Cu	7.69	1.66
48	Cd	8.95	47	Ag	7.54	1.41
80	Hg	10.39	79	Au	9.20	1.19

stanno pure sulla curva 1 con deviazioni dell'ordine del centesimo di volta, cioè con assoluta precisione. Questo fatto dimostra che, passando da un elemento con uno ad un elemento con due elettroni (sulla stessa orbita s), il potenziale di ionizzazione subisce un aumento che è una funzione ben determinata del numero atomico e che si può stimare con tutta precisione per mezzo della curva 1; noi potremmo così sapere, per esempio, di quanto il potenziale di ionizzazione del Radio supera quello dell'elemento sconosciuto di numero atomico 87.

I valori dei potenziali di ionizzazioni che hanno finora servito al calcolo del ΔV sono tutti valori spettroscopici ⁽¹⁾, cioè i più esatti che si conoscono.

3. *Gruppo del carbonio*. — Per questi elementi si trovano i seguenti valori:

N.	Elemento	V	N.	Elem. fondam.	V	ΔV
6	C	11.30	5	B	8.00	3.27
14	Si	8.19	13	Al	5.96	2.23
32	Ge	7.8	31	Ga	5.97	1.83
50	Sn	7.30	49	In	5.67	1.63
82	Pb	7.38	81	Tl	6.08	1.30

I valori relativi al carbonio ed al silicio stanno esattamente sulla curva 1; quelli relativi al piombo ed allo stagno ne distano non più di 0,10 e di 0,17 volta, rispettivamente, cioè sono sempre da considerarsi come buoni. I valori dei potenziali di ionizzazione che hanno servito al calcolo del ΔV per questi quattro elementi sono tutti spettroscopici. Il punto corrispondente

(1) Vedi K. T. COMPTON e F. L. MOHLER, « Bull. Nat. Research Council », vol. IX, 1°, n. 48, 1924; A. FOWLER, *Report on Series in Line Spectra*, London, 1922.

al germanio si scosta invece di 0,25 volta. In ogni modo la concordanza è molto buona, assai superiore a quella che in certi casi si ottiene con metodi fisici, per la determinazione dei potenziali di ionizzazione.

Il fatto che gli elementi del gruppo del carbonio seguano pressochè esattamente la stessa legge seguita dall'elio, dai metalli alcalino-terrosi e dai metalli bivalenti Zn, Cd, Hg, è veramente notevole perchè dimostra che quando si passa da uno a due elettroni sull'orbita esterna, sia essa orbita s oppure p , l'aumento del potenziale che ne deriva, dipende dal numero atomico secondo una unica legge.

4. *Altri gruppi di elementi.* — Dato che i ΔV relativi agli elementi del gruppo del carbonio seguono la legge rappresentata dalla curva 1, e dato anche che le strutture atomiche degli elementi omologhi sono identiche, gli altri gruppi di elementi formeranno delle curve simili alla curva 1, e da essa si potranno derivare, moltiplicandone le ordinate per dei fattori costanti.

I pochi valori che si possono usare, non solo verificano tutto ciò con una straordinaria esattezza, ma dimostrano, per di più, che il fattore moltiplicativo è un numero intero.

Così per i gas nobili, il fattore moltiplicativo è 5. I ΔV dedotti da valori sperimentali dei potenziali di ionizzazione dei primi tre elementi, distano dalla curva ottenuta per quintuplicazione delle ordinate della 1, (curva 4), non più di 0,05 volta; siamo cioè nei limiti dell'errore grafico.

N.	Elemento	V	N.	Elem. fondam.	V	ΔV
10	Ne	21.47	5	B	8.00	13.44
18	Ar	15.69	13	Al	5.96	9.73
36	Kr	13.3	31	Ga	5.97	7.33

Per il Neo ⁽¹⁾ e per l'Argo ⁽²⁾ i potenziali di ionizzazione usati per il calcolo del ΔV , sono spettroscopici; per il Kripto, invece, sono stati ottenuti con un metodo di bombardamento ⁽³⁾. Per lo Xenon i valori sperimentali esistenti sono molto discordanti; in ogni modo il valore del potenziale che possiamo dedurre dalla curva 4, cade nel campo di oscillazione di quelli sperimentali.

Per gli alogeni non si conosce con sicurezza che il potenziale di ionizzazione del fluoro, ottenuto con considerazioni spettroscopiche ⁽⁴⁾, e si sa

(1) Questo valore, che è in perfetto accordo col valore fisico 21, 5, è stato tratto dal volume *Astronomy* di RUSSEL-DUGAN-STEWART, App. V, Boston, 19-7.

(2) F. A. SAUNDERS, « Nat. Acad. Sci. Proc. », 12, 556-560, 1926; « Science Abstr. » 30, 1°, 34, 1927.

(3) G. HERTZ e K. KLOPPERS, « ZS. f. Physik », 31, 463, 1925.

(4) R. A. MILLIKAN e I. S. BOWEN, « Phil. Mag. », S. 7, 4, 561, 1927.

che il potenziale dell'iodio deve aggirarsi sui 10 volta, come appare dalle concordanti esperienze di Mohler e Foote, di Mackaye e di Duffendach ⁽¹⁾.

N.	Elemento	V	N.	Elem. fondam.	V	ΔV
9	F	16.9	5	B	8.00	8.87
53	J	10 —	49	In	5.76	4.24

Il ΔV relativo al fluoro è quasi esattamente il triplo dell'ordinata corrispondente all'ascissa 9 della curva 1; costruendo allora la curva degli alogeni (curva 3) triplicando le ordinate della curva 1, si trova che il ΔV dell'iodio, calcolato sul valore approssimato 10, ne dista di circa 0.25 volta.

Nel gruppo dell'ossigeno si conoscono due potenziali di ionizzazione, ambedue spettroscopici, relativi uno all'ossigeno e l'altro allo zolfo.

N.	Elemento	V	N.	Elem. fondam.	V	ΔV
8	O	13.56	5	B	8.00	5.53
16	S	10.31	13	Al	5.96	4.35

I ΔV che se ne ricavano sono il doppio delle ordinate corrispondenti alle ascisse 8 e 16 della curva 1, a meno di 0.1 volta.

Nel gruppo dell'azoto si conosce un solo potenziale spettroscopico, quello dell'azoto ⁽²⁾ ed i potenziali fisici del fosforo ⁽³⁾ e del bismuto ⁽⁴⁾.

N.	Elemento	V	N.	Elem. fondam.	V	ΔV
7	N	14.49	5	B	8.00	6.46
15	P	10.3	13	Al	5.96	4.36
83	Bi	8 —	81	Tl	6.08	1.92

Il ΔV calcolato per l'azoto è il doppio dell'ordinata corrispondente alla ascissa 7 della curva 1. Il ΔV relativo al fosforo dista dalla curva 2, ottenuta per raddoppiamento delle ordinate della 1, di qualche centesimo di

(1) Vedi K. T. COMPTON e F. L. MOHLER, loc. cit.

(2) R. A. MILLIKAN e I. S. BOWEN, loc. cit.

(3) O. S. DUFFENDACH e H. HUTH STEINER, « Phys. Rev. » (2), 25, 501-8, 1925.

(4) Vedi COMPTON MOHLER, loc. cit.

volta, quello relativo al bismuto di 0,3 volta circa. Data l'approssimazione dei potenziali ottenuti con metodi fisici, l'accordo, anche per questo elemento è da considerarsi soddisfacente.

Veramente notevole è il fatto che i due gruppi dell'ossigeno e dell'azoto seguano la stessa legge, rappresentata dalla curva 2.

In tal modo è stato trovato con quale legge varia il potenziale di ionizzazione al crescere del numero degli elettroni in una stessa orbita. La legge con la quale varia il potenziale, in funzione del numero atomico, è data dalla curva 1 nel caso degli elementi che hanno due elettroni sull'orbita esterna s . Si ottengono le leggi per gli altri gruppi di elementi moltiplicando le ordinate della curva 1 per

- 1 nel caso degli elementi tetraivalenti (gruppo del C);
- 2 nel caso degli elementi penta ed esavalenti (gruppi del N e del O);
- 3 nel caso degli alogeni;
- 5 nel caso dei gas nobili.

Poichè tutti i potenziali di ionizzazione degli elementi fondamentali sono ben noti (eccetto quello dell'elemento 87), è possibile con questo metodo determinare con grande esattezza tutti i potenziali degli elementi omologhi.

Non è possibile estendere lo studio delle relazioni esistenti fra gli elementi omologhi, agli omologhi che si trovano solo nei grandi periodi, per mancanza di dati sperimentali.

Chimica-fisica. — *Analisi coi raggi X e struttura cristallina delle leghe cadmio-argento.* Nota di G. NATTA e M. FRERI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica-fisica. — *Relazioni fra i potenziali di ionizzazione di primo e di secondo ordine degli elementi omologhi.* Nota di E. PICCARDI, presentata dal Socio Corrisp. L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *La struttura del clorato d'argento.* Nota ⁽¹⁾ di A. FERRARI e C. G. FONTANA, presentata dal Socio G. BRUNI ⁽²⁾.

Il clorato d'argento è già stato studiato dai cristallografi e riconosciuto tetragonale con un rapporto assiale 0.9325, cioè poco diverso dall'unità ⁽³⁾. Si poteva ritenere quindi che il suo reticolo fosse una leggera deformazione di quello del clorato sodico, notoriamente cubico e studiato con i raggi X ⁽⁴⁾. D'altra parte, se così fosse stato, restava non spiegato il noto dimorfismo del sistema clorato d'argento-clorato di sodio ⁽⁵⁾.

I lavori röntgenografici sull'isomorfismo e isodimorfismo, iniziati da Végard e dei quali uno di noi si occupa da tempo ⁽⁶⁾, hanno dimostrata la grande influenza del reticolo cristallino nella formazione di soluzioni solide e, poichè è nota l'analogia chimica fra i composti d'argento e quelli di sodio, era prevedibile, per giustificare l'intervallo di miscibilità, una profonda diversità nella struttura delle due sostanze.

Abbiamo perciò intrapreso lo studio del reticolo del clorato d'argento per verificare l'esattezza di quest'ultima ipotesi. Il clorato d'argento si ottiene facilmente in cristalli ben formati evaporando lentamente le sue soluzioni acquose; i cristalli che si ottengono così, presentano la forma di prismi terminati da due piramidi. Il prisma è costituito dalla combinazione delle forme (100) e (110) e queste sono costantemente le più sviluppate del cristallo. I cristalli non presentano alcuna anomalia ottica, che avrebbe potuto far pensare ad un reticolo rombico pseudotetragonale; il prof. Zambonini ha verificato ciò (comunicazione privata) sugli stessi cristalli da noi usati per l'esame röntgenografico ed ha in corso un più completo esame di essi dal punto di vista cristallografico.

Abbiamo eseguito i fotogrammi con il metodo del cristallo rotante secondo due faccie adiacenti, usando una radiazione X prodotta da un an-ticatódo di ferro ($\lambda_{\alpha} = 1.9344 \text{ \AA}$; $\lambda_{\beta} = 1.7530 \text{ \AA}$).

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale nel R. Politecnico di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 24 ottobre 1927.

(3) GROTH, « Chem. Krystall » Lipsia 1908. II, p. 88.

(4) N. H. KOLMEYER, J. M. BIJVOET, A. KARSEN « Proc. Roy. Acad. Amsterdam », 23 (1920) 644; R. G. DICKINSON, E. A. GOODHUE, « Journ. Amer. Chem. Soc. », 43 (1921) 2045. L. VEGARD, « Zeitsch. f. Phys », 12 (1922) 289, WULF, « Zeitsch. f. Kristall. », 57 1922 190.

(5) RETGERS « Z. f. phys. Chem. », 5 (1890), 440. « Ausz. Z. f. Kristall. », 19, 628; FOOTE, « Amer. Chem. J. », 27 (1902), 345.

(6) « Rend. Lincei », II, 6°, p. 467₂(1925); IV, 6°, p. 10 (1926).

I risultati ottenuti sono qui riportati.

TABELLA I.

N.	$\Theta/2$	intens.	sen $\Theta'/2^{(1)}$	k	d	$h_1 h_2 h_3$	a
1	24.2	m	0.4100	β	2.137	400	8.55
2	27.0	f	0.4540	α	2.130	400	8.52
3	30.6	d	0.5095	α	1.900	420	8.52
4	35.4	dd	0.5755	α	1.685	500 340	8.42
5	41.0	dd	0.6560	β	1.336	620	8.46
6	43.0	md	0.6820	α	1.417	600	8.51
7	46.0	mf	0.7200	α	1.342	620	8.49
8	49.0	mf	0.7550	β	1.161	640	8.39
9	56.2	m	0.8310	α	1.164	640	8.40
10	59.0	dd	0.8575	β	1.025	820	8.46
11	66.2	m	0.9150	α	1.057	800	8.46
12	71.0	mf	0.9640	α	1.022	820	8.43
13	76.5	m	0.9724	α	0.994	660	8.43

TABELLA II.

N.	Θ	intens.	sen $\Theta'/2$	k	d	$h_1 h_2 h_3$	a
1	54.4	m	0.4571	β	1.9175	420	8.57
2	61.0	f	0.5075	α	1.9057	420	8.52
3	81.0	d	0.6494	β	1.3496	620	8.53
4	91.5	m	0.7163	α	1.3503	620	8.54
5	110.5	m	0.8217	α	1.1771	640	8.49
6	132.5	mf	0.9153	α	1.0568	800	8.45
7	140.9	mf	0.9441	α	1.0245	820	8.45

(1) In questa tabella come nella successiva gli angoli Θ sono stati corretti mediante la formola di Pauli:

$$\Theta' = \Theta - \frac{r}{2} (1 + \cos \Theta)$$

dove Θ è l'angolo misurato Θ' quello corretto ed r il raggio del cilindretto impiegato come preparato.

Dalla tabella I, trascurando il primo valore, si ha per a una media di 8.46 \AA con l'approssimazione di $\pm 0.06 \text{ \AA}$; dalla II tabella si ha invece il valore $a = 8.51 \pm 0.06 \text{ \AA}$; complessivamente il valor medio di a che ne risulta è 8.48 \AA .

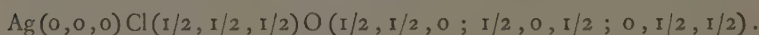
Considerando esatto il valore del rapporto assiale dato dai cristallografi in $c/a = 0.9325$, valore che venne confermato per altra via nel corso di questo lavoro, possiamo calcolare la densità:

$$\frac{191.337 \times 1.66 \times 10^{-24} \text{ gr} \times 8}{8.48^3 \times 0.9325 \times 10^{-24} \text{ cm}^3} = 4.46$$

La densità ricavata con i metodi usuali è $4.44^{(1)}$. Come si vede, lo scostamento dal valore ricavato dai dati röntgenografici è piccolissimo.

Il fotogramma secondo v. Laue e la relativa proiezione ci hanno dato un rapporto assiale perfettamente coincidente con quello già noto, come venne già detto; il fotogramma di Debye è invece molto debole, sicchè non riportiamo qui i dati da esso ricavati, benchè i risultati ottenuti concordino con quelli dei cristalli rotanti.

Per quello che riguarda la struttura di questa sostanza, sembra dimostrato trattarsi di un tipo di reticolo già riscontrata in parecchie altre sostanze del tipo M e RX_3 (perowskite, ecc.). Diamo qui le coordinate degli atomi nella cella ridotta, per semplicità, a contenere una sola molecola:



Notiamo che la cella raddoppiata, contenente cioè otto molecole, è necessaria per l'ordinamento completo del fotogramma e, d'altra parte il calcolo dei λ nel fotogramma di v. Laue ce lo ha confermato.

Abbiamo ancora in corso lo studio approfondito della struttura in base al confronto fra le intensità delle linee calcolate e quelle trovate col microfotometro.

Resta in ogni modo intanto da quanto sopra dimostrato che il reticolo cristallino del clorato d'argento è di tipo completamente diverso da quello del clorato sodico.

Riassumendo:

Il reticolo del clorato d'argento presenta una cella tetragonale le cui dimensioni sono $a = 8.48 \text{ \AA}$ e $c = 7.91 \text{ \AA}$. In questa cella sono contenute 8 molecole.

(1) GROTH, loc. cit.

Chimica biologica. — *Sulla composizione chimica di alcuni generi alimentari.* Nota di L. SETTIMJ⁽¹⁾, pres.⁽²⁾ dal Socio Corr. S. BAGLIONI.

La conoscenza della costituzione chimica dei prodotti che formano parte dei comuni alimenti del popolo italiano, ha fondamentale importanza per giudicare delle proprietà fisiologiche ed economiche delle diverse derrate, come per calcolare il valore nutritivo ed energetico del regime alimentare di cui entrano a far parte.

In diversi trattati (König, Villavecchia) si trovano raccolti dati analitici segnalati dai vari autori, ma tali dati non sono sempre comparabili perchè i generi alimentari presi in esame sono di diversi paesi (Germania, Francia, Inghilterra, Nordamerica, ecc.), come pure talora non sono completi per giudicare sul valore nutritivo ed energetico dell'alimento.

Si espongono nella presente Nota i dati analitici ottenuti dall'esame di svariati prodotti alimentari nazionali; essi non sono privi di interesse scientifico sia perchè si riferiscono a prodotti di cui difettano analisi precedenti, sia perchè i risultati ottenuti differiscono da quelli registrati.

I generi alimentari analizzati sono:

1. Carne conservata in scatole, tipo militare, fabbricata in diversi anni ed analizzata in diverse annate. — 2. Carne bovina fresca magra. — 3. Formaggio pecorino romano. — 4. Baccalà secco. — 5. Prosciutto magro di maiale. — 6. Funghi secchi porcini (*Boletus edulis* Bull.).

I metodi di ricerca chimica da noi usati sono, per la massima parte, quelli dettati dai più moderni trattati⁽³⁾.

Per la determinazione delle sostanze azotate (proteine) solubili si è seguito il metodo già in uso⁽⁴⁾, e per la determinazione dell'azoto aminico il metodo Sørensen.

Tra i vari risultati esposti merita speciale rilievo il fatto che la quantità delle sostanze azotate solubili va aumentando sensibilmente col progredire del tempo di conservazione del genere alimentare, in conferma di quanto precedentemente fu pubblicato⁽⁵⁾.

Inoltre merita essere rilevato il comportamento dell'azoto aminico, il quale per le carni conservate rappresenta una tenue proporzione dell'azoto delle sostanze azotate solubili, nel formaggio ne rappresenta invece il 50 %, nel baccalà il 70 % e nel prosciutto di maiale e nei funghi secchi circa il 95 %.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia Umana della Regia Università di Roma, per consiglio e sotto la guida del prof. S. Baglioni.

(2) Nella seduta del 6 novembre 1927.

(3) Prof. D. G. VITTORIO VILLAVECCHIA, *Trattato di chimica analitica applicata*, 1924; S. BAGLIONI e L. SETTIMJ, *Guida all'analisi chimica applicata alla fisiologia normale e patologica*, Milano, 1928, Anno VI.

(4) e (5) L. SETTIMJ, *Sulla trasformazione dei composti azotati (proteine) nei generi alimentari conservati*. « Rend. Acc. Lincei », 1925, p. 396.

TABELLA I.

Carne conservata in scatolette tipo militare e carne bovina fresca magra.

SOSTANZA Anno e mese di fabbricazione	Data di analisi	Acqua	Residuo secco	Azoto totale	Azoto solubile	Azoto insolubile	Azoto amminico	Sostanze azotate totali	Proteine		Grassi	Acidità in Acido lattico	Generi	Sostanze azotate solubili per 100 gr. di sostanza azotata totale	Carboidrati
									Solubili	Insolubili					
Carne conservata (IV-1915)	VI-1917	62.00	38.00	5.20 13.68	0.854 2.247	4.346 11.433	0.077 0.23	32.50 85.52	5.33 14.04	27.17 71.48	2.00 5.26	0.60 1.57	1.70 4.47	— 16.41	1.20 3.18
Carne conservata (V-1915)	VI-1917	64.00	36.00	4.24 11.77	1.02 2.83	3.22 8.94	0.056 0.155	26.50 73.56	6.37 17.68	20.13 55.88	4.90 13.61	0.65 1.80	2.80 7.77	— 24.09	1.15 3.06
Carne conservata (VI-1915)	VI-1917	61.65	38.35	4.34 11.31	0.84 2.19	3.50 9.12	0.084 0.219	27.12 70.72	5.25 13.69	21.87 57.03	6.64 17.30	0.54 1.48	2.80 7.30	— 19.36	1.25 3.20
Carne conservata (V-1915)	II-1923	61.00	39.00	4.80 12.30	1.60 4.10	3.20 8.20	0.15 0.375	30.00 76.85	10.00 23.60	20.00 51.25	3.50 9.00	0.20 0.51	3.95 10.13	— 33.10	1.35 3.51
Carne conservata (VI-1916)	II-1923	62.50	37.50	4.50 12.00	1.40 3.70	3.10 8.30	0.12 0.336	28.10 75.00	8.75 23.10	19.35 51.90	4.40 11.70	0.18 0.48	3.30 8.80	— 30.80	1.52 4.65
Carne conservata (1919)	II-1923	60.00	40.00	4.95 12.35	1.30 3.25	3.65 9.10	0.113 0.282	30.90 77.25	8.10 20.25	22.80 57.00	3.70 9.25	0.22 0.55	3.85 9.60	— 26.20	1.35 3.35
Carne bovina fresca magra (Media di 10 differenti campioni).	1918	72.65	27.35	3.68 13.45	0.70 2.55	2.98 10.89	0.14 0.511	23.00 84.09	4.375 15.94	18.625 68.15	1.45 5.33	0.70 2.55	1.00 3.65	— 18.95	1.20 4.38

TABELLA II.

Formaggio pecorino romano.

SOSTANZA	Data di analisi	Acqua	Residuo secco	Azoto totale	Azoto solubile	Azoto insolubile	Azoto amilico	Sostanze azotate totali	Proteine		Grassi	Acidità in acido lattico	Generi essenti del cloruro di sodio	Cloruro di sodio	Sostanza azotata solubile per 100 gr. di sostanza azotata totale	Carboidrati
									So- lubili	Inso- lubili						
Formaggio pecorino romano	V-17	27,20	72,80	4,35	0,77	3,58	0,33	27,11	4,81	22,37	26,60	2,00	3,90	6,70	—	6,40
»	»	31,00	69,00	3,90	1,057	4,913	0,453	37,35	6,61	30,74	36,40	2,75	5,357	9,20	17,68	—
»	»	27,30	72,70	4,20	0,99	3,21	0,30	26,25	7,25	17,12	28,20	2,00	3,40	6,80	—	4,23
»	»	27,20	72,80	4,81	1,36	4,41	0,41	36,06	10,51	24,73	40,87	2,89	4,92	9,85	29,79	—
»	»	27,50	72,50	4,88	1,10	3,78	0,50	30,50	6,18	20,07	31,60	2,20	2,60	6,00	—	5,05
»	»	30,80	69,20	4,60	1,25	3,35	0,61	28,75	8,49	27,57	43,47	3,02	3,57	8,25	23,51	—
»	»	20,60	73,40	5,14	0,98	4,16	0,47	32,10	6,12	23,63	26,30	2,16	3,40	6,00	—	4,88
»	»	20,60	73,40	7,00	1,33	5,66	0,64	43,75	8,40	32,91	36,12	2,96	4,69	8,24	20,39	—
»	»	27,50	72,50	4,88	1,10	3,78	0,50	30,50	6,87	23,63	25,00	2,00	2,70	6,50	—	5,80
»	»	30,80	69,20	4,60	1,25	3,35	0,61	28,75	9,43	33,64	34,48	2,80	3,72	8,96	23,42	—
»	»	20,60	73,40	5,14	0,98	4,16	0,47	32,10	7,81	20,94	24,70	1,89	3,10	8,50	—	4,70
»	»	20,60	73,40	7,00	1,33	5,66	0,64	43,75	11,20	30,31	35,68	2,73	4,48	12,28	26,98	—
»	»	20,60	73,40	5,14	0,98	4,16	0,47	32,10	6,12	25,98	25,70	2,00	3,00	6,00	—	4,60
»	»	20,60	73,40	7,00	1,33	5,66	0,64	43,75	8,31	35,44	34,21	2,72	4,08	8,17	17,55	—

TABELLA III.

Baccalà secco, prosciutto magro, funghi porcini secchi.

SOSTANZA	Data di analisi	Acqua	Residuo secco	Azoto totale	Azoto solubile	Azoto Insolubile	Azoto amminico	Sostanze azotate totali	Proteine		Grassi	Cellulosa	Ceneri esenti da cloruro di sodio	Cloruro di sodio	Sostanza azotata solubile per 100 gr. di sostanza azotata totale	Carboidrati
									So- lubili	Inso- lubili						
Baccalà secco (Media di 10 cam- pioni).	1918	45.65	54.35 100.00	6.00 11.04	1.67 3.074	4.33 7.966	1.20 2.208	37.50 69.00	10.43 19.21	27.07 49.78	0.60 1.104	—	0.52 0.956	15.40 28.33	— 27.84	0.35 —
Prosciutto magro (Media di 6 cam- pioni).	1918	48.90	51.10 100.00	4.30 8.41	1.40 2.73	2.90 5.67	1.34 2.61	26.87 52.59	8.75 17.12	18.12 35.47	10.00 19.57	—	1.00 1.95	11.20 21.91	— 32.55	2.03 —
Funghi secchi (porcini) (Media di 3 raccolti diversi).	1918	18.90	81.10 100.00	4.256 5.23	1.48 1.82	2.776 3.41	1.40 1.72	26.60 32.79	10.30 12.70	16.30 20.09	0.90 1.10	6.80 8.38	5.26 6.59	— —	— 38.73	41.54 —

Chimica agraria. — *L'influenza del perfosfato sulla reazione del terreno* ⁽¹⁾. Nota preliminare del dott. C. ANTONIANI, presentata ⁽²⁾ dal Socio A. MENOZZI.

La reazione del terreno ed il suo grado di produttività, sono, come è noto, legate da stretti rapporti; deriva da questi l'importanza di conoscere quali possano essere le cause atte a mutare la reazione del suolo.

Oggidi è particolarmente dibattuta la questione se un fertilizzante di uso comune, il perfosfato, debba o meno considerarsi come fattore acidificante del terreno. Trattandosi di argomento di particolare importanza, si sono iniziate e proseguono tuttora presso questo Laboratorio, sotto la direzione del prof. Menozzi, delle ricerche miranti a recare un contributo sperimentale all'interessante problema.

Il perfosfato è, come è noto, costituito da una miscela di fosfato monocalcico e di solfato di calcio, con quantità ordinariamente lievi di fosfato bicalcico e tricalcico e di altri composti. Nell'insieme, per effetto dell'acidità stechiometrica del suo costituente essenziale, cioè del fosfato di calcio primario, solubile, esso presenta quindi reazione nettamente acida e per tale ragione si è *a priori* propensi a credere che la sua continua somministrazione al terreno ne possa influenzare la reazione e di conseguenza il grado di produttività.

Giova peraltro premettere che dal punto di vista chimico agrario per quanto concerne i mutamenti di reazione a cui può dar luogo in un terreno di normale costituzione, il perfosfato deve considerarsi tra quei composti che noi indichiamo come fisiologicamente alcalini. L'anione fosforico è infatti utilizzato dalla pianta in maggior copia del catione calcio, per cui quest'ultimo non tarda a prevalere sul primo, determinando per tal modo nel terreno il passaggio da un composto iniziale a reazione acida ad un altro a reazione alcalina.

L'alcalinità fisiologica del perfosfato è però legata alla presenza di vegetazione, condizione solo raramente soddisfatta dalla pratica perchè abitualmente il perfosfato viene somministrato al terreno in autunno, cioè a suolo nudo. Mancando in tali condizioni l'indiretto concorso dell'attività fisiologica della pianta, potrebbe determinarsi nel terreno un ristagno, per così dire,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agrario di Milano. Giugno 1927.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1927.

di acidità, ristagno tanto più deleterio se si tien conto che appunto nella fase delicata della germinazione l'organismo vegetale è particolarmente sensibile alla reazione del mezzo.

Vi sarebbero tuttavia altri fatti, che ricerche recentemente compiute sembrano confermare, i quali si oppongono ad attribuire al perfosfato azione acidificante.

Da un lato è il potere cuscinetto del terreno, la proprietà cioè di taluni costituenti del suolo aventi carattere colloidale, di assorbire joni idrogeno o joni ossidrilici (a secondo del segno elettrico del colloide) per tal modo opponendosi ai bruschi cambiamenti di acidità.

D'altro lato sono le trasformazioni chimiche a cui soggiace nel terreno il fosfato monocalcico, che non tarda a passare sotto forma di combinazione insolubile.

La rapidità del processo di acidificazione, anche a prescindere dall'influenza della vegetazione, sarebbe pertanto strettamente legata al contenuto in colloidali del terreno ed altresì al suo contenuto in composti suscettibili di fissare l'acido fosforico in combinazioni insolubili. Praticamente, tenuto conto anche dell'interferire di processi di ordine opposto, non avrebbe quindi che valore assai limitato.

Nel piano di esperienze che questo Laboratorio si è proposto, si è creduto opportuno far precedere la parte sperimentale da compiersi in campo, ora in corso di attuazione, da alcune ricerche di laboratorio, e precisamente è parso interessante studiare il lato del problema testè accennato. Quale sia cioè il grado di resistenza che il terreno presenta di fronte all'azione acidificante del perfosfato in dipendenza delle due succitate caratteristiche sue peculiari: potere cuscinetto da un lato e saturazione chimica cioè insolubilizzazione del costituente acido dall'altro, ciò al di fuori di ogni influenza della vegetazione.

L'interesse che a questo riguardo offrono i terreni normalmente provvisti di calcare e pertanto dotati, in linea generale, di reazione alcalina, non è che assai limitato. In tali terreni il costituente alcalino è il primo e più efficace regolatore della reazione e sino alla completa saturazione di tale costituente la reazione è *a fortiori* contenuta entro i limiti che sono propri del grado di dissociazione del costituente alcalino stesso, tutt'al più influenzati dall'acido carbonico che si svolge nel graduale processo di saturazione. Ma un interesse ben più grande offrono quei terreni che per essere privi di carbonati e dotati di reazione neutra o già decisamente acida sono da considerarsi come i meno protetti dalle azioni acidificanti in genere. È su questa categoria di terreni pertanto che soprattutto deve essere portata l'indagine sperimentale.

I risultati riportati in questa nota riguardano una prima serie di esperienze compiute su terreni privi di calcare, aventi reazione neutra o pressochè neutra.

Tali esperienze mirarono particolarmente a stabilire:

1° se nei terreni neutri, privi di calcare, per aggiunte di perfosfato in quantità poco discoste da quelle adottate nelle ordinarie concimazioni possano manifestarsi variazioni sensibili nel grado di acidità.

2° quali siano i limiti di resistenza di acidificazione offerti da tali terreni.

3° quale sia la rapidità colla quale nel loro insieme si compiono i processi di neutralizzazione dell'acidità del perfosfato.

PARTE SPERIMENTALE.

Per tutte le esperienze qui riferite si è fatto uso di un campione di perfosfato minerale della seguente composizione:

umidità	15.20 %
P ₂ O ₅ totale	16.10 %
acidità libera espressa come H ₃ PO ₄ .	3.40 %

Dell'acido fosforico totale il 24 % era sotto forma di fosfato monocalcico, l'uno per cento era legato come fosfato secondario e il due per cento come fosfato tricalcico.

I campioni di terreno esaminati erano tutti di origine alluvionale, provenienti dalla zona lombarda. All'analisi chimica di essi hanno contribuito i colleghi dott. Allan e dott. Parisi.

La determinazione del grado di acidità venne compiuta in ciascun caso per via colorimetrica facendo uso della serie di indicatori di Clark e Lüb.

INFLUENZA DEL PERFOSFATO, SOMMINISTRATO IN MISURA POCO DISCOSTA DALLA NORMALE, SULLA REAZIONE DEL TERRENO.

Determinate quantità di terreno vennero addizionate di quantità note di perfosfato e mantenute a contatto per tre mesi ad un grado di umidità pari a gr. 25 % di acqua. All'inizio ed alla fine dell'esperienza si procedette alla determinazione del valore di pH.

I risultati conseguiti sono raccolti nella unita tabella ed appare da essi come non sia rilevabile alcuna variazione nel grado di acidità per la somministrazione di quantità di perfosfato variabili da 6 a 12 quintali per ettaro.

I LIMITI DI RESISTENZA ALL'ACIDIFICAZIONE.

Le esperienze furono compiute su tre terreni appartenenti alla precedente serie, contrassegnati nella tabella coi nn. 1-3-6. In luogo della diretta somministrazione del perfosfato si fece qui uso della soluzione acquosa

di esso, racchiudentene tutti i costituenti acidi, ottenuta lisciviando con acqua un dato peso di perfosfato e portando la soluzione a volume noto. Tale soluzione aveva un grado di acidità espresso da $pH = 3$. Quantità via via crescenti di questa vennero aggiunte ad una determinata quantità di terreno racchiuso in matraccio da 250 cc. ogni volta completandosi il volume con

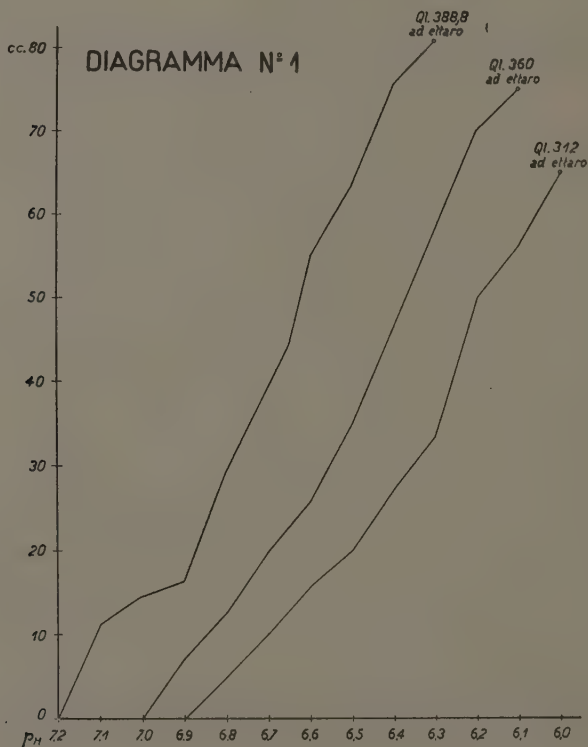


Fig. 1.

acqua distillata. Dopo una settimana di contatto si procedeva alla misura di pH .

I risultati ottenuti sono riportati nel diagramma n. 1. In esso figurano sull'asse delle ascisse i valori di pH riscontrati e sull'asse delle ordinate i centimetri cubici di soluzione aggiunti. Ai limiti estremi delle spezzate che traducono le variazioni di acidità, si è segnata la quantità di perfosfato, per ettaro di terreno, corrispondente alla soluzione addizionata, ammettendosi per un ettaro di terreno il peso medio di tre milioni di kg.

LA RAPIDITÀ DI SATURAZIONE DELL'ACIDITÀ DEL PERFOSFATO NEL TERRENO.

Furono oggetto di studio gli stessi tre terreni della serie precedente. Ciascuno di essi, in allunga di vetro, venne sottoposto all'azione della soluzione acquosa di perfosfato, percolante nel terreno a velocità uniforme, regolata mediante dispositivo di aspirazione. Sul filtrato si procedeva ad opportuni intervalli alla misura del grado di acidità.

La rapidità di saturazione dei tre terreni sperimentati risultò pressochè uguale date le analogie di composizione che i terreni stessi presentavano.

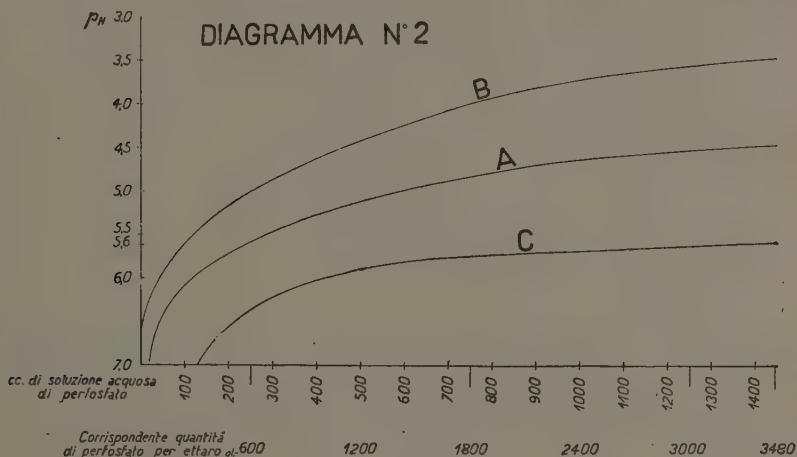


Fig. 2.

Volendosi stabilire quale parte abbiano nel processo di saturazione le caratteristiche fisico-chimiche del terreno e particolarmente il grado di finezza dei suoi costituenti, si sono eseguite parallelamente due prove su due frazioni di terreno separate mediante levigazione da un unico campione originario. Le differenze riscontrate sono notevoli come si può dedurre dall'esame del diagramma n. 2. In esso la curva B rappresenta il processo di saturazione dei costituenti grossolani (particelle con velocità di caduta superiore a mm. 0.2 per secondo), la curva C esprime invece il processo di saturazione quale decorre in presenza dei costituenti più fini (velocità di caduta inferiore a mm. 0.2 per secondo).

La curva A rappresenta l'andamento medio del processo di saturazione riscontrato nei tre terreni presi in esame.

Dalle esperienze compiute non si può evidentemente trarre alcuna conclusione definitiva. Ciò soprattutto per l'esiguo numero di terreni esaminati

che non consente di generalizzare i risultati ottenuti e tenuto conto anche che le esperienze stesse, dovendo più che altro servire di orientamento prima di iniziare un piano organico di lavoro, furono condotte in condizioni troppo discoste da quelle che praticamente si verificano nel terreno.

Ma si è ugualmente ritenuto opportuno riferire i risultati conseguiti nella convinzione che pure da essi e nonostante il loro valore parziale, potesse discendere qualche insegnamento.

Per quanto concerne l'ordine delle variazioni nel grado di acidità a cui il perfosfato può dar luogo nel terreno, risulta dalle esperienze compiute, del resto in armonia con quanto già era dato *a priori* supporre, che esse si traducono in un processo graduale di acidificazione.

L'azione alcalinizzante del perfosfato constatata da alcuni ricercatori sarebbe pertanto legata all'influenza della vegetazione o dipendente da altri fattori, mentre di per sé il terreno per il suo comportamento chimico e fisico-chimico non potrebbe che opporre un'azione passiva di resistenza in conseguenza della quale il processo di acidificazione potrà, come si comprende, essere rallentato tanto da rendersi praticamente inapprezzabile ma non mai invertito.

Le esperienze compiute dimostrano peraltro che anche prescindendo dalla azione indiretta della vegetazione e per gli stessi *terreni neutri e privi di calcare* non appare giustificato attribuire al perfosfato una sensibile azione acidificante.

Tali terreni, pur trovandosi evidentemente in condizioni di sfavore rispetto a quelli normalmente provvisti di carbonati, posseggono un grado assai elevato di resistenza all'acidificazione e la quantità di perfosfato che si richiede per modificare sensibilmente la loro reazione, senza peraltro portarla a gradi di acidità temibili, corrisponde sicuramente a numerose decine di anni di continuata somministrazione. Ciò a prescindere da ogni altra azione di diversa indole e di opposto ordine che potrebbe rallentare ancor più e forse anche inibire od invertire il processo di acidificazione.

Analogamente non pare temibile la possibilità che negli stessi terreni neutri si determinino ristagni anche transitori di acidità immediatamente dopo la somministrazione del fertilizzante e ciò in conseguenza della eventuale lentezza di decorso del processo di saturazione. È intuitivo come a tale riguardo l'umidità del suolo sia il fattore dominante; peraltro la rapidità colla quale il processo di saturazione mostra di compiersi è assai grande, tale, in ogni caso, da non permettere alcun accumulo di acidità.

Dalle esperienze compiute emerge anche l'utilità di proseguire cogli stessi criteri l'indagine iniziata, estendendola al maggior numero possibile di terreni e soprattutto ai terreni neutri ed a quelli che già sono inoltrati sulla via dell'acidificazione.

Sarebbe certamente di somma utilità il poter conoscere per ogni terreno il grado di resistenza che esso può offrire a tutti quegli agenti in genere che tendono ad allontanarlo dalla reazione media oggi ritenuta come la più atta a conservare al suolo la sua fertilità.

TABELLA I.

Quantità di terreno impiegata gr. 100.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	l
1	19.4	41.6	—	780	220	7.0	7.0	0.02	6
2	26.2	33.9	—	801	199	7.0	7.0	0.03	9
3	33.0	28.8	—	740	260	7.2	7.2	0.02	6
4	19.0	29.0	—	695	305	7.2	7.4	0.03	9
5	17.5	40.5	—	844	156	7.4	7.4	0.04	12
6	24.2	51.0	—	816	184	6.9	6.9	0.02	6
7	29.4	46.9	—	800	200	6.6	6.6	0.02	6
8	31.0	40.0	—	850	150	6.7	6.7	0.04	12
9	39.6	37.1	—	819	181	6.8	6.8	0.03	9
10	26.6	32.8	—	768	232	6.8	6.8	0.04	12
11	24.7	71.6	—	804	196	7.2	7.2	0.04	12
12	24.0	24.0	—	766	234	6.4	6.4	0.02	6
13	22.2	45.6	—	793	207	7.0	7.0	0.04	12
14	14.5	39.8	—	656	344	6.6	6.6	0.04	12
15	31.1	33.2	—	708	292	6.8	6.8	0.04	12
16	51.0	66.4	—	791	209	7.0	7.0	0.04	12
17	17.7	52.5	—	615	355	7.0	7.2	0.04	12
18	26.6	46.5	—	803	197	6.8	6.8	0.04	12
19	24.8	37.9	—	819	181	6.8	6.8	0.04	12
20	32.3	32.0	—	776	224	7.0	7.0	0.04	12
21	26.1	28.1	—	697	803	7.2	7.2	0.04	12
22	20.9	27.1	—	724	276	7.2	7.2	0.04	12

a = numero del campione.

b = umidità %.

c = sostanza organica %.

d = calcare %.

e = sabbia %.

f = argilla %.

g = p_H iniziale.

h = p_H finale.

i = grammi di perfosfato aggiunto.

l = quintali di perfosfato per ettaro.

BIBLIOGRAFIA

U. PRATOLONGO, *Studi e ricerche sulla reazione del terreno*. Vol. XVI « Annuario Istituzione Agraria Andrea Ponti », 1923.

U. PRATOLONGO, *Studi e ricerche ulteriori sulla reazione del terreno*. U. Hoepli, 1926.

ANONIMO, *Value of superphosphate for acid soils* (in « Chemical Abstracts », vol. 21, n. 13, giugno 1927).

KAPPEN, *Soil acidity and phosphoric acid fertilisation—With special reference to superphosphate* (idem, vol. 21, n. 10, maggio 1927).

J. F. BREAZEALE, and P. S. BURGESS, *The availability of phosphates in calcareous or alkaline soils* (idem, vol. 21, n. 7, aprile 1927).

L. D. BAVER, *Factors affecting the Hydrogen-ion concentration of soils*. « Soil Science », vol. XXIII, n. 5).

Cristallografia. — *Elementi di simmetria indipendenti di 1^a e di 2^a specie.* Nota ⁽¹⁾ di U. PANICHI, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Pensiamo gli assi di simmetria (girici) e i piani di simmetria come operatori di 1^a specie; gli assi giroidici e il centro d'inversione come operatori di 2^a specie. Vogliamo esaminare la parte che hanno le due specie di operatori fra gli elementi indipendenti di ogni classe.

Gli elementi indipendenti possono spesso essere scelti in più modi. Supponiamo da prima di voler dare la preferenza agli assi girici, escludendo, fin dove è possibile, i giroidici, e quindi anche il centro d'inversione essendo $C = A_{1(2)}$. Così ad es. nella classe prismatica (A_2 , P, C) possiamo scegliere in tre modi una coppia di elementi indipendenti; ma, per la supposizione precedente, preferiamo ora assumere come indipendente la coppia A_2 P.

Delle 11 classi centriche, 9 permettono di escludere il centro dagli elementi indipendenti; invece nella classe pinacoidale, esistendo il centro come unico elemento, esso è evidentemente indipendente; e nella classe romboedrica la coesistenza di un A_3 e del centro corrisponde ad un asse giroide di ordine più elevato, cioè un $A_{3(6)}$. Fra le 16 classi dotate di elementi di 2^a specie, osserviamo che, oltre alle 2 classi pinacoidale e romboedrica ora ricordate, un'altra sola, e cioè la bisfenoidale tetragonale, caratterizzata dall' $A_{2(4)}$, ha di necessità tale elemento come indipendente. Nelle altre 13 classi gli elementi di 2^a specie possono essere pensati come derivati da quelli coesistenti di 1^a specie. Queste 13, con le 16 prive di elementi di 2^a specie, danno dunque 29 classi nelle quali sono considerabili come elementi indipendenti tutti e soli elementi di 1^a specie. Troviamo infatti, in virtù dei noti teoremi sulle simmetrie, il risultato seguente:

Classe 1 — (pediale)	—	» 11 — (pir. tetrag.)	A_4
» 3 — (domatica)	P	» 12 — (bipir. tetrag.)	$A_4 P$
» 4 — (sfenoidale)	A_2	» 13 — (piram. ditetr.)	$A_4 P'$
» 5 — (prismatica)	$A_2 P$	» 14 — (trapez. tetr.)	$A_4 A_2$
» 6 — (piram. rombica)	$A_2 P'$	» 15 — (bipir. ditetr.)	$A_4 A_2 P =$ $= A_4 A_2 P'$
» 7 — (bisfen. »)	$2 A_2$	» 16 — (piram. trig.)	A_3
» 8 — (bipir. »)	$2 A_2 P$	» 17 — (bipir. »)	$A_3 P$
» 10 — (scalen. tetrag.)	$2 A_2 P'$		

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1927.

Classe 18 - (piram. ditrig.)	$A_3 P'$	»	27 - (bipir. dies.)	$A_6 A_2 P =$
» 19 - (trap. trig.)	$A_3 A_2$			$= A_6 A_2 P'$
» 20 - (bipir. ditrig.)	$A_3 A_2 P$	»	28 - (pentag. tetraed.)	$2 A_3$
» 22 - (scal. »)	$A_3 A_2 P'$	»	29 - (diacisd.)	$2 A_3 P$
» 23 - (pir. esag.)	A_6	»	30 - (esacist.)	$2 A_3 P'$
» 24 - (bipir. esag.)	$A_6 P$	»	31 - (icos. pentag.)	$A_4 A_3$
» 25 - (pir. dies.)	$A_6 P'$	»	32 - (esacisott.)	$A_4 A_3 P =$
» 26 - (trapez. esag.)	$A_6 A_2$			$= A_4 A_3 P'$

P e P' indicano piani di simmetria diversamente orientati rispetto all'asse che si considera; così ad es. nella classe 5 il piano P è normale ad A_2 ; nella classe 6 il piano P' è parallelo ad A_2 ; in generale ciò vale anche per gli altri casi; solo nelle classi 10 e 29 il piano non è nè normale nè parallelo, ma normale al piano di 2 assi. La posizione del piano è riferita all'asse di ordine superiore.

Nell'elenco, naturalmente, mancano le 3 classi (2, 9, 21) che abbiamo già visto essere di tipo esclusivamente giroidico.

La semplicità delle correlazioni fra gli elementi indipendenti di 1^a specie risulta a colpo d'occhio dal quadro che segue:

I.

	—	A_2	$2 A_2$	A_4	$A_4 A_2$	A_3	$A_3 A_2$	A_6	$A_6 A_2$	$2 A_3$	$A_4 A_3$
—	1	4	7	11	14	16	19	23	26	28	31
P	3	5	8	12	15	17	20	24	27	29	32
P'	»	6	10	13	»	18	22	25	»	30	»

Sulla fronte del quadro sono assi girici e coppie di assi, che indicano 10 casi possibili (11 con quello della mancanza di assi), cui corrispondono altrettante classi. Da questi, per unione con P o con P', si hanno in tutto 33 casi. Mettendo ora i numeri d'ordine per colonna, si può constatare che essi coincidono coi numeri d'ordine già assegnati alle classi, purchè si tenga conto: 1°, che il caso del solo piano (classe 3^a) si ripete, essendo qui indifferente P o P'; 2°, che si trovano pure due volte consecutive le classi 15, 27 e 32 perchè (vedi elenco) esprimibili sia con P, sia con P'.

Sono in carattere grassetto i numeri delle classi ad elementi tutti di 1^a specie e che quindi *debbono* essere rappresentate da elementi indipendenti di 1^a specie; gli altri numeri corrispondono alle classi ad elementi misti di 1^a e 2^a specie e che quindi *possono* essere rappresentate, come qui è fatto, da soli elementi indipendenti di 1^a specie.

Volendo che sulla fronte orizzontale del quadro figurino solo assi e non coppie di assi, bisognerebbe allora portare sulla fronte verticale A_2 , P, A_2 P; e allora il quadro (invertendo le linee in colonne) risulterebbe analogo a quello pubblicato dal Rinne⁽¹⁾ e cioè alla sezione I (che egli chiama « Derivazione girica »), salvo che egli aggiunge ai detti elementi anche il centro, e indica i 5 casi (corrispondenti a: O elementi, C, A_2 , P, A_2 P) come « gradi » (pediale, pinacoidale, sfenoidale, domatico, prismatico), le cui forme di partenza egli chiama « primitive », perchè da esse si ottengono le altre, grado per grado, in funzione dei « ritmi », cioè dell'ordine degli assi (girici e giroidici).

Ma dal quadro della « Derivazione girica » restano escluse 4 classi, che l'A. riunisce nella sezione II come « Derivazione giroidica »; sono quelle che io ho indicato coi numeri 17, 20, 9, 10. Vedremo la parte che queste classi hanno fra le 16 classi dotate di assi giroidici. Notiamo che alla « Derivazione giroidica » di Rinne appartarrebbe un maggior numero di classi, se l'A. non avesse incluso nella derivazione girica anche il grado pinacoidale.

Il modo girico e il modo giroidico corrispondono per una parte al mio quadro precedente (I) e per l'altra al quadro seguente (II), che riguarda le classi provviste di assi giroidici, i quali vengono ora pensati come indipendenti.

II.

	$A_1(2)$	$A_2(2)$	$A_2(4)$	$A_4(4)$	$A_3(3)$	$A_3(6)$	$A_6(6)$	$2A_3(6)$	$2A_2(4)$
—	2	5	9	12	17	21	24	29	30
P'	5	8	10	15	20	22	27	32	32

Anche nel quadro II la fronte orizzontale porta assi e coppie di assi; sulla verticale potrebbero anche qui figurare P e P'; ma il caso di P è inutile; infatti: quanto agli assi $A_1(2)$, $A_2(4)$ e $A_3(6)$ non si può pensare che il piano di riflessione (o, con Bravais, piano di simmetria alterna) divenga piano di simmetria (non alterna) senza che essi perdano la loro caratteristica di assi giroidici; e quanto agli assi $A_2(2)$, $A_3(3)$, $A_4(4)$, $A_6(6)$ il piano P è implicitamente incluso e legato all'esistenza di tali assi, i quali non sono, perciò appunto, tipicamente giroidici, poichè riconducibili al caso di assi di 1^a specie⁽²⁾.

(1) F. RINNE, *Kristallographische Formenlehre* etc. Leipzig 1922, p. 30 e « Zeit. f. Krist. », 1921, LVI, p. 408.

(2) Notiamo che le operazioni mediante assi giroidici possono pensarsi in due modi diversi:

1° data la forma con asse giroide, si opera su di essa una rotazione-specchiamento, che la riconduce in posizione di ricoprimento;

Tre solè classi (indicate in grassetto) sono di tipo esclusivamente giroidico, come già dissi. Le altre 13 sono di tipo misto, come mostra anche il quadro I; ma, mentre nel quadro I si trovano tutte 13 rappresentabili da soli elementi di 1^a specie, nel quadro II si osserva che solo 7 di esse (quelle della prima linea) possono esprimersi mediante soli elementi indipendenti giroidici; invece nelle altre 6 si deve aggiungere come elemento indipendente P' .

Ora notiamo che, oltre le classi 2, 9, 21, sono anche dotate di assi tipicamente di 2^a specie le classi 10 e 22, cioè le 2 scalenoedriche; lo sono poi anche le classi 29, 30, 32. Sono invece caratterizzate da assi $A_{n(n)}$ le classi 5, 8, 12, 15, 17, 20, 24, 27; ma queste classi, eccetto 2, sono caratterizzate anche dalla presenza del centro; mentre le 2 senza centro, cioè 17 e 20, restano solo caratterizzate da un $A_{3(3)}$ e quindi è solo formale la loro appartenenza al tipo giroidico.

Se si considera il concetto di asse giroidico in senso ristretto, cioè escludendo gli $A_{n(n)}$, vengono a sparire 4 delle 9 colonne del quadro II, restandovi solo quelle degli $A_{n(2n)}$; se invece accettiamo il senso largo, osserviamo che le classi della 2^a linea del quadro I si trovano tutte, eccetto la 3, nel quadro II e possono allora esser tolte dal quadro I. Si può così sopprimere la linea 2^a dell'I, giacchè la classe 3 è presente anche nella 3^a linea con egual funzione, come già notammo. La 3^a linea diviene 2^a.

Osserviamo che la 1^a linea dell'I corrisponde ai gradi pediale e sfenoidale di Rinne; la 1^a linea del II è principalmente costituita dal grado pinacoidale; alla 2^a linea appartengono, nell'I le classi del grado domatico, nell'I e nel II quelle del grado prismatico.

I quadri I e II possono ora fondersi in uno solo. Ciò si verifica nel seguente schema:

2° data la forma con asse giroide, si opera sopra una sua faccia (posizione 1) una prima rotazione-specchiamento, che conduce la faccia in posizione 2; ripetendo successivamente l'operazione, passando per le posizioni 3, 4... n , si trovano tutte le facce della forma, e con una ultima operazione si torna (ciclo chiuso) alla posizione 1. Qui l'asse è pensato come generatore della forma.

Si possono ora distinguere assi del tipo $A_{n(2n)}$, e del tipo $A_{n(n)}$. Per quelli del 1° tipo sono sempre eseguibili ambedue i modi di operazione; per quelli del 2° tipo le due operazioni sono possibili quando n è dispari; ma se n è pari è eseguibile solo la 1^a; invece la 2^a permetterebbe la generazione di solo metà delle facce della forma.

Noi qui penseremo l'asse giroide come legato alla 1^a operazione, che ha maggior comprensione.

In tale ipotesi possiamo ora rilevare che, mentre negli assi $A_{n(2n)}$ il piano di riflessione non è piano di simmetria, lo è invece negli $A_{n(n)}$. E quindi, mentre gli assi $A_{n(2n)}$ sono tipicamente giroidici, gli assi $A_{n(n)}$ lo sono solo formalmente. Ogni asse girico A_n se normale ad un piano di simmetria, diviene $A_{n(n)}$.

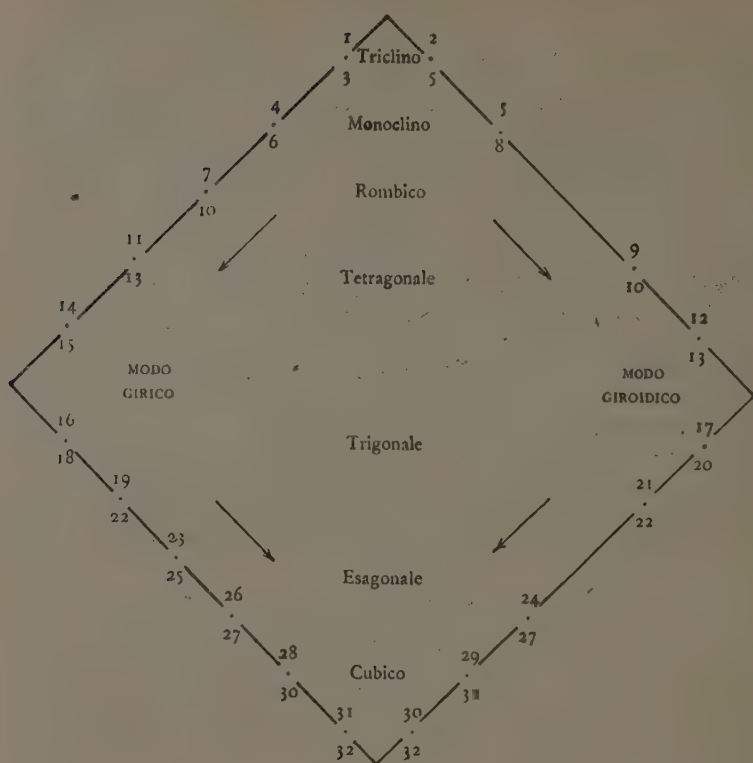


Fig. 1.

I due lati del quadrato a sinistra comprendono il modo girico; quelli a destra il modo giroidico. Su ogni lato le classi superiori sono quelle completamente caratterizzate da un asse (o coppia di assi); le inferiori quelle che, come elementi indipendenti richiedono, oltre l'asse, anche un piano.

I sistemi si susseguono regolarmente dall'alto al basso.

Biologia. — *Su alcune modificazioni del decorso della fermentazione alcoolica per effetto del campo elettromagnetico oscillante sul lievito* ⁽¹⁾. Nota II del dott. E. BENEDETTI, presentata ⁽²⁾ dal Socio E. GIACOMINI.

In una precedente nota ⁽³⁾ ho comunicato i primi risultati di una serie di esperienze eseguite con lo scopo di vedere se un'esposizione più o meno lunga del lievito nel campo elettromagnetico oscillante di un solenoide percorso da correnti ad alta frequenza, modificasse l'andamento della fermentazione alcoolica di una soluzione di glucosio provocata dal lievito medesimo. Adoperai allora prevalentemente una frequenza unica di 500 chilocicli, variando all'incontro il tempo di trattamento, da 5 a 60 minuti primi. Alcune prove fatte con una frequenza superiore, di 1200 chilocicli, diedero però dei diagrammi di fermentazione diversi da quelli ricavati usando la frequenza più bassa, e ciò mi indusse ad istituire delle nuove serie di esperimenti, adoperando per ciascuna di esse delle frequenze diverse, nei limiti che mi era dato di ottenere dal generatore di correnti oscillanti e dal circuito secondario sintonizzato.

Adottai nei nuovi esperimenti, di cui espongo ora i risultati, tre differenti frequenze, una di 1200 chilocicli, una di 400 e una di 272.7 variando parimenti per ognuna delle dette tre frequenze il tempo di trattamento da 5' a 60', e ottenni così altri ordini di dati molto interessanti, in aggiunta a quelli già pubblicati la volta scorsa.

All'infuori della diversa frequenza della corrente oscillante, nulla venne mutato nella tecnica usata nelle ricerche precedenti, dettagliatamente descritta nella prima comunicazione. Adoperai anche questa volta, per ciascuna prova, 20 cc. di una soluzione di glucosio al 5 % e 1.2 gr. di lievito compresso delle Distillerie italiane stemperato in 20 cc. della soluzione fosfato-magnesiaca di Willstätter. Uguale fu pure il metodo di misurazione e di controllo dell'anidride carbonica svolta, a mezzo dei gasometri contenenti mercurio che defluiva in una provetta graduata, mano mano che veniva spostato dal CO₂ sviluppantesi dalla soluzione fermentante. Due apparecchi identici venivano adoperati contemporaneamente; uno era collegato col palloncino contenente il saggio, l'altro, che serviva di controllo, era in comunicazione con un palloncino contenente la soluzione zuccherina fermentante con lievito normale.

Il trattamento con frequenze di corrente più basse di quella di 500 chi-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Bologna (Direttore ing. E. Giacomini).

(2) Nella seduta del 6 novembre 1927.

(3) « Rend. R. Accad. Naz. Lincei », Cl. Sc. fis., vol. V, fasc. 12, 1927.

locicli usata per le esperienze antecedenti determinò, nell'attività del lievito, delle differenze superiori a quelle già allora ottenute. Potei notare pure l'alternanza di fasi positive e negative, a seconda della durata dell'influenza del campo oscillante, e i punti critici già in precedenza segnalati. Il passaggio dall'effetto ritardante a quello accelerante è anticipato, e cade intorno a un trattamento della durata di 15-20 minuti. Un'esposizione di 5' a 15' provoca costantemente e proporzionalmente alla durata della esposizione una diminuzione della attività fermentativa. Esposizioni superiori per durata ai 20' si rivelano sempre più chiaramente quali stimolanti della attività del lievito. L'*optimum* per tale effetto stimolante cade intorno ai 35'-40' di trattamento.

Le frequenze più basse, di 272.7 e di 400 chilocicli, si mostrano anche complessivamente più efficaci nel provocare un acceleramento della fermentazione che non quella di 500 chilocicli e oltre.

I risultati delle numerose esperienze eseguite si vedono espressi nel diagramma qui riprodotto.

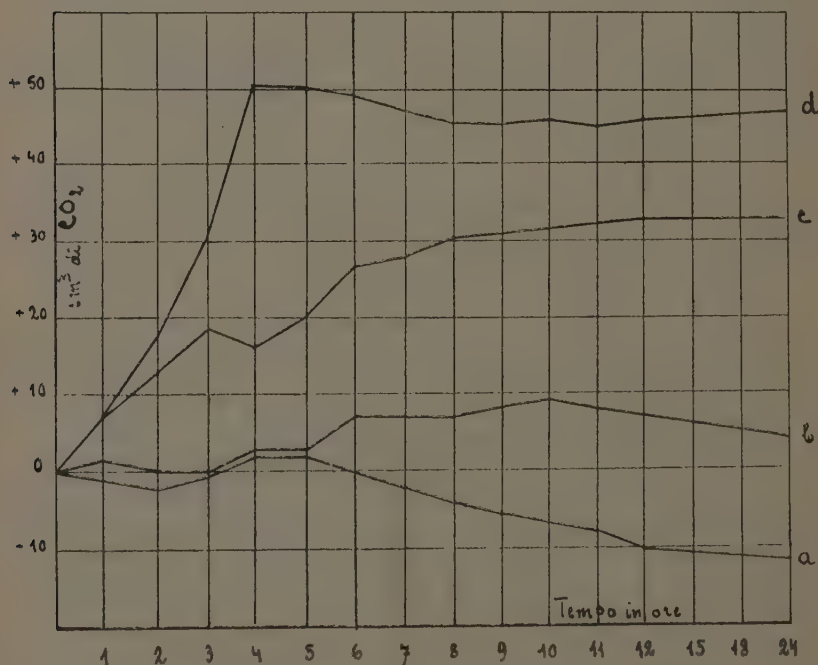


Fig. 1.

In esso le singole curve mostrano in cm³ di CO₂, svolti in più o in meno del normale nelle unità di tempo segnate sull'ascisse l'acceleramento o il ritardo di quattro fermentazioni diverse provocate da lievito trattato

per 35 minuti con le rispettive frequenze di 1200 (curva *a*), 500 (curva *b*), 400 (curva *c*), e 272.7 (curva *d*) chilocicli. Confrontando l'andamento delle singole curve si rileva chiaramente, che con un trattamento del lievito di una determinata durata, la frequenza più bassa è quella che esercita l'azione più favorevole nel senso di aumentare l'attività del lievito e di accelerare la fermentazione, mentre la frequenza più alta, di 1200 chilocicli, agisce in definitiva addirittura negativamente, deprimento l'attività del lievito anziché farla aumentare. In questo caso è da tenere però presente, che per tale frequenza si è anche in vicinanza del punto critico, ove si ha il passaggio dalla fase di acceleramento a quella di ritardo.

L'andamento della curva *c* e, in minor misura, quello della curva *b*, denotano un aumento costante e più o meno lento della accelerazione della fermentazione, che si protrae per diverse ore di seguito. La curva *d*, invece, appartenente alla frequenza più bassa potuta finora adottare, dimostra come l'attività del lievito sia fino dalle prime ore cospicuamente esaltata.

L'azione favorevole che un trattamento di una adeguata durata esercita sul lievito, si manifesta, oltre che con un'augmentata velocità di fermentazione nelle ore susseguenti al trattamento, anche con un'augmentata resa totale di CO_2 . Disponendo, come accade per le esperienze qui descritte, di una quantità ben definita di soluzione zuccherina, 20 cm³ di una soluzione al 5 %, corrispondente quindi a 1 grammo di glucosio, non tutto lo zucchero viene ad essere convertito, durante il processo di fermentazione, in alcool e anidride carbonica, ma soltanto una parte più o meno grande a seconda della bontà del lievito. Col lievito da me usato, dei 272 cm³ di CO_2 [ché teoricamente dovrebbero svilupparsi, se tutto il grammo di glucosio si convertisse in alcool e anidride carbonica (Rona, Euler)] se ne sviluppano durante 24 ore da 160 a 170. Quando il lievito è precedentemente trattato per un tempo tale da favorire la attività, il numero totale di cm³ di CO_2 prodotti sale a 200-215. In vicinanza dei punti critici, ove dalle fasi di minore attività si passa a quella di maggiore attività o viceversa, il volume totale del CO_2 sviluppato si avvicina a quello prodotto nella fermentazione normale, ma durante il corso della fermentazione si nota che il lievito trattato supera nelle prime ore, in velocità di fermentazione, il lievito di campione, mentre più tardi sembra rimanere indietro rispetto ad esso. Ciò si spiega col fatto, che il lievito trattato, per la maggiore attività esplicata nelle prime ore dopo l'esposizione, ha, in un determinato tempo, scomposto più glucosio che non l'altro e pertanto viene prima dell'altro a trovarsi di fronte a una minore concentrazione di glucosio e a una maggiore concentrazione di alcool.

Tale fatto si rispecchia anche nell'andamento delle curve *a* e *b* del diagramma, ciascuna delle quali in questo caso tende a prendere nelle ultime ore una traiettoria discendente. Quando invece l'attività del lievito è aumentata anche come rendimento complessivo, l'altezza raggiunta dalle curve si mantiene invariata sino alla fine o tende ancora a aumentare (vedi curva *e* e curva *d*).

Accanto alle esperienze fin qui esposte ne vennero iniziate delle altre, che sebbene non tutte ancora condotte a termine, diedero già qualche risultato degno di nota. In due palloncini furono messe a fermentare, con del lievito normale, contemporaneamente, due soluzioni uguali di glucosio, rilevando come al solito la quantità di CO_2 sviluppata da ciascuna soluzione. Dopo 3^b e 30' i due palloncini vennero staccati dall'apparecchio a mercurio, e uno di essi, col contenuto in piena fermentazione, venne sottoposto all'azione del campo elettromagnetico oscillante per 35', mentre l'altro, convenientemente protetto dalle irradiazioni elettriche da uno schermo metallico, veniva tenuto per tutta la durata del trattamento nel medesimo ambiente. Immediatamente dopo, i due palloncini venivano riallacciati all'apparecchio misuratore. Si fecero ripetute prove sempre colla medesima durata di esposizione e con la medesima frequenza (500 chilocicli) e la medesima energia impiegata (0.5 Kw. al primario). In alcune prove venne usato del lievito freschissimo, in altre del lievito già in parte alterato, di colore gialliccio e di odore sgradevole, indicante la già iniziata autolisi. L'andamento delle fermentazioni si può rilevare dalle seguenti due tabelle:

		TEMPO DI FERMENTAZIONE IN ORE																
		1	2	3	4 (1)	5	6	7	8	9	10	11	12	15	18	21	24	
cm ³ di CO ₂	Lievito fresco	S	19	48	82	100	117	130	139	147	153	158	161	164	168	175	181	185
		C	19	48	82	100	117	125	131	137	140	141	142	143	146	149	152	154
	Lievito alterato per parziale autolisi	S	15	40	65	74	87	97	105	114	122	128	134	139	151	164	177	187
		C	15	40	65	74	76	85	95	102	109	117	122	127	134	143	151	159

(1) La quantità di CO_2 indicata in questa colonna è inferiore a quella effettivamente svolta, essendo stata interrotta la misurazione per 35' (tempo del trattamento).

Si vede come in ambedue i casi vi fu una notevole accelerazione nell'andamento della fermentazione di quella soluzione che era stata esposta al campo elettromagnetico, accelerazione che si manifestava però dopo un'ora od un'ora e mezzo dal trattamento subito dal lievito. Essa non si compensava più tardi con un rallentamento relativo, rispetto al campione, in modo che, anche a processo ultimato, la quantità complessiva di CO_2 sviluppata dal saggio rimaneva superiore a quella sviluppata dal campione.

Questi risultati hanno una grande analogia con quelli ottenuti da De Fazi ⁽¹⁾ nella fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio con acqua

(1) R. DI FAZI, *Fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio con acqua esposta alle radiazioni di una lampada a vapori di mercurio*, «Rend. R. A. N. dei Lincei», vol. V, fasc. 11^o, 1927.

esposta alle radiazioni di una lampada a vapori di mercurio. Anche De Fazi ottenne una notevole accelerazione della fermentazione; peraltro è da rilevare che mentre nel caso di De Fazi se si operava con lievito impuro i risultati si capovolgevano, avvenendo allora un rallentamento della fermentazione, nel caso nostro all'incontro si poté notare sempre una relativa esaltazione dell'attività.

Altre esperienze si stanno eseguendo attualmente, in cui il lievito viene trattato in un campo elettrostatico fortissimo. I due morsetti del secondario della bobina di Rhumkorff vengono collegati l'uno coll'estremità di un solenoide di 18 cm. di diametro, l'altro con una rete metallica passante per l'asse longitudinale di esso. Il primario della bobina viene alimentato con corrente alternata raddrizzata, con tensione tale da avere al secondario una corrente pulsante, a polarità costante, di 50.000-60.000 Volta circa. Sulla rete metallica viene posto il lievito contenuto in una ciotolina pure metallica. Con un reostato si regola la tensione della corrente in modo da ottenere tra rete e spirale un intenso effluvio elettrico, senza addivenire alla formazione di scintille.

A seconda che la rete era collegata col polo negativo o col polo positivo dell'alta tensione, si poté finora osservare un diverso comportamento della fermentazione provocata dal lievito trattato per 35'. Quando la rete metallica era positiva, la fermentazione risultava lievemente accelerata, e la resa totale di CO₂ lievemente superiore al normale; quando la rete, e pertanto anche il lievito era in connessione col polo negativo dell'alta tensione, la fermentazione procedeva in modo normale nelle prime 5 o 6 ore; successivamente si notava un rapido decremento dell'attività del lievito.

Sono pure in corso delle esperienze analoghe a quelle ora descritte, se non che in esse vengono fatte variare la durata del trattamento e la tensione del campo elettrico. Ne saranno esposti i risultati in una prossima comunicazione.

Biologia. — *Modificazioni istologiche del timo degli Uccelli in seguito a castrazione e nella vecchiaia*⁽¹⁾. Nota del prof. T. TERNI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. LEVI.

È noto che il peso assoluto del timo cresce fino alla pubertà o fino alla soglia della maturità sessuale, per poi diminuire (nei Mammiferi) progressivamente; ma senza annullarsi neanche, pare, nella più avanzata senescenza (Hammar, Goodall, Zoia, Squadrini, Noel Paton e Goodall, Söderling e Backman, Riddle e Frey, Gedda, Castaldi, ecc.). È stato ben assodato al-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Istologia-Embriologia della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 6 novembre 1927.

trasi che la castrazione induce ipertrofia del timo (Calzolari, Henderson, Goodall, Hammar, Valtorta, Soli, Squadrini, Gellin).

D'accordo con Soli e Th. Lewis, io ho osservato che nel *pollo* la *diminuzione ponderale* del timo nella vecchiaia è *pochissimo pronunciata*; inoltre, come ha visto anche Soli, molto cospicuo è nel *pollo*, come nei Mammiferi, *l'aumento del peso del timo, in seguito a castrazione* (ho raccolto timi di cappone di quasi 5 gr., contro gr. 1-2 dei controlli).

Discretamente conosciute sono le modificazioni istologiche del timo dei Mammiferi nella riduzione per età (Hammar, Goodall, Söderling e Backman); pochissimo (Watney, Hammar) lo sono per gli Uccelli. Poco studiate e scarsamente note sono le modificazioni istologiche del timo, consecutive alla castrazione, sia nei Mammiferi che negli Uccelli.

Ricordo che il timo degli Uccelli possiede struttura un poco diversa da quella dei Mammiferi, inquantochè rarissimi o addirittura assenti vi sono i corpi di Hassal; in più vi si nota la presenza di particolari elementi, detti *cellule mioidi*, di origine e significato problematico. Si tratta di curiosi elementi che ricordano assai da vicino le fibre e le cellule muscolari trasversalmente striate; sono discretamente abbondanti nel parenchima del timo di tutti i Vertebrati, ad eccezione, sembra, dei Mammiferi (vedi specialmente Hammar pei Teleostei e Anuri; Dustin pei Rettili; Pensa per gli Uccelli).

In ricerche che saranno riferite altrove, io ho potuto confermare, per i Cheloni e gli Uccelli, le precedenti osservazioni; in più, valendomi del metodo Cajal all'argento ridotto, io ho potuto dimostrare la *cospicuità della componente mioidi*, mettendolo in evidenza *nella sua totalità*. Oltre a ciò, sono riuscito a provare *l'esistenza di complicati e ricchi apparecchi nervosi*, connessi cogli elementi mioidi.

Orbene, il fenomeno più appariscente delle modificazioni istologiche del timo del *pollo* in seguito alla castrazione è il seguente: *gli elementi mioidi aumentano fortemente di dimensioni e di numero*. Mentre nel *pollo* giovane avevano modeste proporzioni ed erano quasi esclusivamente localizzati, nella sostanza midollare, nel cappone di circa otto mesi essi sono pressochè quadruplicati di numero per unità di superficie e invadono anche la corticale. Quasi tutte le cellule mioidi hanno assunto nel cappone quella forma rigonfia e sferoidale o a fiasco, che già si trova, ma poco frequentemente, nei controlli. Il loro diametro, che nei giovani polli interi arriva di rado ai μ 20, raggiunge e può oltrepassare i μ 40 nel castrato. La striatura trasversale diviene spesso poco evidente; ma la presenza di fibrille a decorso vorticoso o circolare e la frequente brusca continuazione del rigonfio corpo cellulare in una sottile fibra con evidente striatura, non lasciano dubbi sulla natura dell'elemento.

Nel timo ipertrofico del cappone, oltre a tale iperplasia-ipertrofia delle cellule mioidi, si riconosce l'esistenza di una *ricca ramificazione vascolare*, nonchè di più vivaci fenomeni di *attività ghiandolare* per parte di molti dei nu-

merosi cordoni e nidi di grosse cellule epiteliali. In seno a codeste isole spesso si costituiscono escavazioni, talvolta ampie e ben circoscritte come cavità ghiandolari; nel lume delle medesime cadono spesso cellule epiteliali e leucociti in degenerazione, che si disgregano in una massa di detriti, destinata verosimilmente ad essere riassorbita (cfr. con Ciaccio, Hammar). Spesso nei focolai ghiandolari in questione vanno distrutti anche elementi mioidi.

Riassumendo, nel timo del capponi, oltre ad ipertrofia dell'organo, a una sua più ricca vascolarizzazione e a manifestazioni ghiandolari più vivaci che di norma (assai diverse da quelle rintracciabili nei corpi di Hassal), si riscontra *iperplasia* (intesa come aumento numerico, lasciando aperta la questione istogenetica) e *ipertrofia degli elementi mioidi*.

Nel timo del pollo intero *di oltre due anni* (esaminato in qualsiasi stagione dell'anno), nel quale si nota una leggera riduzione ponderale, si riscontra un *forte aumento numerico* ed un certo grado d'*ipertrofia degli elementi mioidi*. Questi ultimi sono distribuiti in tutto l'ambito del lobulo, sia nella midollare che nella corticale; i limiti fra le due zone risultano pochissimo distinti.

Non ho esaminato galli molto vecchi, di oltre cinque anni (ricordo che in un gallo di sei anni, Weisseberg ha trovato molto numerose le cellule sferoidali mioidi).

Le mie osservazioni hanno perciò messo in luce una nuova modificazione istologica caratteristica del timo degli Uccelli, consecutiva alla castrazione. Da queste ricerche si possono inoltre dedurre due conclusioni di interesse dottrinale:

1° - La *correlazione istofunzionale fra corpi genitali e timo* è anche *più intima e profonda* di quanto non si potesse arguire dalla semplice constatazione dell'ipertrofia del timo negli animali castrati; infatti, non solo la castrazione induce nel pollo modificazioni istologiche specifiche del timo, ma anche nella vecchiaia, cui è legata la decadenza della funzione genitale, insorgono modificazioni analoghe.

2° - Agli *elementi mioidi del timo* del pollo, data la loro squisita reazione, morfologicamente apprezzabile, a mutate condizioni sperimentali (castrazione) e naturali (vecchiaia), deve attribuirsi *notevole dignità biologica*. Sia aggiunto, in appoggio di tale conclusione, l'apprezzamento di intime e cospicue *connessioni* che gli elementi mioidi assumono con *complessi e caratteristici apparati nervosi*, la di cui esistenza era sfuggita a precedenti osservatori: connessioni che io ho avuto opportunità di osservare ed analizzare e che saranno ampiamente illustrati altrove.

Biologia. — *Ricerche sul latte disgenesico* ⁽¹⁾. Nota di C. GORINI, presentata ⁽²⁾ dal Socio B. LONGO.

Le mie precedenti ricerche ⁽³⁾ hanno dimostrato: 1° che il latte, per effetto delle temperature elevate di sterilizzazione, viene deteriorato nelle sue attitudini alla cultura dei fermenti lattici e segnatamente dei fermenti misti o acidoproteolitici, i quali abbisognano di speciali condizioni di ambiente per l'esplicazione dei loro poteri enzimatici; 2° che però a detto deterioramento si può rimediare qualora al latte sterilizzato si aggiungano determinate sostanze stimolanti dell'attività batterica. Ciò conduce a ritenere che dette sostanze stimolanti vengano in certo qual modo a sostituire quegli elementi che sono danneggiati dal processo di sterilizzazione.

Queste constatazioni mi guidarono a chiarire un altro ordine di fenomeni che vado osservando da oltre 25 anni nei trapianti periodici delle mie culture e su cui ho richiamato l'attenzione ripetutamente ⁽⁴⁾; sono fenomeni che si riferiscono alla diversa attitudine culturale presentata dai diversi latti anche indipendentemente dal processo di sterilizzazione, per cui ho ammonito che il latte, ancorchè normale e proveniente da vacca sana e trattato nel medesimo modo, non può considerarsi un substrato uniforme, variando esso nella sua intima costituzione biochimica a seconda della razza degli animali, della loro alimentazione, delle loro condizioni fisiologiche di lattazione, di lavoro, ecc., variazioni che non sono rilevabili nè ai caratteri organolettici nè all'esame corrente chimico e microscopico. Per persuadersi di ciò, basta prendere due o più campioni di latte normali di vacche sane e ugualmente sterilizzati, e inocularli colla medesima proporzione di semente di un dato fermento lattico e tenerli in uguali condizioni di incubazione; è pressochè impossibile che si ottengano culture che acidifichino in pari grado, e che coagulino in ugual tempo; talora si notano differenze di mezze giornate e di intere giornate. Se poi si tratta di fermenti misti, è ben difficile che le culture peptonizzino con pari intensità e in ugual tempo e modo; alcune ridisciolgono il coagulo in senso orizzontale, altre in senso verticale lateralmente, altre persino peptonizzano senza previa coagulazione, ecc. Vedasi al riguardo quanto ho detto e replicato nei lavori succitati.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Batteriologia del R. Istituto Superiore Agrario di Milano.

(2) Nella seduta del 6 novembre 1927.

(3) « Rend. R. Acc. Lincei », ottobre 1917; novembre 1926.

(4) « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett. », XL, 1907, p. 947; « Rend. R. Acc. Lincei », dicembre 1912; « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett. », 1923, LVI e 1927, LX.

Ma v'ha di più. Ho verificato che la diversità di attitudine dei latti di fronte a certi batteri può spingersi al punto da costituire per questi una questione di vita o di morte. Tengo nella mia collezione di fermenti lattici semplici e misti alcuni stipiti i quali finiscono persino coll'esaurirsi e collo spegnersi nei passaggi attraverso certi latti, come se questi contenessero elementi microbicidi. Sulle prime mi nacque il sospetto che il latte fosse stato addizionato di antisettici a scopo conservativo; ma e le informazioni e i saggi chimici e le prove fatte su altri batteri mi convinsero di essere in errore. Ho pensato altresì alla ben nota proprietà inibitrice del latte fresco, la quale pure si esplica in grado diverso a seconda dei germi; ma in primo luogo essa dura solo breve tempo (da 30 minuti a qualche ora dalla mungitura); in secondo luogo essa è piuttosto debole verso i fermenti lattici; in terzo luogo poi essa è inattivata già in 5-10 minuti a 100° C., per cui non è verosimile che possa sussistere nel latte sterilizzato sia pure col processo blando della tindalizzazione di mezz'ora a 100° C. per 3-4 giorni consecutivi.

Ad ogni modo, il rinnovarsi di simile fenomeno, dovuto a latti che io chiamo *disgenesici*, mi indusse, per assicurare la conservazione dei batteri più sensibili della mia collezione, a usare la precauzione di farne i trapianti periodici almeno in *due* latti diversi.

*
* *

Dacchè però ho riscontrata l'utilità dell'aggiunta di sostanze stimolatrici per riparare alle lesioni provocate nel latte dalla sterilizzazione, ho voluto verificare se dette sostanze fossero capaci altresì di trasformare un latte da *disgenesico* in *eugenesico*. Ne ottenni esito affermativo. Per tale ricerca ho scelto uno stipite di *Mammococcus* acidoproteolitico fra i più sensibili e l'ho seminato in latti provenienti da singole stalle; sopra 13 latti sperimentati tre manifestarono di essere più o meno *disgenesici*; il che attesta che il fenomeno è relativamente frequente; esso evidentemente deve incontrarsi meno facilmente nel latte di mercato, perchè questo è di solito una mescolanza del prodotto di più stalle. Tutti i 13 latti derivavano di fresco da vacche sane e si presentavano normali sia ai caratteri organolettici sia ai comuni saggi chimici e microscopici. Noterò che, contrariamente alla consuetudine, ho usato i latti allo stato intero per evitare qualunque causa di modificazione che potesse derivare dalla scrematura.

Naturalmente le prove vennero condotte in guisa che tutte le altre condizioni (qualità e forma dei recipienti, quantità di latte, processo di sterilizzazione del latte, dose della semente, termostato, ecc.) fossero identiche, cosicchè i divari nei risultati dovessero attribuirsi esclusivamente alla qualità del latte. La proprietà *disgenesica* dei tre latti si rivelò con un notevole divario nell'acidificazione (sebbene l'acidità naturale dei latti fosse

press'a poco uguale), nella rapidità di coagulazione e successiva peptonizzazione del latte e nel numero dei germi al terzo giorno di incubazione a 37° C. L'acidificazione, che nei dieci latti eugenesici raggiunse dal 3.9 al 4.6 per mille di acido lattico, nei tre latti disgenesici arrivò appena all'1.2-1.6-1.8 per mille; i primi latti coagularono in 24 ore e iniziarono quasi contemporaneamente la ridissoluzione; dei secondi, invece, due accennarono a coagulare solamente al terzo giorno e uno si mantenne ancora inalterato; nei latti eugenesici il contenuto batterico, calcolato sulle piatte in agarlatte, si aggirò fra i 2486 e i 3960 milioni per cm.³, invece nei latti disgenesici esso fu rispettivamente di appena 435-390 e 176 milioni per cm.³, mentre, dato il loro minore inacidimento, avrebbe potuto essere superiore, qualora non si trattasse di una vera e propria disgenesia, di un vero e proprio ostacolato sviluppo.

Fatta così la cernita dei latti disgenesici, li ho addizionati di diverse sostanze stimolatrici e li ho sottoposti a nuove prove culturali comparative col medesimo *Mammococcus*. Gli stimolanti impiegati furono il peptone di caseina Erba e l'estratto di lievito, tutti e due incapaci per se stessi di alterare il latte. L'aggiunta venne fatta al latte già sterilizzato usando soluzioni sterilizzate separatamente e operando sterilmente. La proporzione di stimolante fu sempre assai debole variando dall'1 al 0.001 per cento; non osservai sensibili differenze a seconda della dose; anche colla dose più tenue ottenni risultati probativi. Tutti i tre latti disgenesici vennero a comportarsi come i latti eugenesici; taluno anzi acquistò doti ancora più propizie massime sul potere proteolitico, in quanto la solubilizzazione del coagulo si compì con una rapidità sorprendente; ciò sta a conferma delle mie osservazioni precedenti, dalle quali emerse che lo stimolo si esplica peculiarmente sulle attività enzimatiche dei batteri.



Qui verrebbe fatto di domandarsi da che cosa dipenda l'azione dei suddetti stimolanti: come ho spiegato nei lavori precedenti, la risposta non è facile. Potrebbe trattarsi sia di un arricchimento, di una reintegrazione, insomma di un miglioramento della nutrizione azotata dei batteri, sia dell'influenza di vitamine, o di tamponi o di coenzimi fors'anco di natura minerale.

In linea generale, considerando la quantità minima di stimolante che è sufficiente allo scopo e considerando inoltre che non si notano differenze sensibili di effetto variandone la dose, si è indotti a considerarli come catalizzatori i quali varrebbero tanto a compensare le perdite causate nel latte dalle temperature elevate di sterilizzazione quanto le deficienze naturali del latte.

D'altronde, data la diversa natura degli stimolanti, può darsi che la loro azione diversifichi a seconda della sostanza. Nel caso presente, ad esempio,

l'effetto dell'estratto di lievito potrebbe ascriversi al contenuto in vitamina (specialmente vitamina B), mentre l'effetto del peptone di caseina Erba potrebbe ascriversi al contenuto in caseina idrolizzata che, come ho dimostrato ⁽¹⁾, è per certi batteri meglio utilizzabile della caseina integra. Per avere qualche indizio anche su questo punto ho ripetuto alcune prove sul latte più disgenesico, di cui una parte fu addizionata di una vitamina anti-beriberica e antiscorbutica del commercio, e un'altra parte fu addizionata del medesimo latte idrolizzato, sempre nella dose minima del 0.001 per cento. Ne ottenni esiti positivi, che permettono di ravvisare un effetto eugenetico tanto nella vitamina quanto nel miglioramento della nutrizione azotata.

Siffatte indagini meritano di essere proseguite anche per verificare se la produzione di latte disgenesico è continuativa in dato animale, se è in rapporto coll'alimentazione o con altre circostanze, quali la cattiva mungitura, le mastiti pregresse, le anomalie della microflora mammaria, ricordando a questo proposito che il latte, per opera del Mammococco, esce abitualmente dalle mammelle con un certo contenuto in caseina idrolizzata e che in ogni caso il latte di mercato contiene pure abitualmente della caseina idrolizzata per opera dei batteri peptonizzanti che vi si sviluppano dopo la mungitura.

Comunque sia, le presenti ricerche autorizzano a presumere che la proprietà disgenesica di certi latti non sia da attribuire ad un contenuto in principi microbici o inibitori, sibbene alla carenza di un *quid* che vi può essere apportato da sostanze stimolanti diverse.

*
* *

Ed ora la natura disgenesica di certi latti viene ad aggiungersi all'influenza disgenesica della sterilizzazione per giustificare sempre più i dispareri degli AA. circa il comportamento dei batteri nel latte e segnatamente dei batteri parassiti che, come ho dimostrato ⁽²⁾, sono fra i più esigenti. Inoltre essa viene a dar ragione delle difficoltà e delle fallanze che si incontrano in tecnica casearia sia nell'allestimento di latticure di fermenti selezionati per burro, formaggio, yoghurt, ecc., sia proprio nella fabbricazione del formaggio stesso, in ispecie laddove si lavora il latte di una sola stalla o fattoria. Per conto mio non credo di andare errato attribuendo la perdita di alcuni ceppi della mia collezione di fermenti lattici piuttosto all'impiego di latte inopinatamente disgenesico anzichè ad altre cause sconosciute di tecnica.

(1) « Rend. R. Acc. Lincei », novembre 1915.

(2) « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett. », 1923, LVI e 1927, LX; « Rend. R. Acc. Lincei », novembre 1926.

Infine queste ricerche, oltre ad interessare la batteriologia lattiera nei riguardi scientifici e tecnico-caseari, meritano altresì considerazione dal punto di vista alimentare. Infatti mi sembra ben verosimile che il latte disgenesico per i batteri sia anche deficiente nelle sue proprietà nutritive per l'uomo, alla stessa stregua che il deterioramento culturale da me dimostrò nel latte per effetto della sterilizzazione trova riscontro nel minorato potere alimentare non solo del latte sterilizzato, ma benanco del latte semplicemente pastorizzato.

Cosicchè è lecito prospettare che certe specie microbiche particolarmente sensibili potrebbero servire da testi per giudicare il valore nutritivo del latte, nei riguardi delle sue intime qualità biochimiche che sfuggono ai metodi analitici ordinari.

Riassunto. — Le mie ricerche sui deterioramenti che il latte subisce, come terreno di cultura batterica per effetto della sterilizzazione e sulla possibilità di ripararvi coll'aggiunta di sostanze stimolanti dell'attività batterica, mi hanno condotto ad approfondire e dilucidare le mie osservazioni precedenti circa la differenza dell'attitudine culturale che presentano i diversi *ab origine*, fermi essi, per quanto normali, non possono essere considerati un substrato uniforme. Ho verificato che tale differenza può essere così profonda che certi fatti riescono raramente *disgenesici* per certi fermenti lattici particolarmente sensibili. Però anche la disgenesia è suscettibile di essere corretta coll'aggiunta dei suddetti stimolanti; fermi è da ritenere che essa sia dovuta non alla presenza di principi microbicidi o inibitori, bensì alla carenza di un *quid*⁽¹⁾ che viene apportato o compensato dagli stimolanti.

Queste ricerche trovano applicazione sia allo studio del comportamento dei batteri nel latte sia alla tecnica casearia sia all'alimentazione umana.

Microbiologia. — *L'eliminazione del virus rabico per il tubo digestivo.* Nota del prof. V. PUNTONI, presentata⁽²⁾ dal Socio Corresp. S. BAGLIONI.

Le osservazioni di antichi e moderni anatomo-patologi, hanno messo in rilievo che all'autopsia di uomini e di animali deceduti per rabbia, si possono osservare lesioni gastro-enteriche consistenti in fatti emorragici e congestizi.

Avendo avuto occasione di eseguire numerose autopsie di cani, conigli e cavie morti in seguito all'infezione rabida, sia da virus da strada sia da virus fisso, ho potuto pienamente confermare, anzi maggiormente svolgere,

(1) Vitamine? nutrimento azotato meglio utilizzabile?

(2) Nella seduta del 6 novembre 1927.

queste osservazioni, le quali sono tuttora pochissimo note ai pratici e solo di rado vengono prese nella dovuta considerazione.

Le autopsie da me eseguite *sui cani rabbiosi* mi hanno portato a concludere:

A) che nella rabbia naturale da virus da strada si trova costantemente una più o meno pronunciata congestione gastrica, la quale nei casi più tipici dà alla parete del viscere un colorito rosso-fegato; la parete stessa può essere cosparsa di emorragie mucose e sottomucose;

B) che tale congestione si estende di norma all'intestino, e che i tratti maggiormente colpiti di esso sono il duodeno, la prima porzione dell'ileo e la regione della valvola ileo-cecale; in tali tratti si possono osservare anche erosioni emorragiche;

C) che anche istologicamente non è dato rilevare nulla più che i fatti congestizi ed emorragici, e sopraproduzione di muco;

D) che il grado di congestione dei visceri gastro-enterici è di solito proporzionale al grado di congestione delle ghiandole salivari e del pancreas.

Nelle autopsie da me eseguite, in numero relevantissimo, *sulle cavie e sui conigli morti per virus fisso o per virus da strada*, le lesioni gastro-enteriche furono osservate con straordinaria frequenza e furono caratterizzate soprattutto dai due seguenti fatti:

A) abbondanti emorragie lenticolari sotto-mucose nello stomaco, la cui parete dimostra un lieve arrossamento diffuso ed un processo di sfaldamento della mucosa;

B) una reazione intestinale (del tenue) consistente in congestione ed in spiccatissima ipersecrezione di muco.

Queste osservazioni portano a concludere che nella rabbia, dopo le lesioni cerebrali, rilevabili soprattutto istologicamente, le più evidenti alterazioni sono quelle che colpiscono il tratto gastro-intestinale. Esse meritano di attirare maggiormente l'attenzione dei pratici, i quali, generalmente ne ignorano l'importanza e la frequenza.

Ma se le lesioni gastro-enteriche nella rabbia erano note da lungo tempo, così da trovarne menzione tanto nel *Sepulchretum* di Teofilo Benet (1679) quanto nelle opere del Morgagni, non altrettanto può dirsi delle manifestazioni cliniche che decorrono parallelamente ad esse e che sembrano ignorate da tutti i trattatisti e da tutti i rabiologi.

A me è stato dato di rilevare che talvolta nei cani ammalati di rabbia naturale (controllata poi con le ricerche di laboratorio), viene dai veterinari diagnosticata un'indigestione, una gastrite, una gastro-enterite, un avvelenamento o altra malattia a sede o a sindrome gastro-intestinale. Questo fatto, che ho visto ripetersi con notevole frequenza, ha naturalmente richiamato la mia attenzione, cosicchè durante parecchi anni di osservazione, mi è stato dato di accertare che talora la rabbia, ed in particolare la forma muta o paralitica, può manifestarsi con una tale prevalenza di sintomi ga-

stro-enterici, non escluso il vomito e la diarrea sanguigna, da mascherare la sindrome nervosa o almeno da farla apparire come secondaria al grave disturbo digestivo. Ciò mi ha portato ad ammettere che ai multiformi aspetti già noti, con i quali può presentarsi la malattia, si debba aggiungere la *sindrome gastro-enterica della rabbia*. Questa sindrome ha notevole importanza e merita di essere tenuta presente nella pratica, essendo oltremodo insidiosa; essa è responsabile di molte diagnosi errate e di insospettati casi di contaminazioni.

Patogenesi. — Il concetto troppo semplicistico, avanzato talora da alcuni autori, che le lesioni gastro-enteriche possano essere causate dall'ingestione di corpi estranei, così frequente nella rabbia, va senz'altro scartato, perchè la lesione gastro-enterica può assumere un grado elevatissimo anche in quei cani che nulla ingeriscono, ed il cui stomaco si trova vuoto, come pure nelle cavie e nei conigli che non hanno nessuna tendenza a tale ingestione.

Anche l'ipotesi che le alterazioni gastro-enteriche possano essere il risultato delle lesioni (prodotte dall'infezione rabica) di quei centri nervosi che presiedono alle funzioni motorie, trofiche e vasali dell'apparecchio digestivo, non sembra essere molto probabile. Infatti, se è vero che alterazioni digestive (ed in particolare l'emorragia della mucosa gastrica) possono osservarsi in seguito alla lesione traumatica sperimentale di alcune zone nervose, d'altro lato non si è soliti ad osservare fatti simili in seguito all'azione di sostanze neurotossiche, ossia in seguito ad un meccanismo di offesa che si accosta alle alterazioni nervose rabiche assai più di una distruzione meccanica.

Inoltre, l'aspetto anatomico che presenta il tubo gastro-enterico nella rabbia, somiglia molto più ad un fatto da reazione locale, che non ad un fenomeno di derivazione nervosa.

Una terza ipotesi che può essere formulata, è che le lesioni gastro-enteriche nella rabbia possano essere determinate da un'eliminazione di virus rabico. Questa ipotesi è sembrata degna di una ben maggiore attenzione per due motivi:

Anzitutto perchè recentemente, in seguito agli studi di Sanarelli e di altri autori che ne hanno seguito l'indirizzo, è risultato che l'eliminazione microbica attraverso alle pareti digestive, e le relative lesioni di queste ultime, è fenomeno molto diffuso nelle malattie acute d'infezione; ond'è che si può pensare ad analogie anche nel caso della rabbia.

In secondo luogo, perchè nella rabbia si è osservata, dal punto di vista anatomico, una corrispondenza tra il grado di congestione delle pareti gastro-enteriche ed il grado di congestione delle ghiandole pancreatiche e salivari; ora poichè, per consenso universale, la congestione di tali ghiandole viene addebitata alla eliminazione del virus, è sembrato logico sospettare che anche la congestione gastro-enterica potesse riconoscere la stessa derivazione.

Per stabilire se questa ipotesi fosse, o no, fondata, occorreva studiare sperimentalmente se nella rabbia avvenga una eliminazione gastro-enterica di virus. A questo scopo non bastava certamente la dimostrazione della presenza del virus nel sistema digestivo, fatto, del resto, già ammesso, ma riferito alla deglutizione salivare (stomaco) o alla secrezione pancreatico (intestino); occorreva determinare se l'eliminazione avvenisse in realtà per le pareti gastriche o enteriche, in condizioni tali da far escludere qualsiasi altra derivazione.

Ora questa dimostrazione può ottenersi solo con l'esclusione di un'ansa intestinale dalla circolazione digestiva, oppure con la formazione di un piccolo stomaco.

Dopo alcune prove di orientamento, si stabilì di eseguire l'esperimento sul cane operato di ansa alla *Thiry-Vella*, e di determinare l'infezione con virus fisso e con virus da strada in via di fissazione, escludendo invece il virus da strada di recente provenienza perchè avrebbe ostacolato l'esperimento con la produzione della rabbia furiosa.

Le ricerche vennero eseguite su cinque cani che andarono tutti soggetti alla rabbia paralitica; in essi venne raccolto il succo enterico, e (per eseguire prove di confronto) anche la saliva, durante il periodo di stato della malattia, per più giorni consecutivi.

I liquidi, previa centrifugazione per liberarli da materiali sospesi, e diluiti ad 1:5, 1:10, 1:20, erano inoculati per via cerebrale in cavie, che sopportavano assai bene questa prova. Non fu eseguita l'inoculazione endomuscolare con grandi quantità di liquidi puri, perchè il virus fisso ed il virus in via di fissazione, non hanno molta virulenza per tale via.

Il trattamento dei liquidi e la loro inoculazione deve essere eseguita con la massima celerità, perchè a lungo andare il liquido enterico attenua e poi uccide il virus rabico.

Dei cinque esperimenti, tre ebbero esito negativo, ma in due si poté dimostrare in modo inequivocabile (per la grande cura con cui furono eseguite le ricerche) l'eliminazione del virus rabico.

Dall'insieme delle osservazioni eseguite e dal paragone fra i risultati positivi e quelli negativi, è parso legittimo venire alle seguenti conclusioni:

1° - L'eliminazione del virus coincide con la massima congestione enterica, che si apprezza molto bene osservando i bottoni intestinali dell'ansa.

2° - L'eliminazione del virus è stata dimostrata solo a patto di costituire l'ansa in tutta prossimità del duodeno, ossia nel punto dell'intestino che risulta maggiormente leso all'autopsia; ma non si è invece potuta dimostrare costituendo l'ansa in un punto indeterminato dell'ileo (cani 1 e 2).

3° - L'eliminazione enterica e salivare del virus è apparsa assai più netta ed abbondante adoperando un virus da strada, in via di fissazione (cane 5), anzichè adoperando del virus fisso.

4° - L'eliminazione enterica del virus è decorsa parallelamente all'eliminazione salivare in quattro dei cinque cani adoperati (positiva in due

casi, negativa in altri 2); solo in un caso (cane 2, nel quale del resto l'ansa era stata costituita a notevole distanza dal duodeno) si osservò una debole secrezione salivare, mentre non fu possibile la dimostrazione della secrezione enterica.

Gli esperimenti eseguiti dimostrano pertanto in modo sicuro, che può avvenire un'eliminazione di virus rabbico attraverso le pareti enteriche; l'aver ottenuto esito negativo in alcune delle prove non può diminuire il valore del complesso di esse, giacchè si è veduto che nelle condizioni adottate per l'esperimento, gli esiti negativi del liquido enterico hanno quasi sempre coinciso con esiti negativi anche della saliva, ossia del liquido sul cui potere infettante non è lecito elevare dubbi di sorta.

Ammesso che attraverso la parete enterica si può avere eliminazione del virus, e che questa eliminazione decorre press'a poco parallelamente con quella salivare, rimane tuttavia da stabilire se le lesioni anatomiche osservate nell'apparecchio digestivo e la sindrome gastro-enterica nella rabbia, siano effettivamente in relazione con tale eliminazione. Il fatto, già accennato sopra, che l'eliminazione del virus coincide col momento della massima congestione enterica, mi pare che non lasci dubbi a questo riguardo; pertanto la lesione enterica (e per analogia anche quella gastrica) dev'essere effettivamente addebitata all'eliminazione del virus, nel modo stesso che ad esso si addebita la grave congestione delle glandole salivari e pancreatiche.



I suesposti studi portano a riesaminare, in linea generale, le vie d'eliminazione del virus rabico: queste, che finora si ritenevano ristrette alle ghiandole salivari ed al pancreas, debbono essere in realtà assai più vaste.

Nelle autopsie di cani rabbiosi si rileva infatti, con una certa frequenza, anche l'infiammazione delle mucose orali, che possono presentare erosioni.

Questi fatti, da me osservati talvolta, erano del resto già noti per opera di diversi osservatori antichi (Sanson, Bouley, Bruckmüller, Bollinger) e di altri più recenti (Nocard e Leclainche, Babes).

Tali lesioni possono determinare una sindrome stomatitica in vita, ed a me è accaduto di riscontrare sperimentalmente la rabbia nei cani sui quali era stata diagnosticata una stomatite.

Sulla origine rabida di tali lesioni non vi sarebbe alcun dubbio secondo le ricerche di Manouelian, il quale ha trovato dei corpi simili a quelli del Negri, nelle terminazioni nervose della lingua, e non ha esitato a formulare l'ipotesi di un'eliminazione di virus rabico per questa via.

Da tutto ciò deriva che la vecchia teoria dell'eliminazione salivare del virus rabico dev'essere oggi sostituita da altra *teoria più ampia e comprensiva, la quale considera tutte le mucose e quasi tutte le ghiandole del tubo digestivo come superfici di eliminazione del virus rabico.*

Fisiologia. — *Azione dell'alcool etilico sulla secrezione renale* ⁽¹⁾.
Nota del dott. A. GALAMINI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Numerosi Autori, dal Rintaro Mori al Cugusi, si sono occupati dell'azione diuretica dell'alcool. In generale sono giunti alla conclusione che l'alcool esercita un'azione diuretica evidente quando è ingerito a digiuno con grandi quantità di acqua. L'azione diuretica dell'alcool dipenderebbe, secondo Malinowski dalla dilatazione dei vasi renali, seguente alla depressione dei centri vasomotori; secondo Mori, Hankow e Shapiro dall'eccitamento dell'epitelio renale, a cui, secondo Denogany e Tibald, si aggiungerebbe l'aumento della pressione sanguigna. Secondo Januszkiewicz l'alcool non avrebbe azione diuretica nè a piccole, nè a medie, nè a grandi dosi; ma avrebbe azione inibitrice, dipendente dalla paralisi della funzione secretiva dell'epitelio renale e dallo spasmo dei vasi. La diuresi, che si osserva quando l'alcool è ingerito con grandi quantità di acqua, dipenderebbe invece dall'accelerato assorbimento dell'acqua e dall'idrenia seguente.

Dell'eliminazione dell'alcool colle urine si sono occupati il Nicloux e il Nowicka prima, il Nicloux e Placet poi, giungendo alla conclusione che l'alcool passa nelle urine per diffusione e non è concentrato dal rene. Alla stessa conclusione giunsero Widmark, Chabanier e Ibarra. Il Miles invece afferma la possibilità del rene di concentrare l'alcool in base a ricerche eseguite su uomini in parte astinenti, in parte bevitori più o meno moderati. Egli somministrò gr. 27.5 di alcool assoluto in 1000 e 100 cc. di acqua: osservò che la concentrazione dell'alcool nel sangue è dapprima superiore a quella dell'alcool nelle urine, ma dopo 25'-30' le due curve s'incrociano: dopo 60'-120' l'urina contiene alcool in una percentuale 1.5 volte superiore a quella del sangue e 1.25 superiore a quella del plasma.

L'azione diuretica dell'alcool si è studiata in tre giovani di 23-25 anni, astemi o bevitori molto moderati. Si scelsero per le osservazioni le ore del mattino, in cui è noto che il ritmo secretorio è più regolare.

L'alcool a 95 % era ingerito in soluzione a metà con acqua, generalmente nella proporzione di 0,5-0,75 cc. per Kg. di peso. Il contenuto in alcool delle urine, raccolte a uguali intervalli di tempo per minzione volontaria, era misurato secondo il metodo modificato di Widmark. Si tenne conto della quantità e del peso specifico delle urine e si calcolarono le sostanze solide escrete in base al fattore empirico di Häser. Ricerche di controllo furono eseguite con acqua ingerita in quantità uguale a quella della bevanda alcoolica.

I risultati ottenuti sono riuniti nelle annesse tabelle.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia Umana della R. Università di Roma, diretto dal prof. Silvestro Baglioni.

(2) Nella seduta del 6 novembre 1927.

Il ritmo normale della secrezione renale nei tre soggetti era il mattino di 8-10 cc. ogni 20'. In uno di essi, Cr. P., l'ingestione di 90 cc. di acqua svolse una debole azione diuretica, che si manifestò dopo 60': da 8-10 cc. salì a 12 cc. ogni 20'. Le sostanze solide escrete per cc. diminuirono ma aumentarono nella quantità totale da 0,5 a 0,68 gr. ca. Con 30 cc. di alcool il tasso alcoolemico raggiunse i gr. 0,2-0,3 ‰ in ca 20': nello stesso tempo si ebbe una netta azione diuretica, che aumentò con l'aumentare dell'alcool in circolo e dai 10 cc. di urina ogni 20' ascese ai 164, 87 cc. rispettivamente in due esperienze.

La diuresi si mantenne per 90'-130': scomparve poi quando ancora la percentuale di alcool nel sangue era superiore a quella, che produsse l'azione diuretica. Somministrando al soggetto 45 cc. di alcool (0,75 per Kg. di peso) si osservarono essenzialmente gli stessi fatti: l'azione diuretica durò un po' di più.

In M. L. 60 cc. di acqua fecero secernere nei primi 5 periodi di 20' 20-29 cc. di urina, in seguito 14 cc. Con 30 cc. di alcool (0,5 per Kg. di peso) la quantità di urina escreta ogni 20' ascese da 20 a 47,95 cc. Il tasso alcoolemico e quello alcoolurico salirono a 0,75 ‰.

In Gr. G. 60 cc. di acqua, non produssero modificazioni del ritmo urinario. L'ingestione di 40 cc. di alcool (0,5 per Kg. di peso) produsse un forte aumento del tasso alcoolurico e alcoolemico.

Coll'aumentare del tasso alcoolemico a 0,38 ‰ l'urina escreta salì da 8 cc. a 40 ogni 20', poi rapidamente diminuì. Il peso specifico delle urine non variò, aumentarono così le sostanze totali escrete da ca gr. 0,48 a ca 1,75 gr.

L'azione diuretica dell'alcool si osservò anche con l'ingestione di 60 cc. di alcool a 95 ‰ (0,75 per Kg. di peso). Nelle due esperienze il ritmo della secrezione renale decrebbe quando ancora nel sangue circolava alcool in percentuale rispettivamente del 0,31, 0,5 ‰.

La curva alcoolurica, nelle citate esperienze seguì quella alcoolemica alla distanza di 20'-30', tempo impiegato probabilmente dall'urina per giungere dal rene alla vescica. Il tasso alcoolurico raggiunse quasi sempre valori superiori a quello alcoolemico.

Concludendo:

1°. — L'alcool etilico a 95 ‰, diluito a metà con acqua, ingerito nella proporzione di 0,5-0,75 cc. per Kg. di peso, ha prodotto sempre un'azione diuretica: più intensa in un soggetto, meno in altri due.

2°. — La quantità dell'alcool eliminato colle urine nei periodi successivi (*curva alcoolurica*) hanno seguito le quantità dell'alcool presente nel sangue (*curva alcoolemica*) a distanza di circa 30', raggiungendo un livello più elevato.

Soggetto	Sostanza ingerita	Prima	Dopo					
			20'	40'	60'	80'	100'	120'
Cr. P.:	90 cc. acqua							
Urine cc.			8	10	12	7	9	11
Peso specifico . . .		1028	1025			1024		
Sostanze solide totali			0.42	0.55	0.66	0.38	0.47	0.583
M. L.	60 cc. acqua							
Urine cc.			26	29	22	20	24	14
Peso specifico . . .		1020	1020					
Sostanze solide totali			1.21	1.35	0.98	0.89	0.07	0.62
Gr. G.	60 cc. acqua							
Urine cc.			10	8	8	9	9	8
Peso specifico . . .		1016	1016	1020				
Sostanze solide totali			0.35	0.35	0.35	0.40	0.40	0.35

Soggetto	Sostanza ingerita	Prima	Dopo				
			15'	40'	65'	90'	115'
M. L.	30 cc. alcool + 30 acqua						
Alcool sangue gr. ‰		0.04	0.3	0.45	0.51	0.45	0.4
» orine »		0.03	0.076	0.226	0.6	0.65	0.51
Quantità orine. . .			20	25	47	95	30

Soggetto	Sostanza ingerita	Prima	Dopo				
			20'	50'	80'	110'	140'
Gr. G.	40 cc. alcool + 40 acqua						
Alcool sangue gr. ‰		0.073	0.37	0.51	0.42	0.355	0.31
» orine »		0	0.073	0.38	0.64	0.51	0.42
Quantità orine cc. .			11	18	47	28	19
Peso specifico . . .		1023	1019	1019	1012	1016	1016
Sost. solide totali gr.			0.466	1.14	1.87	0.99	0.67

Soggetto	Sostanza ingerita	Prima	Dopo						
			15'	65'	115'	165'	215'		
Gr. G.									
Alcool sangue gr. ‰	60 cc. alcool	0.04	0.54	0.57	0.58	0.48	0.46		
» orine »	+ 60 acqua	0.07	0.13	0.58	0.77	0.79	0.57		
	Dopo								
	15'	40'	65'	100'	115'	140'	165'	190'	210'
Quantità orine cc. . .	12	14	36	60	10	12	11	11	9
Peso specifico	1016	1012	1012	1008	1008	1020	1020	1024	1024
Sostanze solide totali gr.	0.428	0.374	0.963	1.07	0.178	0.53	0.49	0.585	0.478

Soggetto	Sostanza ingerita	Prima	Dopo						
			25'	65'	105'	145'	185'		
Gr. G.	60 cc. alcool + 60 acqua								
Alcool sangue gr. ‰		0.065	0.419	0.758	0.565	0.513	0.339		
» orine »		0	0.098	0.087	0.778	0.818	0.18		
	Dopo								
	25'	45'	65'	85'	105'	125'	145'	165'	185'
	18	13	14	24	36	20	14	10	12
	1021		1009		1013		1009		
	0.842	0.60	0.65	0.48	0.72	0.57	0.50	0.2	0.24

LETTERATURA

JANUSZKIEWICZ A., « Zeitsch. für Biologie » Bd. 56, S. 401.

CUGUSI C., « Archiv. Farmac. Sperim. », 1923, p. 150.

NICLOUX e NOWICKA, « Journ. de Phys. et de Path. », 1912, p. 296.

E. WIDMARK, *Physiological Papers dedicated to Pr. Krogh*. Levin e Munks Goard. Copenhagen, 1926.

CHABANIER e IBARRA LORING, « C. R. Soc. Biol. », I. LXXIX, p. 8.

BAGLIONI, BRACALONI, GALAMINI, « R. Acc. Lincei », vol. IV, Serie VI, fasc. 12.

PERSÓNALE ACCADEMICO

Il Presidente sen. PATERNÒ comunica all'Assemblea la dolorosa notizia della morte del Socio Straniero GÖSTA MITTAG-LEFFLER avvenuta il 7 del luglio scorso, e propone che venga dato incarico al Socio VOLTERRA di fare la commemorazione dell'insigne matematico scomparso.

L'Assemblea approva.

Comunica anche la notizia della recente scomparsa del grande chimico SVANTHE ARRHENIUS, Socio Straniero dal 1911, e propone che si mandino le condoglianze all'Accademia di Stoccolma e si dia incarico al Socio NASINI di prepararne la commemorazione.

L'Assemblea approva.

L'Accademico Segretario prof. PARRAVANO comunica i risultati delle ultime elezioni e i ringraziamenti pervenuti dai neo-eletti Soci Nazionali PALAZZO e LO SURDO, dal Socio Straniero NÖRLUND, e dai Corrispondenti GIORGI, PENSA, GHIGI, GOLA.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario prof. PARRAVANO presenta le pubblicazioni giunte in dono all'Accademia segnalando in special modo il magnifico volume « The great earthquake en 1923 in Japan ».

Il Socio PALAZZO fa omaggio di una sua Nota dal titolo « Variazioni magnetiche secolari a Massaua col contributo di recenti misure », e dell'opuscolo « L'opera scientifica di Ciro Chistoni », scritto da vari scienziati per commemorare l'insigne geologo scomparso, del quale egli tesse un breve elogio.

Il Corrisp. FRANCHI fa omaggio di una sua Nota dal titolo « Ancora sull'età degli scisti argillosi ofiolitiferi della Riviera occidentale e della Lunigiana ».

Il Socio Straniero HAGEN presenta il IX volume del « Catalogo astrografico ».

RELAZIONI DI COMMISSIONI

L'Accademico Segretario prof. PARRAVANO legge a nome dei Soci SACCO e PARONA assenti, la relazione da loro presentata per proporre alla Classe la pubblicazione della Memoria della sig.a R. ZUFFARDI COMERCI « Alcionari del bacino terziario ligure-piemontese ».

L'Assemblea approva.

PRESENTAZIONI DI PLICHI SUGGELLATI

L'Accademico Segretario prof. PARRAVANO presenta un plico suggellato, inviato dal prof. Pierucci Mariano, da conservarsi negli archivi dell'Accademia.

COMUNICAZIONI VARIE

L'Accademico Segretario Prof. PARRAVANO per invito del Presidente riferisce brevemente all'Assemblea sulle cerimonie per la commemorazione di M. Berthelot a Parigi, alle quali è intervenuto come rappresentante dell'Accademia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 novembre 1927

- AGAMENNONE G. — L'anomalia magnetica attribuita al terremoto di Cumana del 1799. (Estr. dal « Bollettino della Società Sismologica Italiana ». Vol. XXVI, fasc. III-IV). Selci, 1926. 8°, pp. 1-22.
- AMADORI L. — Secondo contributo alla conoscenza dell'azione sulle piante delle sostanze chiamate acceleratrici. (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali. Processi verbali ». Vol. XXXVI, n. IV). Pisa, 1927. 8°, pp. 1-3.
- ANUČIN A. W. — Bio-Phänologie des Bombyx Mori (L.). Leningrad, s. d. 8°, pp. 107-124.
- ANUČIN A. W. — Die Standartisation in der Landwirtschaftlichen Seidenraupenzucht. Leningrad, s. d. 8°, pp. 57-63.
- ANUČIN A. W. — Standart-Projekt der Kokons von Bacdader Weissen und Ascoli Rassen. Leningrad, s. d., 8°, pp. 67-70.
- AUSTIN G. M. — Richmond Faunal Zones in Warren and Clinton Counties, Ohio. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXX). Washington, 1927. 8°, pp. 1-18.
- BARDUZZI D. — Nell'80° genetliaco di Domenico Barduzzi. Pisa, 1927. 8°, pp. 1-42.
- BATTAGLIA M. — Akute und chronische Speicheldrüsenentzündung bei experimentellen Trypanosomiasen. (Sonderabd. aus « Centralblatt für Bakteriologie, Parasitenkunde und Infektionskrankheiten ». Band 102, pp. 382-385). Jena, 1927. 8°.
- BATTAGLIA M. — Ancora sulla tubercolosi sperimentale. (Estr. da « Pathologica »). Genova, 1927. 4°, pp. 1-3
- BATTAGLIA M. — Das Oedem bei den Trypanosomeninfektionen. (Sonderabd. aus « Centralblatt für Bakteriologie, Parasitenkunde und Infektionskrankheiten ». Band 103, pp. 267-268). Jena, 1927. 8°.
- BATTAGLIA M. — Dell'epidemia tetanica durante la guerra europea e negli anni successivi. (Estr. dagli « Annali Italiani di Chirurgia ». Anno VI, pp. 840-843). Napoli, 1927. 8°.
- BATTAGLIA M. — Di alcune febbri malariche continue. (Estr. dalla « Riforma Medica ». Anno XLIII, n. XXVII). Napoli, 1927. 8°, pp. 1-5.
- BATTAGLIA M. — Experimentelle Nephritis und Hepatitis durch Trypanosoma Brucei. (Sonderabd. aus « Centralblatt für Bakteriologie Parasitenkunde und Infektionskrankheiten ». Band. 99, pp. 468-469). Jena, 1926. 8°.
- BERRY E. W. — A New Type of Caddis Case from the Lower Eocene of Tennessee. (From the « Proceeding of the United States National Museum ». Volume LXXI). Washington, 1927. 8°, pp. 1-4.
- CAUDELL A. N. — Orthopteroid Insects from the Maritime Province of Siberia. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXI). Washington, 1927. 8°, pp. 1-7.
- CARDARELLI A. — In memoria del sommo clinico Antonio Cardarelli. Napoli, 1927. 8°, pp. 1-15.
- CARPENTER F. M. — A Fossil Insect from the Lower Permian of the Grand Canyon. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume LXXI). Washington, 1927. 8°, pp. 1-4.

- CERMENATI M. — Alessandro Volta alpinista. (Estr. dal « Bollettino del Club Alpino Italiano ». Vol. XXXIII). Torino, 1899. 8°, pp. 1-79.
- CERMENATI M. — Considerazioni e notizie relative alla storia delle scienze geologiche ed a due precursori bresciani. (Estr. dal « Bollettino della Società Geologica Italiana ». Vol. XX, fasc. IV). Roma, 1901. 4°, pp. 1-47.
- CERMENATI M. — Da Plinio a Leonardo, dallo Stenone allo Spallanzani. Discorso. Roma, 1912. 8°, pp. 1-58.
- CERMENATI M. — Evoluzione e momenti storici delle scienze geologiche. Conferenze. Roma, 1893. 8°, pp. 1-362.
- CERMENATI M. — Francesco Calzolari da Verona e le sue lettere ad Ulisse Aldrovandi. Roma, 1910. 8°, pp. 1-60.
- CERMENATI M. — Intorno il Ghini ed i suoi rapporti con Francesco Calzolari. (Estr. dagli « Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti ». Tomo LXIX, pp. 939-961). Venezia, 1910. 8°.
- CERMENATI M. — Intorno al « Mappello » di Leonardo da Vinci. Roma, 1907. 4°, pp. 1-53.
- CERMENATI M. — L'alpinismo in A. Stoppani. (Estr. dalle « Note Alpinistiche ». Vol. II). Roma, 1893. 8°, pp. 1-102.
- CERMENATI M. — La pesca degli agoni nel Lazio. (Estr. dagli « Annali di Agricoltura ». 1910). Roma, 1910. 8°, pp. 1-95.
- CERMENATI M. — La pesca nelle Valli di Comacchio e la notificazione Galli del 1854. (Estr. dagli « Atti della Commissione consultiva della pesca ». 1906). Roma, 1907. 8°, pp. 1-104.
- CERMENATI M. — La Valsissina davanti ai naturofili ed ai naturalisti. Lecco, 1901. 12°, pp. 1-51.
- CERMENATI M. — Problemi di legislazione agraria sociale. Discorso. Roma, 1917. 8°, pp. 1-34.
- CERMENATI M. — Roma e il pensiero moderno. Roma, 1895. 8°, pp. 1-59.
- CERMENATI M. — Schiller e le Alpi. (Estr. dal « Bollettino del Club Alpino Italiano ». Vol. XXXIII). Torino, 1900. 8°, pp. 1-31.
- CERMENATI M. — Sigismondo Boldoni da Bellano letterato, medico e filosofo del Seicento. Roma, 1899. 8°, pp. 1-103.
- CERMENATI M. — Ulisse Aldrovandi e l'America. (Estr. dagli « Annali di Botanica pubblicata dal prof. R. Pirota ». Vol. IV, fasc. IV). Roma, 1906. 4°, pp. 1-56.
- CERMENATI M. — Un viaggio nei monti Urali. (Estr. dal « Bollettino del Club Alpino Italiano ». Vol. XXXIII). Torino, 1900. 8°, pp. 1-70.
- CHISTONI C. — L'opera scientifica di Ciro Chistoni per L. Palazzo ed altri. Napoli, 1927. 8°, pp. 1-57.
- CIAMPAOLO R. — Etio-patogenesi dei Neoplasmi. (Estr. dal « Pensiero Medico », n. XVII). Milano, 1927. 4°, pp. 1-16.
- COCKERELL T. D. A. — Megachilid Bees from Bolivia collected by the Mulford Biological Expedition, 1921-1922. (From the « Proceedings of United States National Museum ». Vol. LXXI). Washington, 1927. 8°, pp. 1-22.
- CURRI A. — Ricordo della commemorazione del X anniversario della sua morte. Bari, 1927. 8°, pp. 1-65.
- DE CILLIS E. — I grani d'Italia. Roma, 1927. 8°, pp. 1-174.
- DE LORENZO G. e D'ERASMO G. — L'elephas antiquus nell'Italia meridionale. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli ». Vol. XVII, n. XI). Napoli, 1927. 4°, pp. 1-104.
- DUNN H. L. — Variability in the Growth of the Fetal Central Nervous System as measured by Biometric Constants. (Reprint from the « Journal of Comparative Neurology ». Vol. XLII, pp. 165-209). Philadelphia, 1926. 8°.
- DYAR H. G. and HEINRICH C. — The American Moths of the Genus *Diatraea* and Allies. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXI). Washington, 1927. 8°, pp. 1-48.
- The Great Earthquake of 1923 in Japan. Voll. I, II. Tokyo, 1923, 8°, pp. 1-xxvi, 1-615; tavole I-XI.

- EDWARDS D. L. — Spectroscopic Parallaxes of B-type Stars. (Fourth Paper): The Method of Adams and Joy. (Reprint from the «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society». Volume LXXXVII, pp. 364-387). Edinburgh, 1927. 8°.
- FAVARO G. A. — Semplificazioni di calcoli nelle riduzioni delle lastre fotografiche celesti. (Estr. dagli «Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania. Vol. XV»). Catania, 1927. 4°, pp. 1-5.
- FAVARO G. A. e RAUSI CL. — L'attività del sole nell'anno 1926. (Estr. dalle «Memorie della Società Astronomica Italiana». Vol. IV). Roma, 1927. 8°, pp. 1-14.
- FISHER W. J. — Note on Corrections to H. A. Newton's «1850 Dates» of Meteor Showers. (Reprint from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XIII, pp. 578-579). Washington, 1927. 8°.
- FISHER W. J. and WURL E. L. — The Trails of two Periodically Flickering Meteors. (Reprint from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XIII, pp. 540-546). Washington, 1927. 8°.
- FOWLER H. W. and BEAN A. B. — Notes on Fishes obtained in Sumatra, Java and Tahiti. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXI). Washington, 1927. 8°, pp. 1-15.
- FRANCHI S. — Ancora sull'età degli scisti argillosi ofiolitiferi della Riviera Occidentale e della Lunigiana. (Estr. dal «Bollettino della Società Geologica Italiana». Vol. XLVI, pp. 78-84). Roma, 1927. 8°.
- FUCINI E. — Note e appunti sul problema della stratificazione sedimentaria. I fanghi abissali. (Estr. dagli «Atti della Società Toscana di Scienze Naturali in Pisa. Memorie». Vol. XXXVIII). Pisa, 1927. 8°, pp. 1-19.
- FULCO P. — La teoria delle congruenze ed alcune sue applicazioni. Anno 1926. Civitavecchia, 1927. 4°, pp. 1-122.
- GERASIMOVIČ B. P. — On the Correction to Saha's Formula for Small Deviations from Thermodynamic Equilibrium. (Reprint from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Volume XIII, pp. 180-185). Washington, 1927. 8°.
- GERASIMOVIČ B. P. and LUYTEN W. J. — On the Distance of the Sun from the Galactic Plane. (Reprint from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XIII, n. VI, pp. 387-390). Washington, 1927. 8°.
- GILMORE C. W. — On Fossil Turtles from the Pleistocene of Florida. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXI). Washington, 1927. 8°, pp. 1-10.
- GRANATA E. — Sul clima di Pozzuoli. Pozzuoli, 1927. 8°, s. p.
- GRANDI G. — Imenotteri sicofili raccolti dal prof. Silvestri nell'Indocina, nella Cina, nella penisola Malacca e a Formosa. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di Agricoltura di Portici». Vol. XX, pp. 169-188). Portici, 1927. 4°.
- GREGORACI P. N. — Rapporti fra tubercolosi e diabete. Ediz. III. Napoli, 1927. 4°, pp. 1-307.
- GROSS W. and SHAMON E. V. — The Geology, Petrography, and Mineralogy of the Vicinity of Italian Mountain Gunnison County, Colorado. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXI). Washington, 1927. 8°, pp. 1-42.
- HRDLIČKA A. — Catalogue of Human Crania in the United States National Museum Collections. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXIX). Washington, 1927. 8°, pp. 1-127.
- HUBER L. L. — A Taxonomic and Ecological Review of the North American Chalcid-Flies of the Genus *Calimame*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXX). Washington, 1927. 8°, pp. 1-114.

- KIRK E. — *Pycnodesma*, a New Molluscan Genus from the Silurian of Alaska. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXI). Washington, 1927. 8°, pp. 1-9.
- LABATE E. — Le grandi scoperte fatte da Eleonora Labate. Monteleone di Calabria, 1927. 8°, pp. 1-18.
- LACROIX A. — L'Eucrite de Béréba (Haute-Volta) et les météorites feldspathiques en général. (Estr. da «Archives du Museum d'Histoire Naturelle». Tome I, pp. 15-58). Paris, 1926. 8°.
- LINTON E. — Notes on Cestode Parasites of Birds. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXX). Washington, 1927. 8°, pp. 1-73.
- MACALUSO E. — *Mulinella autotarante*. (Freno dinamometrico-privativa ind. $\frac{8134}{1926}$). Novara, 1927. 8°, pp. 1-54.
- MANSFIELD W. E. — Some Peculiar Fossil Forms from Maryland. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXI). Washington, 1927. 8°, pp. 1-9.
- MARSHALL W. B. — New Species of Mollusks of the Genus *Corbicula* from Uruguay and Brazil. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXII). Washington, 1927. 8°, pp. 1-7.
- MATHEWS A. P. — The Nature of Matter, Gravitation, and Licht. New York, 1927. 8°, pp. 1-XIII, 1-222.
- MAYER R. — O problema da água na agricultura portuguesa. (Separat do «Boletim da Faculdade de Direito da Universidade de Coimbra». Ano VIII). Coimbra, 1926. 8°, pp. 1-30.
- MERRILL G. E. — A Recently Found Iron Meteorite from Oakley, Idaho. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXI). Washington, 1927. 8°, pp. 1-3.
- MERRILL G. E. — Heretofore Undescribed Meteoric Irons from (1) Bolivia, South America (2), Western Arkansas, and (3) Seneca Township, Michigan. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXII). Washington, 1927. 8°, pp. 1-4.
- MILLER G. S. — The Rodents of the Genus *Plagiodontia*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXII). Washington, 1927. 8°, p. 1-8.
- MORRISON E. and MORRISON H. — The Maskell Species of Scale Insects of the Subfamily Asterolecaminae. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXI). Washington, 1927. 8°, pp. 1-42.
- OMODEI D. — Notizie sul clima della Somalia italiana meridionale e sul regime idrometrico dell'Uebi Scebeli secondo le osservazioni fatte nelle stazioni istituite da S. A. R. il Duca degli Abruzzi. Genova, 1927. 4°, pp. 1-188.
- OMODEI D. — Osservazioni meteorologiche ed idrometriche eseguite nel 1923 nelle stazioni istituite nella Somalia italiana da S. A. R. il Duca degli Abruzzi. Roma, 1926. 4°, pp. 1-111.
- OMODEI D. e EREDIA F. — Osservazioni meteorologiche eseguite nel 1922 nelle stazioni istituite nella Somalia italiana da S. A. R. il Duca degli Abruzzi. (Estr. dal supplemento agli «Annali idrografici». Vol. X). Genova, 1924. 4°, pp. 1-81.
- PADALINO F. — *Integralogy*. New York, 1927. 8°, pp. 1-126.
- PALAZZO L. — Variazioni magnetiche secolari a Massaua col contributo di recenti misure. (Estr. dagli «Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei». Anno LXXX, pp. 165-173). Roma, 1927. 4°.
- PARODI U. — *Iperplasia e ipertrofia*. (Trattato di anatomia patologica». Vol. XII). Torino, 1927. 8°, pp. 143-198.
- PIUTTI A. — L'azione della cloropirrina sulle crisalidi del baco da seta. (Estr. dal «Rend. della R. Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli». Vol. XXXIII). Napoli, 1927. 8°, pp. 1-6.
- PLANS y FREYRE J. M. — *Nociones de calculo diferencial absoluto y sus aplicaciones*. Madrid, 1924. 8°, pp. 1-278.

- I prezzi dei principali prodotti agricoli in Italia nell'anno 1926. (Estr. dalle «Notizie periodiche di statistica agraria», n. V). Roma, 1927. 8°, pp. 1-20.
- PRICE E. W. — A New Nematode, *Nematodirus Antilocaprae* from the Prong-Horn Antelope, with a Key to the Species of *Nematodirus*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXI). Washington, 1927. 8°, pp. 1-4.
- RANZI S. — Ricerche sui placodi dei Ciclostomi, Ganoidi e Teleostei con particolare riguardo al destino del placode epibronchiale del faciale. (Estr. dal «Bollettino dell'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma». Vol. IV, pp. 77-132). Livorno, 1926. 8°.
- REED L. J. — Evolutionary Changes in the Seasonal Curve of the Birth Rate. (Reprint from the «American Journal of Public Health». 1925, pp. 948-950). Baltimore, 1925. 8°.
- Per ricondurre a Roma le acque sotterranee dell'Agro. (S. A. d. B. A.). Roma, 1927. 8°, pp. 1-50.
- RUSSO A. — Lezioni di anatomia comparata. Parte generale. Catania, 1927. 8°, pp. 1-x, 1-305.
- RUSSO A. — Per un maggiore sviluppo della industria sardiniera a Catania. Catania, 1927. 8°, pp. 1-6.
- RUSSO A. — Studio sulla pesca nel Golfo di Catania. (Estr. dal «Bollettino di pesca, di piscicoltura e di idrobiologia». Anno III, fasc. IV). Roma, 1927. 8°, pp. 1-72.
- SCHMIDT P. — A Revision of the Cottoid Fishes of the Genus *Arteidiellus*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXI). Washington, 1927. 8°. pp. 1-10.
- SCIPIONI S. — La tenuta di Castel Fusano nel delta Tiberino. Roma, 1927. 8°, pp. 1-14.
- SILVESTRI F. — Contribuzioni alla conoscenza dei Grylloblattidae. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di Agricoltura di Portici». Volume XX, pp. 107-121). Portici, 1927. 4°.
- SIMION E. — Il contributo dato dalla R. Marina allo sviluppo della radiotelegrafia. Roma, 1927. 8°, pp. 1-105.
- SÖDERSTRÖM A. — Ueber evolutionistische Divergenz-Morphologie und Idealistische «phylogenetische» Morphologie. Uppsala, 1927. 4°, pp. 1-48.
- TAKAHASHI R. — Some Aphididae collected by Dr. F. Silvestri in China. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di Agricoltura di Portici». Vol. XX, pp. 147-149). Portici, 1927. 8°.
- TAVANI F. — The Analysis of Motion Relative to Space and Time. S. I. S. d. 4°, pp. 1-11.
- VANZETTI F. — Alterazioni locali della circolazione. (Trattato di anatomia patologica. Vol. XII). Torino, 1927. pp. 1-141.
- VAUGHAN T. W. — Larger Foraminifera of the Genus *Lepidocyclus* related to *Lepidocyclus* Mantelli. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXI). Washington, 1927. 8°, pp. 1-5.
- WOODS H. C. — Spectroscopic Parallaxes of 300 Stars of Spectral Class A0 — A5. (Reprint. from the «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society». Vol. LXXXVII, pp. 387-399). Edinburgh, 1927. 8°.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 20 novembre 1927 (anno VI).

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sui sottogruppi fondamentali di un gruppo.*
Nota I⁽¹⁾ del Socio Corrisp. G. SCORZA.

Durante la redazione di un trattato *Sulla teoria dei gruppi*, che da qualche tempo in qua vengo preparando, ho avuto occasione di rilevare che alle belle ricerche del prof. Cipolla *Sulla struttura dei gruppi di ordine finito* pubblicate nel « Rendiconto » e negli « Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche » di Napoli ⁽²⁾ possono essere apportati alcuni utili complementi.

Poichè la pubblicazione del trattato non potrà che tardare, indico in questa e in una Nota successiva quelle delle mie osservazioni che mi paiono più notevoli; nel far che, ritengo opportuno attenermi alle ipotesi e alla nomenclatura del prof. Cipolla, sebbene nel trattato, per ragioni metodiche, l'ipotesi che il gruppo sia d'ordine finito venga lasciata cadere e alla detta nomenclatura siano apportate delle leggere modificazioni.

1. Sia H un gruppo non abeliano e di ordine finito, di tipo τ , col centrale J_0 , e sia G un suo sottogruppo fondamentale col centrale J .

(1) Presentata nella seduta del 20 novembre 1927.

(2) Dei lavori, cui qui si allude, sono pubblicati nel detto « Rendiconto »:

a) *Sulla struttura dei gruppi d'ordine finito*, Nota I (gennaio-febbraio 1909), Nota II (maggio-luglio 1909), Nota III (maggio-giugno 1911), Nota IV (gennaio-febbraio 1912);

b) *I gruppi finiti dei primi tre tipi*, Nota I (luglio-ottobre 1914), Nota II (*ibid.*), Nota III (*ibid.*); è pubblicata invece negli « Atti » l'elegantissima Memoria: *I sottogruppi fondamentali dei gruppi di Hölder* (vol. XVII, serie 2°).

Inoltre sia I il sistema fondamentale di H costituito dagli elementi invarianti proprii di G, o, come diremo, il sistema fondamentale *corrispondente a G*.

Indichiamo:

- con λ il numero dei sistemi fondamentali di H contenuti in G;
- con λ' il numero dei sottogruppi fondamentali di H contenenti G;
- con λ'' quello dei sottogruppi fondamentali di H contenuti in G.

Naturalmente λ' sarà pure il numero dei sistemi fondamentali di H contenuti in J [loc. cit. a), I, n. 6]; e dei λ'' sistemi fondamentali corrispondenti ai sottogruppi fondamentali di H contenuti in G, uno sarà I, indi contenuto in G e in J, mentre i rimanenti $\lambda'' - 1$ (se $\lambda'' > 1$) saranno bensì contenuti in G, ma non in J. Quindi è chiaro che sarà

$$(1) \quad \lambda \geq \lambda' + \lambda'' - 1.$$

2. Adesso si indichi con τ' il tipo di G, se G non è abeliano; in caso contrario si ponga $\tau' = -2$.

Dico che in ogni caso è

$$(2) \quad \tau' \leq \lambda - \lambda' - 2.$$

Ciò è evidente, se G è abeliano, perchè allora $\tau' = -2$ e $\lambda = \lambda'$; supponiamo dunque che ciò non sia.

Allora il numero dei sistemi fondamentali di H contenuti in G, ma non in J, è $\lambda - \lambda'$, e il numero dei sistemi fondamentali di G è $\tau' + 2$. Ma ciascuno di questi sistemi, o è uno di quelli, o risulta dalla riunione di due o più di quelli, dunque è $\tau' + 2 \leq \lambda - \lambda'$, cioè sussiste la (2).

3. Sistemi fondamentali di H contenuti in G, ma non in J, ve ne sono, come abbiamo detto, $\lambda - \lambda'$. Fra di essi ve ne sono $\lambda'' - 1$, cui corrispondono sottogruppi fondamentali di H contenuti *propriamente* in G; quindi, se G non è abeliano, codesti $\lambda'' - 1$ sottogruppi fondamentali di H coincidono con altrettanti sottogruppi fondamentali di G, e se G è abeliano, è necessariamente $\lambda'' = 1$. Ora, nella prima alternativa il numero dei sottogruppi fondamentali di G è $\tau' + 2$, nella seconda alternativa è $\tau' = -2$; dunque nella prima è $\tau' + 2 \geq \lambda'' - 1$, nella seconda $\tau' + 2 = \lambda'' - 1$, ossia in entrambe

$$(3) \quad \tau' \geq \lambda'' - 3;$$

e in ogni caso esistono

$$(\tau' + 2) - (\lambda'' - 1) = \tau' - \lambda'' + 3$$

sistemi fondamentali di G per ognun dei quali il corrispondente sottogruppo fondamentale di G *non* è un sottogruppo fondamentale di H contenuto in G.

Sia ξ un elemento di uno qualunque dei $\tau' - \lambda'' + 3$ sistemi in discorso, ed x un elemento di L . Poichè x appartiene al centrale di G , ξ e ξx appartengono ad un medesimo sistema fondamentale di G [loc. cit. a), I, n. 1]; ma dico che essi non appartengono certo ad un medesimo sistema fondamentale di H .

E infatti, se ciò non fosse, ogni elemento di H permutabile con ξ sarebbe permutabile anche con ξx , indi con x ; e il sottogruppo fondamentale di H , costituito dagli elementi permutabili con ξ , sarebbe contenuto in quello costituito dagli elementi permutabili con x , cioè in G ; mentre per ipotesi quel sottogruppo *non* è contenuto in G .

Segue che ciascuno dei suddetti $\tau' - \lambda'' + 3$ sistemi fondamentali di G si spezza in almeno due sistemi fondamentali di H , e G contiene almeno

$$\lambda'' - 1 + 2(\tau' - \lambda'' + 3) = 2\tau' - \lambda'' + 5$$

sistemi fondamentali di H esterni a J ; indi, in tutto, almeno

$$2\tau' + \lambda' - \lambda'' + 5$$

sistemi fondamentali di H . Ma allora è

$$(4) \quad \lambda \geq 2\tau' + \lambda' - \lambda'' + 5,$$

e

$$(5) \quad \tau' \leq \frac{1}{2}(\lambda - \lambda' + \lambda'' - 5).$$

4. Dalla (1) discende che λ'' non può superare $\lambda - \lambda' + 1$; ma, quando è $\lambda'' = \lambda - \lambda' + 1$, le (3) e (5) non possono coesistere, se non supponendo $\tau' = \lambda - \lambda' - 2$; dunque:

Allorchè $\lambda'' = \lambda - \lambda' + 1$, è $\tau' = \lambda - \lambda' - 2$.

Ebbene supponiamo che sia $\lambda'' = \lambda - \lambda' + 1$, indi $\tau' = \lambda - \lambda' - 2$.

I sistemi fondamentali di G sono $\tau' + 2$, quelli di H , contenuti in G , ma non in J , sono $\lambda - \lambda'$. Ma qui $\tau' + 2 = \lambda - \lambda'$, dunque quei sistemi coincidono con questi, e i sottogruppi fondamentali di G sono i sottogruppi fondamentali di H contenuti propriamente in G .

Si decomponga G in sistemi laterali rispetto a J e si ponga

$$G = J\alpha_1 + J\alpha_2 + \dots + J\alpha_k,$$

dove α_i è l'elemento identico e k è l'indice di J in G .

Dico che, se α è un elemento di H esterno a G , dei prodotti

$$\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \dots, \alpha\alpha_k$$

(esterni a G) mai due potranno appartenere a un medesimo sistema fondamentale di H .

E infatti supponiamo, se è possibile, che α_i e α_j , con $i \neq j$, appartengano ad un medesimo tal sistema, I' , e sia G' il sottogruppo fondamentale di H ad esso corrispondente. Il prodotto $(\alpha_i)^{-1} \alpha_j = \alpha_i^{-1} \alpha_j$ apparterebbe a G' e G , quindi anche alla loro intersezione. Ma G' non può contenere alcun sistema fondamentale di H contenuto in G , ma non in J , perchè altrimenti il sottogruppo fondamentale corrispondente a tal sistema - sottogruppo che, per quanto precede, è contenuto in G - dovrebbe contenere il sistema I' , mentre I' , al pari dei suoi elementi α_i e α_j , è esterno a G ; dunque l'intersezione di G' e G è contenuta in J , ed $\alpha_i^{-1} \alpha_j$ sarebbe un elemento di J , cioè sarebbe, contro l'ipotesi, $J\alpha_i = J\alpha_j$.

Segue che l'indice k di J in G non supera il numero dei sistemi fondamentali di H esterni a G . Ma questo numero è $(\tau + 2) - \lambda$, dunque

$$\tau - \lambda + 2 \geq k.$$

Si osservi che, fra i sistemi fondamentali di H contenuti in J , quello cui corrisponde G , ossia I , non è certo contenuto in un sottogruppo fondamentale che corrisponda ad un sistema fondamentale di H esterno a G ; dunque, se

$$J = J_0 + I,$$

cioè, se non esiste alcun sottogruppo fondamentale di H contenente propriamente G , o, come anche diremo, se G è *massimo*, l'intersezione di G con un sottogruppo fondamentale di H che corrisponda a un sistema fondamentale che sia esterno a G è contenuta in J_0 . Allora nel ragionamento precedente si può sostituire J_0 a J e viene

$$\tau - \lambda + 2 \geq \text{indice di } J_0 \text{ in } G.$$

Ora sia G di genere ρ e, in conformità di ciò, sia

$$G^{(1)} = G, G^{(2)}, \dots, G^{(\rho)}$$

una successione di sottogruppi fondamentali di H ognuno dei quali, diverso dal primo, sia contenuto propriamente in quello che lo precede. Se $J^{(1)}$ è il centrale di $G^{(1)}$ (indi $J^{(1)} = J$), nella successione

$$G^{(1)} = G, G^{(2)}, \dots, G^{(\rho)}, J^{(\rho)}, J^{(\rho-1)}, \dots, J^{(2)}, J^{(1)} = J$$

ciascun sottogruppo diverso dal primo è contenuto in quello che lo precede, e vi è anzi contenuto certo propriamente, se esso è inoltre diverso da $J^{(\rho)}$.

Ma allora l'indice di J in G è almeno $2^{2\rho-2}$, e per conseguenza quello di J_0 in G almeno $2^{2\rho-1}$, e si può enunciare il seguente teorema:

Se ρ

$$(6) \quad \lambda'' = \lambda - \lambda' + 1$$

e G è di genere ρ , si ha

$$(7) \quad \tau - \lambda + 2 \geq 2^{2\rho-2};$$

e se G è inoltre massimo, si ha più precisamente

$$(8) \quad \tau - \lambda + 2 \geq 2^{2\rho-1}.$$

Matematica. — *Sui sottogruppi fondamentali di un gruppo.* Nota II del Socio Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicato in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Un'osservazione sulla derivazione per serie.* Nota ⁽¹⁾ del Socio Corrisp. L. TONELLI.

È stata recentemente rammentata, in questi « Rendiconti » ⁽²⁾, una proposizione di M. Bocher sulla derivazione delle serie trigonometriche. Relativamente a questa proposizione feci alcuni anni or sono, in un mio corso di Analisi Superiore (che uscirà presto per le stampe), un'osservazione che mi permetto di esporre qui.

È noto che, se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ è una serie di funzioni reali della variabile reale x , date in un intervallo (a, b) e ivi aventi tutte derivate finite, e supposto che essa serie sia convergente in (a, b) e che la serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ sia, in tale intervallo, uniformemente convergente, vale il

teorema della derivazione per serie, vale a dire, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ammette,

in ogni punto di (a, b) , derivata finita, data precisamente da $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

Questo teorema può dimostrarsi molto rapidamente, e senza introdurre ulteriori ipotesi, mediante l'integrale del Lebesgue. Negli ordinari corsi di Analisi Infinitesimale, esso invece si dimostra senza fare alcun ricorso al concetto di integrale. Così è per esempio, in quelli del Dini, dell'Arzelà, del Cesàro, del D'Arcais, del Bagnera, del Picone, ecc. Fra le varie dimostrazioni di questo tipo, una delle più semplici è quella data dal Lebesgue (a pag. 84 delle sue classiche *Leçons sur l'intégration etc.*), il quale ha

(1) Presentata nella seduta del 20 novembre 1927.

(2) G. LAMPARIELLO, *Sul teorema della derivazione per serie*. Vol. VI, p. 90.

anche osservato (sempre al luogo indicato) che l'ipotesi della convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ in tutto l'intervallo (a, b) può ridursi a quella della convergenza in un solo punto di (a, b) . In altre parole, il Lebesgue ha mostrato che, supposta la convergenza della $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ in un solo punto di (a, b) , e supposta la convergenza uniforme della $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ in tutto (a, b) , ne viene la convergenza uniforme della $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, in tutto l'intervallo indicato, e la sua derivabilità termine a termine ⁽¹⁾.

La proposizione del Bocher, cui abbiamo più sopra accennato, non è che un caso particolare del teorema ora enunciato. Essa, infatti, afferma che, se una serie trigonometrica $\frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converge in un punto x_0 , e se la serie da essa dedotta, derivando termine a termine, $\sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx)$ è uniformemente convergente in un intervallo (a, b) contenente x_0 , la serie data è essa pure uniformemente convergente in tutto (a, b) e la sua somma ha per derivata la serie delle derivate dei suoi termini ⁽²⁾.

L'osservazione che io desidero fare (e che non si applica alle serie $\sum u_n(x)$ in generale), è che, nella proposizione precedente, l'ipotesi della convergenza, in un punto x_0 di (a, b) , della serie trigonometrica data, è del tutto superflua. Dimostrerò, infatti, il seguente teorema:

Sia data una serie trigonometrica

$$(1) \quad \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

e si supponga che la serie

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx)$$

(1) La dimostrazione di questo teorema data dal LAMPARIELLO (loc. cit.) non è conclusiva nel punto più importante e più delicato — quello precisamente in cui si stabilisce la derivabilità termine a termine. Se, infatti, tale dimostrazione fosse concludente, ne verrebbe che la convergenza uniforme della serie data $\sum u_n(x)$ e la convergenza semplice della serie delle derivate $\sum u'_n(x)$ sarebbero sufficienti per la derivabilità termine a termine, il che, come è ben noto, non è affatto vero.

(2) M. BOCHER, *Introduction to the theory of Fourier's series* (« Annals of Mathematics », vol. VII [1906]). Tolgo questa citazione da HOBSON, *The Theory of functions of a real variable*.

dedottane derivando termine a termine, sia convergente uniformemente in un intervallo (a, b) . Allora la serie data è anch'essa uniformemente convergente in tutto (a, b) e la sua somma ha ivi per derivata la somma della serie dedotta.

Ed infatti, dalla supposta convergenza della serie (2) in tutto (a, b) , segue, per un noto teorema di Cantor sulle serie trigonometriche, convergenti in tutto un intervallo, che è $na_n \rightarrow 0$ e $nb_n \rightarrow 0$, per $n \rightarrow \infty$. Ora il Fatou⁽¹⁾ ha dimostrato che ogni serie trigonometrica per la quale sia $na_n \rightarrow 0$ e $nb_n \rightarrow 0$, converge quasi dappertutto. Vi sono dunque infiniti punti dell'intervallo (a, b) nei quali la (1) converge, e perciò il teorema generale di derivazione per serie, nella forma datagli dal Lebesgue, assicura la verità della nostra proposizione.

Matematica. — *Sul carattere solenoidale del tensore di Ricci per le forme ternarie.* Nota ⁽²⁾ del Socio corrisp. U. CISOTTI.

I. IL TENSORE DI RICCI E SUO DERIVATO.

È ben noto che, per le forme ternarie, i simboli di Riemann distinti e non nulli sono sei e definiscono un tensore doppio simmetrico, le cui componenti contravarianti furono definite da Ricci mediante le posizioni⁽³⁾

$$(I) \quad \alpha^{ik} = \frac{(i + 1 \ i + 2, k + 1 \ k + 2)}{a} \quad (i, k = 1, 2, 3);$$

essendo a il discriminante della forma, che rappresenta il quadrato dell'elemento lineare; in questa si considerano equivalenti gli indici che differiscono tra loro per multipli di 3. Introducendo il tensore ϵ si ha pure⁽⁴⁾:

$$(2) \quad \alpha^{ik} = \frac{1}{4} \sum_{pqrs} \epsilon^{ipq} \epsilon^{krs} (pq, rs) \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Per derivazione covariante, tenendo presente che i derivati dei tensori ϵ sono identicamente nulli⁽⁵⁾, si deduce:

$$(3) \quad \alpha_{|l}^{ik} = \frac{1}{4} \sum_{pqrs} \epsilon^{ipq} \epsilon^{krs} (pq, rs)_l,$$

(1) *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, (« Acta Mathematica », t. 30 [1906]).

(2) Presentata nella seduta del 6 novembre 1927.

(3) Cfr. LEVI-CIVITA, *The Absolute Differential Calculus*, Blakie & Son, London and Glasgow (1927), p. 199, form. (33).

(4) Cfr. loc. cit., p. 199, form. (33').

(5) La constatazione è immediata sulle formule di derivazione, come faceva rilevare Ricci nelle sue lezioni di C. D. A.

le quali definiscono le componenti miste (cioè in parte covarianti e in parte contravarianti) del tensore derivato da quello di Ricci.

2. DIVERGENZA NULLA.

La divergenza del tensore di Ricci è il vettore le cui componenti contravarianti sono ⁽¹⁾:

$$(4) \quad \beta^i = \sum_k \alpha^i_k.$$

Per (2) queste possono scriversi:

$$\beta^i = \frac{1}{4} \sum_{pqrs} \epsilon^{ipq} \epsilon^{krs} (pq, rs)_k,$$

le quali possono facilmente ridursi alle seguenti ⁽²⁾:

$$(5) \quad \beta^i = \frac{1}{2\sqrt{a}} \sum_{pq} \epsilon^{ipq} \sum_k (pq, k + 1 \ k + 2)_k.$$

Ma, per le identità di Bianchi ⁽³⁾, la somma interna è identicamente nulla, dunque:

$$(6) \quad \beta^i = 0,$$

cioè il tensore di Ricci è *solenoidale*. Dalla (5) facilmente si deduce che l'annullarsi di β^i trae come conseguenza l'annullarsi della somma interna. Si può concludere che *le identità di Bianchi per le forme ternarie sono equivalenti alla circostanza che il tensore di Ricci è solenoidale*.

(1) Cfr. loc. cit., p. 155, form. (19); oppure la mia Nota *Sulla divergenza dei tensori*. Questi « Rendiconti », Vol. VI p. 81.

(2) Basta svolgere le sommatorie rispetto a r e a s , attribuendo a ciascuna di esse, una alla volta, i valori $k, k + 1, k + 2$; si ha ordinatamente, tenendo presenti le proprietà dei tensori ϵ :

$$\begin{aligned} \beta^i &= \frac{1}{4} \sum_{pq} \epsilon^{ipq} \sum_{kr} \{ \epsilon^{irk+1} (pq, rk+1)_k + \epsilon^{irk+2} (pq, rk+2)_k \} = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{pq} \epsilon^{ipq} \sum_k \{ \epsilon^{ik+2k+1} (pq, k+2 \ k+1)_k + \epsilon^{ik+1k+2} (pq, k+1 \ k+2)_k \} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{pq} \epsilon^{ipq} \sum_k \epsilon^{ik+1k+2} (pq, k+1 \ k+2)_k = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \sum_{pq} \epsilon^{ipq} \sum_k (pq, k+1 \ k+2)_k. \end{aligned}$$

(3) Cfr. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 183, form. (17').

3. COMPONENTI COVARIANTI DELLA DIVERGENZA.

Si ha :

$$\alpha^{ik} = \sum_i^3 \alpha^{ip} a^{kq} \alpha_{pq},$$

per cui, tenendo presente che le derivate di a^{ip} e a^{kq} sono nulle :

$$\alpha_{|k}^{ik} = \sum_i^3 \alpha^{ip} a^{kq} \alpha_{pq|k},$$

e quindi, per (4) :

$$\beta^i = \sum_i^3 \alpha^{ip} a^{kq} \alpha_{pq|k}.$$

Moltiplicando per a_{ij} e sommando rispetto a i , si ottiene :

$$\beta_j = \sum_i^3 a_{ij} \beta^i = \sum_i^3 \alpha_{ipqk} a_{ij} a^{ip} a^{qk} \alpha_{pq|k},$$

ovvero :

$$\beta_j = \sum_i^3 \alpha_{pqk} a^{kq} \alpha_{pq|k} \sum_i^3 a_{ij} a^{ip} = \sum_i^3 \alpha_{pqk} a^{qk} \alpha_{j|k}.$$

Le (6) sono equivalenti a $\beta_j = 0$ cioè a

$$\sum_i^3 \alpha_{pqk} a^{qk} \alpha_{j|k} = 0.$$

A queste stesse relazioni era pervenuto, per altra via, Levi-Civita⁽¹⁾, incidentalmente, senza rilevare l'accennata notevole interpretazione del risultato, avendo il pensiero diretto ad attribuire forma intrinseca alle identità di Bianchi per le forme ternarie.

Idromeccanica. — *Sui vortici elico-conici.* Nota del Socio Corrispondente U. CISOTTI.

Sarà pubblicato in un prossimo fascicolo.

(1) ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. II. Condizioni di integrabilità e comportamento geometrico spaziale. Questi « Rendiconti », vol. XXVII, serie 5^a, 1^o sem. 1918, p. 7.

Geologia. — *Enigmi tettonici nei monti di Valdieri e lungo le valli del Gesso, della Stura e della Vermenagna.* Nota ⁽¹⁾ del Cor-
risp. S. FRANCHI.

Il contrafforte che separa le parti inferiori dei corsi montani delle Valli della Stura di Cuneo e del Gesso, nel tratto fra Valdieri ed il suo termine a Borgo S. Dalmazzo, esteso non più di 11 Km., presenta tale varietà di terreni e di fenomeni tettonici da renderlo una delle regioni più interessanti e nello stesso tempo di più difficile interpretazione delle Alpi Occidentali.

Figurano in esso i terreni secondari a *facies* cristallina (calcescisti con pietre verdi) e i loro termini di passaggio (Retico?) alle dolomie noriche fossilifere, la zona permocarbonifera cosiddetta assiale, intensamente laminata ed enormemente ridotta di potenza, ma concordante coi calcescisti, e, ad occidente di questa e da essa separata con una importante ed estesa linea di frattura con ricoprimento ⁽²⁾, una serie di pieghe imbricate, coricate verso sud-ovest, di terreni secondari a *facies* ordinaria e localmente semicristallini, nelle quali sono comprese quattro sinclinali nummulitiche, l'una dall'altra molto diverse, per costituzione litologica e per le nummuliti che presentano. Di queste una è a cerniera molto alta e come pensile, ed altre scendono invece profondamente sotto le valli che delimitano il contrafforte, presentandoci meravigliosi spaccati naturali, molto complicati e interessantissimi.

Questa serie di pieghe imbricate, già da me altra volta parzialmente illustrate ⁽³⁾, sono il proseguimento dei terreni compresi nelle due *nappes de l'Embrunais et du Briançonnais* dei geologi francesi ⁽⁴⁾, corrispondenti ai terreni della mia « zona del Colle di Tenda » delimitata verso occidente da una grande linea (superficie di ricoprimento) da me detta « linea Tenda-Argentera », la quale costituisce il limite occidentale della « zona radicale », dalla quale uscirono i *Klippen* delle valli Roja e Argentina, il piccolo ma nettissimo ricoprimento del Colle di Tenda, ancora unito alla sua radice, e quello grandissimo dell'Ubaye, oltre confine (Haug e Kilian).

(1) Presentata nella seduta del 6 novembre 1927.

(2) Che qualche geologo potrebbe credere rappresenti la superficie di scorrimento della falda del Gran San Bernardo, pur mancando la traccia di quella del Monte Rosa.

(3) Con un profilo nel lavoro in cui ho discusso l'età dei *grès d'Annot* (« Boll. R. Comitato geol. », 1916), profilo che osservazioni posteriori mi hanno portato a modificare profondamente.

(4) E. HAUG, *Contribution à une synthèse stratigraphique des Alpes occidentales*, « Bull. de la Soc. géol. de France ». Quatrième série, to. XXV, 1925.

Poco ad occidente di questa linea esiste la più ampia delle sinclinali eoceniche del contrafforte, quella della Madonna del Colletto, la quale fa già parte della serie autoctona di terreni secondari e terziari circuenti il massiccio cristallino dell'Argentera. Il banco nummulitico alla base di essa corrisponderebbe, secondo J. Boussac, ad un orizzonte superiore al Parisiano delle pieghe intermedie, cioè all'Auversiano ⁽¹⁾.

Principale scopo di questa nota è di dare notizia di un fatto interessantissimo, costituente un vero enigma tettonico, riguardante la suddetta sinclinale, nei suoi eventuali rapporti con un ristrettissimo lembo di calcari e scisti con nummuliti, parzialmente metamorfosato e con sottili veli micacei, affiorante lungo il Gesso rimpetto a Valdieri, alla base della falda settentrionale del Monte Corno e del Bec Ghincia (tav. di Valdieri al 25.000), circa 200 metri a monte dello sbocco della Comba Infernetto.

Le pieghe, le linee tettoniche e le zone di terreni, le quali sono generalmente trasversali al contrafforte tra Stura e Gesso di cui parliamo, hanno il loro proseguimento, sebbene non regolarmente e con notevoli eccezioni, dall'uno all'altro dei versanti di quest'ultima valle; invece la grande sinclinale sunnominata, quantunque i suoi limiti e gli andamenti degli strati siano nettamente trasversali, non è rappresentata sulla destra del fiume da alcuna sinclinale di terreni eocenici; e il ristretto affioramento di questo terreno citato dianzi, affiora in apparente anticlinale molto depressa, mentre è invece una sinclinale rovesciata, sotto la enorme pila di calcari regolari e in straterelli che sono il seguito di quelli scavati nelle *losiere* ⁽²⁾ del Monte La Bastia, famose per la bontà e la sottigliezza delle *lose*, e per il notevole sviluppo di veli micacei sulle loro superficie.

La sinclinale della Madonna del Colletto presenta delle singolarità morfologiche notevolissime, oltre a quelle litologiche, dovute alla grande cristallinità ⁽³⁾ dei banchi con nummuliti e di quelli del sottostante Cretaceo, al limite occidentale di essa, singolarità che meritano un breve cenno.

Per chiarire i fatti che intendo illustrare mi varrò dei due schizzi di profili della figura allegata.

Sopra un piano verticale passante lungo il piede dei monti dal lato di Valdieri, suppongo proiettato il profilo topografico fra Rocca Sperone, Cima della Piastra, Madonna del Colletto, Rocca Pissousa, e la linea limite fra Eocene e Cretaceo, distinguendo il primo terreno con tratteggio a 45°, e in questo con puntini il bano nummulitico basale, e lasciando il secondo

(1) Questa ipotesi, già da me posta in dubbio, attende ancora una esauriente discussione. Si può intanto osservare che la sinclinale più orientale, quella molto sottile e laminatissima fra due zone calcaree, della Cima dei Gros, non presenta che piccole nummuliti, laminate e deformate. Dovremmo dunque attribuirle, essa pure, all'Auversiano?

(2) Cave di lastre per la copertura dei tetti, dette nel dialetto locale *lose*.

(3) Vedasi la mia nota *Passaggi gradualì a forme cristalline, calcescisiose e marmoree del Nummulitico e del Cretaceo*, ecc. Questi « Rendiconti », vol. III, serie VI, 1° semestre 1926.

in bianco. Distinguerò inoltre con tratteggio orizzontale i terreni secondari della « zona radicale », in ricoprimento, del Colle di Tenda, limitata dalla linea A-T.

Analogamente suppongo proiettato su di un piano verticale, passante lungo il piede del versante destro del Gesso, il profilo topografico fra il Monte Corno e la Rocca Vanciarampi, e il contorno inferiore del banco

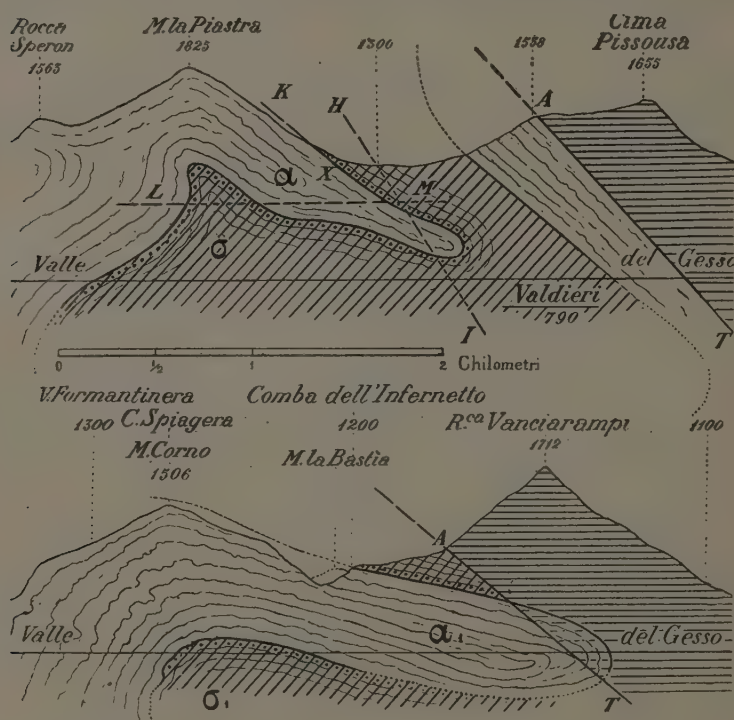


Fig. 1.

Profilo superiore: Due pieghe coniugate, una anticlinale cretacea retroversa e capofitta α e una sinclinale eocenica roversciata σ , realmente osservate sulla sinistra del Gesso.

Profilo inferiore: Ipotetica anticlinale cretacea retroversa e capofitta α , e sinclinale eocenica roversciata σ_1 , ipoteticamente collegata colla anticlinale precedente sulla destra del fiume.

nummulitico basale dell'Eocene, nonchè quello della bassa apparente anticlinale eocenica lungo il Gesso. Distinguo con gli stessi tratteggi l'Eocene basso ed alto, lasciando in bianco il Cretaceo e il Giurese, che potrebbe essere in parte rappresentato nelle falde del Monte Corno, tratteggiando qui pure orizzontalmente i terreni in ricoprimento ad oriente della traccia del piano di carreggiamento A-T.

Mentre il limite orientale dell'Eocene della sinclinale è dato da una regolarissima zona di calcari tabulari del Cretaceo, con inserzioni di rare lenti, di scisti anagenitici semi-cristallini, scendente dall'alto del Colle a tergo dell'abitato di Valdieri, con pendenza di 35-40°, il limite di ponente è accidentato da due pieghe coniugate: una anticlinale cretacea capofitta α rappresentante una piega retroversa, scendente alle falde della Cima della Piastra, seguita da una sinclinale eocenica rovesciata σ , quali risultano dal profilo superiore dell'annessa figura. Da esso si vede pure che il contorno di quest'ultima piega, anzichè volgere a levante, per raggiungere sotterraneamente il limite orientale, volge a ponente scostandosene, in modo da fare supporre che la massa dell'Eocene si allarghi sensibilmente in profondità, sotto le alluvioni del Gesso, probabilmente assai più di quanto io abbia potuto accennare nello schizzo, per ragioni di spazio.

Come si disse, il ristretto lembo d'oltre Gesso, foggiato in apparente anticlinale, coperta con perfetta concordanza dai calcari a lastre del Cretaceo, non può avere nessun collegamento visibile coll'Eocene della Cima della Spiagera, a sud di Monte Corno, rappresentato sulla carta al 400.000, il quale è in continuità del banco nummulitico basale dell'Eocene che si estende fino al mare, alla Mortola. Così, a prima vista, l'unico collegamento possibile di essa sembrerebbe dover essere coll'Eocene della sinclinale della Madonna del Colletto, al disotto dell'alluvione del Gesso.

Ma come potremo noi immaginare che questa grande e singolarissima sinclinale, nel breve spazio attraverso la pianura del Gesso, larga al più 600 metri, si trasformi in una sinclinale rovesciata così ridotta? Riflettendoci un po' si viene alla conclusione che tale trasformazione è assolutamente inconcepibile.

Per la conoscenza che io ho dei dintorni di Entracque e di Valdieri, posso escludere in modo assoluto che l'Eocene della destra del Gesso possa avere un riaffioramento qualsiasi nei dintorni di quel villaggio attraverso la massa del Monte Corno; perciò l'unico collegamento che noi possiamo immaginare si è col banco nummulitico basale dell'Eocene, affiorante a sud del Monte Corno, e costituente il ciglio delle ripide balze, cingenti la Comba dell'Infernetto: per cui bisognerebbe supporre la esistenza, sulla destra del Gesso, di una piega retroversa α , del Cretaceo, analoga a quella visibile anche a grande distanza sulla sinistra, ma molto più ampia, la quale comprendesse tutta la massa dei calcari a lastre del Monte Corno e della Comba dell'Infernetto, la quale piega sia stata troncata, nella sua estremità orientale, dalla grande frattura Colle di Tenda-Argentera, come è indicato nel profilo inferiore della figura (linea A-T).

Questa ipotesi, geometricamente possibile, può sembrare poco accettabile, per la difficoltà che si ha di immaginare una piega retroversa di tanto maggiore ampiezza come trasformazione, a così poca distanza, di quella molto minore, osservata sulla sinistra, la quale dovrebbe emanare dal fascio di

pieghe di terreni giuresi e cretacei dei dintorni di Entracque, molto complesso e poco decifrabile, anche a causa della povertà di fossili.

Ma, a rigore, più che pel fatto locale, si rimane dubbiosi quando si rifletta alla necessaria prosecuzione che si dovrà supporre, verso sud, della piega retroversa, della quale per contro o di alcun che di analogo, attraverso le valli più meridionali non si è finora constatata la esistenza.

Nello schizzo di profilo inferiore io ho tracciato l'ipotetico collegamento dell'Eocene della sinclinale rovesciata della sponda destra del Gesso mediante una linea di piega anticlinale retroversa α_1 del Cretaceo, la quale sarebbe molto analoga a quella realmente osservata in sinistra del fiume, e indicata nel profilo superiore.

Se in questo profilo si suppone, per un momento, che la valle del Gesso sia rappresentata dalla linea L-M, e che la linea Tenda-Argentera sia rappresentata dalla linea H-I, si verrebbe ad avere una sinclinale rovesciata e una piega retroversa come quelle di oltre Gesso; e l'Eocene della sommità del Monte Corno potrebbe essere rappresentato dal prolungamento del limite occidentale della sinclinale eocenica verso l'alto, cioè verso la Cima della Piastra (linea H-X).

Questa osservazione può far ritenere, per analogia, accettabile l'ipotesi sopra riferita, per spiegare il singolare affioramento di Nummulitico σ_1 di oltre Gesso; ma riflettendo alla regolarità degli andamenti della parte autoctona dell'Eocene e del sottostante Cretaceo per vari chilometri nel versante destro del Vallone della Trinità, sopra Entracque, non mi posso togliere dalla mente gravi dubbi sulla accettabilità di essa. I profili già molto complicati e quasi indecifrabili, attraverso i terreni autoctoni e carreggiati, diventerebbero del tutto enigmatici.

Quello su cui invece non può rimanere alcun dubbio è sulla esistenza di una grande frattura lungo il Gesso, in grazia della quale le masse già ripiegate, a sud e a nord del fiume, hanno potuto subire sollecitazioni di intensità e modalità molto diverse, assumendo profili disparatissimi, contemporaneamente ad importanti movimenti relativi, tanto nel senso verticale che in quello orizzontale, dei quali rimangono testimoni di significato indiscutibile.

Cosicchè allo stato attuale delle nostre conoscenze si può affermare che noi siamo ancora incerti sulla interpretazione che convenga dare all'affioramento eocenico di oltre Gesso, e che noi siamo dinanzi ad un enigma tettonico, interessante i terreni della serie autoctona immediatamente ad ovest del limite della zona radicale di ricoprimento Tenda-Argentera. Le spinte immani di questa sono ad ogni modo sufficienti per darci la spiegazione di così grandi e singolari complicazioni tettoniche.

Numerosi altri enigmi di natura tettonica, per non parlare di quelli, purtroppo numerosi, dipendenti dalla povertà in fossili dei terreni giuresi e cretacei e dalla uniformità litologica di vari orizzonti di essi, si osservano nei due versanti e lungo il fondo della Valle del Gesso e della Vermenagna.

Pure molto enigmatico è il modo di presentarsi, nel versante settentrionale della Cima Pissousa, poco sopra e parallelamente al limite della sinclinale della Madonna del Colletto, nel versante della Stura, di una sottile ed estesa zona di conglomerati, con abbondanti elementi di porfidi e con scisti anagenitici, con apparenza di intercalazione fra i banchi di calcari marmorei scendenti dalle Rocce del Sartier. L'identità litologica coi conglomerati a *Nummulites perforatus* delle due sinclinali, le quali più a levante sono solo seporate dai grandi lastroni di calcari marmorei della Rocca Sabench (1670), ci dicono chiaramente che si tratta di una terza sinclinale eocenica, pizzicata e laminata, la più occidentale delle tre che presentano quel tipo litologico singolarissimo, pel quale il Taramelli, scrivendo sulle acque del Bandito, dove giunge l'estremità della più estesa e più orientale di esse, sulla destra del Gesso, credette si trattasse di Permiano.

Altri enigmi sono costituiti dall'apparizione, a guisa di *Klippen*, in mezzo a terreni giuresi e cretacei vivamente ripiegati, di lembi e zone di varia grandezza dei terreni più antichi della serie secondaria e forse anche permiani, come nel Vallone Bucciassa, poco sopra Amdonno, ai Tetti della Reina, rimpetto a questo villaggio oltre il Gesso e nella falda occidentale del Morret Grande, a sud-est di Moiola. Lo stesso si può dire delle frequenti lenti, più o meno estese, di carnioli con calcari dolomitici identici a quelli del Trias, tanto frequenti, in mezzo ai calcari marmorei, fra Monte Brutto, Andonno e la Cima dei Gros, alle cui falde nord-orientali esiste pure, regolarmente inserita questa, fra calcari marmorei e dolomie cristalline certamente giuresi, una estesa lente di breccie poligeniche identiche a quelle del Lias.

Mi limiterò a fare cenno di alcuni fra i più chiari ed importanti spostamenti relativi dei due versanti delle valli Gesso e Vermezzagna, dovuti a movimenti posteriori a quelli che produssero l'intenso ripiegamento e le grandi linee di frattura, dirette approssimativamente nord-ovest sud-est, del fascio Colle di Tenda-Argentera.

La zona permo-carbonifera assiale, la quale, molto laminata e ridotta di potenza, attraversa il contrafforte di cui parliamo nella bassura del Colle del Firat, presentando l'importante contatto anormale verso occidente già citato, scende al Gesso ad Aradolo inferiore, sotto la chiesa della Madonna Bruna. Se essa seguisse la sua direzione, dovrebbe apparire sulla destra del Gesso proprio a levante del Tetto Piano (tav. di Borgo S. Dalmazzo al 25.000); invece gli scisti sericitici grigio-verdognoli ondulati, tipici di quel terreno, affiorano sulla sponda destra sotto le alluvioni del terrazzo della sponda destra, per oltre un chilometro e mezzo, fin presso la cartiera Pirinoli; mentre dal lato sinistro, sopra la carrozzabile Borgo S. Dalmazzo-Valdieri, e a distanza non superiore ad un centinaio di metri, affiorano i calcari cristallini, rappresentanti il Trias superiore e i Calcescisti con breccie poligeniche del Lias a *facies* piemontese.

Questi fatti indicano chiaramente l'esistenza di una grande frattura sotto il corso del Gesso e nascosta dalle alluvioni, secondo la quale perciò dev'essere avvenuto uno spostamento relativo dei due versanti non inferiore a 1500 metri.

Si deve notare che noi siamo in una regione di grandi dislocazioni e poco distante dalla falda di ricoprimento di Permiano, da me segnalata fin dal 1908 tra la Fornace Chiappello e S. Antonio, già indicata nella carta geologica al 400.000, ricoprimento molto chiaro nei suoi limiti, ma assai enigmatico nella sua genesi dinamica.

In questa carta è pure distinta, sebbene in modo imperfetto, la zona di dolomie noriche avente direzione trasversale al corso della Vermenagna, a levante di Roccavione (Rocca Dormiosa), prospiciente a poca distanza, alle falde calcescitose con pietre verdi fra questo abitato ed i Tetti Giordana, nel versante sinistro della Vermenagna.

Evidentemente, anche in corrispondenza della parte inferiore di questa valle deve esistere una importante frattura, pressochè normale a quella della Valle del Gesso, la quale ha reso completamente indipendenti sia la costituzione che la tettonica dei terreni dei due versanti di essa.

In questi due casi però la parte enigmatica riguarderebbe semplicemente la precisa posizione delle due grandi fratture e i loro possibili prolungamenti, essendo la loro esistenza indiscutibile, come causa necessaria e sufficiente delle profonde differenze di costituzione litologica e di struttura tettonica e delle grandi variazioni di andamenti stratigrafici, quali si osservano, a così poca distanza, nei versanti prospicienti delle due valli.

Fisiologia. — *Sul valore nutritivo delle sostanze azotate di alcuni generi alimentari conservati. Ricerche sperimentali sui ratti albin.* Nota ⁽¹⁾ del CORRISP. S. BAGLIONI e di L. SETTIMJ.

Nella presente Nota esponiamo i risultati di ricerche fatte allo scopo di stabilire, se i prodotti azotati solubili ed insolubili, nell'acqua lievemente acidulata, di alcuni generi conservati (formaggio pecorino romano, baccalà, funghi porcini) abbiano valore alimentare ⁽²⁾.

La parte solubile del formaggio si otteneva portando alla ebollizione in pentola di terraglia gr. 100 di formaggio, finemente grattugiato, con gr. 500 di acqua. Dopo due o tre minuti di ebollizione, rimescolando continuamente, si produce in seno al liquido una massa coagulata. Si filtrava il tutto ed il filtrato si evaporava fino a secco in stufa a 100°. Tale estratto acquoso, ricco in cloruro di sodio (25 %), contiene tutte le sostanze azotate solubili del formaggio. Esso è costituito per la massima parte da albumose, peptoni e aminoacidi, fra questi si nota il triptofano libero.

La parte insolubile in acqua è costituita essenzialmente da caseina, non contiene albumose, nè peptoni, nè aminoacidi liberi.

Con identico procedimento si estraevano le sostanze solubili e quelle insolubili del baccalà e dei funghi porcini secchi. La parte solubile del baccalà contiene albumose, peptoni e aminoacidi, fra questi si nota triptofano libero. La parte insolubile del baccalà non contiene albumose, nè peptoni, nè aminoacidi liberi.

La parte solubile dei funghi porcini è costituita, prevalentemente, da aminoacidi liberi (leucina, asparagina, glutamina, tirosina) da piccole quantità di urea e derivati purinici. Il prodotto commerciale di caseina idrolizzata non contiene peptoni, ma contiene aminoacidi in abbondanza e fra questi triptofano libero.

Il metodo delle ricerche è stato quello di sottoporre i ratti albin tenuti in speciali gabbie ⁽³⁾, prima ad una alimentazione con sostanze nutritive prive di azoto, per conoscere esattamente il consumo basale di azoto (vedi tabella I), poi alimentati con pastone misto contenente la sostanza azotata solubile o insolubile da sperimentare.

(1) Presentata nella seduta del 6 novembre 1927.

(2) L. SETTIMJ, *Sulla trasformazione dei composti azotati (proteine) nei generi alimentari conservati.* «Rend. Acc. Lincei», vol. I, serie 6^a, I sem., fasc. 7^o, 1925.

(3) S. BAGLIONI, *Ricerche sugli effetti dell'alimentazione maidica, ecc.* «Rend. Acc. Lincei», 1913, p. 721.

TABELLA I.

*Composizione percentuale del puslone: Amido (maiz), gr. 69.00; Strutto, 30.45; Cellulosa, 4.00; Cloruro di sodio, 6.55.
Ogni gr. contiene: gr. 0.0007 di N e gr. 0.0655 di NaCl.*

Ratto albino	Mese e Giorno	Alimento assunto gr.	Azoto ingerito gr.	Azoto emesso con le feci gr.	Azoto assorbito gr.	Azoto emesso con le urine gr.	Bilancio giornaliero gr.	Feci emesse gr.	Urina emessa cm. ³	NaCl ingerito gr.	NaCl emesso gr.	Pe-o del ratto gr.	Aumento o diminuzione in peso o/o
H	X-13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	160	
	X-15	22.00	0.0154	0.025	— 0.0096	0.1340	— 0.1436	1.00	59	1.440	1.22	155	
	X-17	21.00	0.0147	0.022	— 0.0073	0.1150	— 0.1223	0.95	70	1.370	1.13	150	
	X-19	10.50	0.0073	0.009	— 0.0017	0.0520	— 0.0537	0.42	31	0.687	0.64	147	— 8.10
Media giornaliera		8.91	0.0062	0.0093	— 0.0032	0.0501	— 0.0532	0.395	26.6	0.4161	0.4983		
I	X-13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	180	
	X-15	20.50	0.0143	0.0224	— 0.0081	0.1690	— 0.1771	0.80	56	1.340	1.20	170	
	X-17	19.50	0.0136	0.0200	— 0.0064	0.1580	— 0.1644	1.00	60	1.270	1.10	162	
	X-19	11.00	0.0077	0.0089	— 0.0012	0.0750	— 0.0762	0.50	27	0.720	0.70	158	— 12.20
Media giornaliera		8.50	0.0059	0.0085	— 0.0009	0.0670	— 0.0696	0.383	23.8	0.555	0.60		

TABELLA II.

*Composizione percentuale del puslone: Parte sol. in acqua di formaggio pecorino, gr. 15.00; Strutto, 27.00; Amido (maiz), 45.00; Cellulosa, 4.00; NaCl., 9.00.
Ogni gr. contiene: gr. 0.0126 di N e gr. 0.09 di NaCl.*

H	Mese e Giorno	Alimento assunto gr.	Azoto ingerito gr.	Azoto emesso con le feci gr.	Azoto assorbito gr.	Azoto emesso con le urine gr.	Bilancio giornaliero gr.	Feci emesse gr.	Urina emessa cm. ³	NaCl ingerito gr.	NaCl emesso gr.	Pe-o del ratto gr.	Aumento o diminuzione in peso o/o
H	X-19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	147	
	X-21	22	0.2772	0.0380	+ 0.2392	0.2118	+ 0.0274	2.04	90	1.98	1.60	149	
	X-23	25	0.3150	0.0390	+ 0.2760	0.2380	+ 0.0180	1.95	90	2.25	1.98	149	
	X-25	23	0.2898	0.0360	+ 0.2536	0.2430	+ 0.0100	2.00	90	2.07	1.76	149	
Media giornaliera	X-27	23.2	0.2920	0.0340	+ 0.2580	0.2410	+ 0.0170	2.00	92	2.08	1.85	150	+ 2.00
		11.6	0.1467	0.0183	+ 0.1284	0.1192	+ 0.0092	0.998	45.25	1.047	0.898		

Ratto albino	Mese e Giorno	Alimento assunto gr.	Azoto ingerito gr.	Azoto emesso con le feci gr.	Azoto assorbito gr.	Azoto emesso con le urine gr.	Bilancio giornaliero gr.	Feci emesse gr.	Urina emessa cm. ³	NaCl ingerito gr.	NaCl emesso gr.	Peso del ratto gr.	Aumento o diminuzione in peso %
I	X-19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	158	
	X-21	27	0.3402	0.0280	+ 0.3122	0.2260	+ 0.0862	1.85	90	2.43	2.00	161	
	X-23	28	0.3328	0.0300	+ 0.3228	0.3200	+ 0.0028	1.90	102	2.52	2.10	162	
	X-25	26.50	0.3339	0.0260	+ 0.3079	0.2150	+ 0.0629	1.97	90	2.38	1.95	162	
	X-27	28.20	0.3570	0.0250	+ 0.2350	0.2600	+ 0.0850	2.10	92	2.53	2.08	163	+ 3.1
Media giornaliera		13.71	0.1727	0.0136	+ 0.1591	0.1310	+ 0.0281	0.977	46.75	1.23	1.01		

TABELLA III.

Composizione percentuale del pastone: Caseina, gr. 15.00; Strutto, 27.00; Amido (maiz), 45.30; Cloruro di sodio, 8.70.
Ogni gr. contiene: gr. 0.0238 di N e gr. 0.087 di NaCl.

H	X-27	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	150	
	X-29	14.00	0.3332	0.0320	0.3012	0.1980	+ 0.1032	1.30	50	1.218	1.070	151	
	X-31	16	0.3868	0.0350	0.3458	0.2200	+ 0.1258	1.50	52	1.392	1.290	152	
	XI-2	13.50	0.3213	0.0300	0.2913	0.2000	+ 0.0913	0.80	52	1.174	0.910	153	
	XI-4	15.00	0.3570	0.0390	0.3180	0.2160	+ 0.1020	0.85	50	1.305	1.200	154	+ 2.6
Media giornaliera		7.31	0.1740	0.0170	0.1570	0.1042	+ 0.0528	0.551	25.5	0.6361	0.5587		
I	X-27	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	162	
	X-29	14.50	0.3451	0.0410	0.3041	0.1900	+ 0.1141	1.50	53	1.2615	1.21	164	
	X-31	15.00	0.3570	0.0420	0.3150	0.1970	+ 0.1180	1.60	54	1.3050	1.25	165	
	XI-2	14.50	0.3451	0.0450	0.3001	0.2500	+ 0.0500	0.90	58	1.2615	1.23	165.5	
	XI-4	15.50	0.3689	0.0480	0.3209	0.2400	+ 0.0809	0.87	60	1.3485	1.27	166	+ 2.4
Media giornaliera		7.43	0.1770	0.0212	0.1550	0.1096	+ 0.0454	0.608	24.37	0.6470	0.62		

TABELLA IV.

Composizione percentuale del pastone: Cascina digerita, gr. 15,00; Strutto, 27,00; Amido (maiz), 49,92; Cellulosa, 4,00; Cloruro di sodio, 4,08. Ogni gr. contiene: gr. 0,01957 di N e gr. 0,0408 di NaCl.

Ratto albino	Mese e Giorno	Alimento assunto gr.	Azoto ingerito gr.	Azoto emesso con le feci gr.	Azoto assorbito gr.	Azoto emesso con le urine gr.	Bilancio giornaliero gr.	Feci emesse gr.	Urina emessa cm. 3	NaCl ingerito gr.	NaCl emesso gr.	Peso del ratto gr.	Aumento o diminuzione in peso gr.
H	XI-6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	145	
	XI-8	24	0,4696	0,0140	0,4556	0,4000	+ 0,0556	0,98	58	0,9792	1,120	148	
	XI-10	20,50	0,4013	0,0200	0,3813	0,3150	+ 0,0663	0,80	40	0,8486	0,800	150	
	XI-12	20	0,3914	0,0160	0,3754	0,3050	+ 0,0704	0,78	41	0,8160	0,790	151	
	XI-14	20,50	0,4013	0,0210	0,3803	0,3100	+ 0,0703	0,80	38	0,8486	0,820	152	+ 4,6
Media giornaliera		10,61	0,2079	0,0088	0,1990	0,1662	+ 0,0328	0,42	22,10	0,4365	0,441		
I	XI-6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	155	
	XI-8	30	0,5871	0,0300	0,5571	0,4550	+ 0,1021	1,04	64	1,224	1,200	159	
	XI-10	22,50	0,4403	0,0220	0,4183	0,3330	+ 0,0853	0,90	48	0,918	0,880	161	
	XI-12	22,00	0,4305	0,0210	0,4095	0,3050	+ 0,1045	0,85	46	0,897	0,853	162	
	XI-14	23	0,4501	0,0250	0,4251	0,3300	+ 0,0951	0,93	47	0,938	0,910	163,5	+ 4,8
Media giornaliera		12,18	0,2385	0,0122	0,2262	0,1778	+ 0,0484	0,465	25,62	0,4971	0,480		

TABELLA V.

Composizione percentuale del pastone: Estratto acquoso (secco) di baccala, gr. 19,15; Strutto, 28,00; Amido (maiz), 43,00; Cellulosa, 4,00; NaCl 5,85. Ogni gr. contiene: gr. 0,0101 di N e gr. 0,0585 di NaCl.

H	Mese e Giorno	Alimento assunto gr.	Azoto ingerito gr.	Azoto emesso con le feci gr.	Azoto assorbito gr.	Azoto emesso con le urine gr.	Bilancio giornaliero gr.	Feci emesse gr.	Urina emessa cm. 3	NaCl ingerito gr.	NaCl emesso gr.	Peso del ratto gr.	Aumento o diminuzione in peso gr.
H	XI-16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	143	
	XI-18	26,50	0,2676	0,0200	0,2476	0,2010	+ 0,0466	66	0,80	1,5502	1,340	145	
	XI-20	24,00	0,2424	0,0180	0,2244	0,1810	+ 0,0434	52	0,85	1,4040	1,210	146	
	XI-22	18,50	0,1868	0,0120	0,1748	0,1420	+ 0,0328	50	0,80	1,0822	0,84	147	+ 2,8
Media giornaliera		11,50	0,1161	0,0066	0,1078	0,0873	+ 0,0205	26	0,408	0,6727	0,439		

Ratto albino	Mese e Giorno	Alimento assunto	Azoto ingerito	Azoto emesso con le feci	Azoto assorbito	Azoto emesso con le urine	Bilancio giornaliero	Feci emesse	Urina emessa	NaCl ingerito	NaCl emesso	Peso del ratto	Aumento o diminuzione in o/o
I	XI-10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	153	
	XI-16	29.50	0.2979	0.0220	0.2759	0.2010	+ 0.0749	64	0.85	1.7257	1.4000	156	
	XI-20	26.50	0.2676	0.0220	0.2456	0.2120	+ 0.0336	64	0.85	1.5502	1.230	157	
	XI-22	23.00	0.2323	0.0200	0.2123	0.1800	+ 0.0323	48	0.85	1.3455	1.060	158	+ 3.2
Media giornaliera		13.16	0.1329	0.0106	0.1223	0.0988	+ 0.0235	29.3	0.425	0.7702	0.615		

TABELLA VI.

Composizione percentuale del pastone: Parte insol. baccalà (in acqua), gr. 15.00; Strutto, 28.00; Amido (maiz), 48.00; Cellulosa, 4.00; Cl. di sodio, 5.00
Ogni gr. contiene: gr. 0.021 di N e gr. 0.050 di NaCl.

H	XI-24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	142	
	XI-26	17.00	0.3570	0.0270	0.3300	0.2410	+ 0.0890	50	0.75	0.850	0.840	145	
	XI-28	15.50	0.3255	0.0260	0.2995	0.1930	+ 0.1065	51	0.72	0.775	0.765	147	
	XI-30	15.00	0.3150	0.0240	0.2910	0.1800	+ 0.1110	51	0.70	0.750	0.700	148	+ 4.2
Media giornaliera		7.91	0.1662	0.0128	0.1534	0.1023	+ 0.0511	25.3	0.361	0.3958	0.3841		
I	XI-24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	151	
	XI-26	18.00	0.3780	0.0310	0.3470	0.2400	+ 0.1070	52	0.80	0.900	0.800	154	
	XI-28	17.00	0.3570	0.0300	0.3270	0.2190	+ 0.1080	52	0.80	0.850	0.800	156	
	XI-30	16.50	0.3465	0.0320	0.3145	0.2370	+ 0.1095	52	0.75	0.825	0.790	158	+ 4.6
Media giornaliera		8.53	0.1802	0.0155	0.1647	0.1160	+ 0.0487	26	0.391	0.429	0.398		

TABELLA VII.

Composizione percentuale del pastone: Parte insol. in H₂O dei funghi, gr. 21.00; Strutto, 25.00; Cellulosa, 6.00; Amido (maiz), 47.50; Cl. di sodio, 0.50. Ogni gr. contiene: gr. 0.008 di N e gr. 0.005 di NaCl.

Ratto albino	Mese e Giorno	Alimento assunto gr.	Feci emesse gr.	Urine emesse cm. 3	Azoto Ingerito gr.	Azoto emesso con le feci gr.	Azoto assorbito gr.	Azoto emesso con le urine gr.	Bilancio giornaliero gr.	NaCl ingerito gr.	NaCl emesso gr.	Peso del ratto gr.	Aumento o diminuzione in peso gr.
A	IV-27	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	103	— 3.8
	IV-29	23	3.50	6	0.1840	0.0955	0.0885	0.0819	+ 0.0066	0.125	0.0576	107	
	V-1	8	2.00	8	0.0640	0.0576	0.0064	0.0756	— 0.0092	0.040	0.028	100	
	V-3	12.50	2.50	4	0.100	0.0700	0.0300	0.0500	— 0.0200	0.062	0.032	100	
	V-5	12.00	2.50	4	0.0960	0.0600	0.0360	0.0490	— 0.0130	0.060	0.030	99	
Media giornaliera		6.93	1.31	2.75	0.0542	0.0353	0.0201	0.0320	— 0.0136	0.0358	0.0083		
B	IV-27	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	122	— 1.6
	IV-29	30.50	4.50	12	0.2440	0.1160	0.1280	0.0906	+ 0.0374	0.152	0.0814	126	
	V-1	20.00	3.00	8	0.1600	0.0978	0.0622	0.0570	+ 0.0052	0.100	0.0600	127	
	V-3	14.00	2.75	6	0.1120	0.0820	0.0300	0.0400	— 0.0010	0.070	0.0400	122	
	V-5	13.00	2.50	6	0.1040	0.0650	0.0390	0.0430	— 0.0040	0.065	0.0400	120	
Media giornaliera		9.6875	1.343	4	0.0775	0.0451	0.0324	0.0288	+ 0.0036	0.0481	0.0276		

— 382 —

TABELLA VIII.

Composizione percentuale del pastone: Parte solub. in H₂O dei funghi, gr. 20.00; Strutto, 23.00; Cellulosa, 6.00; Amido (maiz), 50.50; Cl. di sodio, 0.50. Ogni gr. contiene: gr. 0.01 di N e gr. 0.005 di NaCl.

A	V-9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	91	+ 5.4
	V-11	11.00	2.00	6	0.1110	0.040	0.070	0.056	+ 0.014	0.055	0.040	95	
	V-13	13.00	2.20	10	0.130	0.044	0.086	0.068	+ 0.018	0.065	0.050	96	
	V-15	13.00	2.20	10	0.130	0.040	0.090	0.071	+ 0.019	0.065	0.051	96	
	V-17	12.60	2.10	10	0.125	0.046	0.079	0.072	+ 0.007	0.062	0.050	96	
Media giornaliera		6.187	1.062	4.50	0.062	0.021	0.041	0.033	+ 0.008	0.0308	0.0238		
B	V-9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	112	+ 5.3
	V-11	12	2.25	6	0.120	0.050	0.070	0.064	+ 0.006	0.060	0.050	115	
	V-13	14.50	2.50	10	0.145	0.058	0.087	0.071	+ 0.016	0.072	0.060	118	
	V-15	16.00	2.80	10	0.160	0.062	0.098	0.087	+ 0.011	0.090	0.080	118	
	V-17	15	2.40	10	0.150	0.056	0.094	0.089	+ 0.003	0.075	0.060	118	
Media giornaliera		7.18	1.243	4.50	0.0718	0.0282	0.0436	0.0388	+ 0.0048	0.0371	0.031		

Conclusioni:

1° La sostanza azotata contenuta nella parte solubile, in acqua acidulata, del formaggio, del baccalà secco e dei funghi porcini secchi e la sostanza azotata contenuta nella parte insolubile in acqua acidulata del formaggio, del baccalà, della caseina e della caseina idrolizzata del commercio, è capace non solo di mantenere in equilibrio il bilancio dell'azoto dell'organismo dei ratti albin, ma permette anche un immagazzinamento di azoto ed un aumento del peso corporeo.

2° La maggiore percentuale di aumento di peso corporeo si ottenne con l'alimentazione mista contenente la caseina idrolizzata, la parte insolubile del baccalà e la parte solubile dei funghi.

3° La sostanza azotata contenuta nella parte insolubile in acqua dei funghi, non è capace di mantenere in equilibrio nè il bilancio dell'azoto, nè il peso dell'organismo dei ratti albin.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle funzioni di varietà vettoriale.* Nota⁽¹⁾ di D. GRAFFI, presentata dal Socio Corrisp. P. BURGATTI.

In fisica matematica si presentano talvolta grandezze scalari o vettoriali funzioni d'un vettore \mathbf{v} , che indicheremo rispettivamente con $m = \varphi(\mathbf{v})$ e $\mathbf{u} = f(\mathbf{v})$. Per queste funzioni, seguendo i concetti già introdotti da Burali-Forti e Marcolongo in *Analyse vectorielle générale*, si possono definire le operazioni fondamentali che seguono.

Consideriamo il rapporto:

$$\frac{\varphi(\mathbf{v} + h\mathbf{a}) - \varphi(\mathbf{v})}{h}$$

e passiamo al limite per h tendente allo zero. Questo limite, supposto che esista, fissato \mathbf{v} e φ dipende solo da \mathbf{a} .

Potremo scrivere così:

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{v} + h\mathbf{a}) - \varphi(\mathbf{v})}{h} = \frac{d\varphi}{d\mathbf{v}} \mathbf{a}.$$

A questa operazione indicata dal simbolo $\frac{d\varphi}{d\mathbf{v}}$ daremo il nome di *deri-*

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1927.

vata della funzione rispetto al vettore \mathbf{v} . Analogamente per il vettore $\mathbf{u} = f(\mathbf{v})$ si avrà:

$$(2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{v} + h\mathbf{a}) - f(\mathbf{v})}{h} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{v}} \mathbf{a}.$$

All'operazione $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{v}}$ che, come è facile verificare, è una omografia vettoriale è ben logico dare il nome di *derivata del vettore \mathbf{u} rispetto al vettore \mathbf{v}* .

Ma nei problemi di fisica ereditaria si presentano anche grandezze scalari e grandezze vettoriali funzioni di tutti i valori che un certo vettore $\mathbf{v}(t)$, funzione di t , assume al variare di t nell'intervallo (a, b) . Queste grandezze si sogliono indicare, seguendo le già usate notazioni di Volterra, con $M = \Phi(\mathbf{v}_a^b(t))$ e $\mathbf{U} = F(\mathbf{v}_a^b(t))$; ma qui per semplicità tipografica i limiti a e b saranno sottintesi⁽¹⁾.

Alla $\mathbf{v}(t)$ daremo il nome di *varietà vettoriale* a una dimensione e alla M e \mathbf{U} rispettivamente il nome di *numero o vettore funzione di una varietà vettoriale ad una dimensione*.

Ci proponiamo di svolgere gli elementi fondamentali della teoria di queste funzioni in modo analogo a quello usato dal Volterra per la trattazione delle ordinarie funzioni di linea.

In primo luogo occorre estendere alle funzioni di una varietà vettoriale i concetti di derivata stabiliti di sopra per le funzioni di vettori.

Considererò ora soltanto le funzioni $\mathbf{U} = F(\mathbf{v}(t))$ giacchè i risultati si estendono facilmente alle funzioni scalari, come poi si vedrà.

Consideriamo dunque il vettore $\mathbf{U} = F(\mathbf{v}(t))$. Prendiamo un intervallo (μ, ν) di ampiezza b interno all'intervallo (a, b) e consideriamo un vettore $\mathbf{w}(t)$ nullo in (a, μ) e in (ν, b) uguale a $\mathbf{w}(t)\mathbf{p}$ dove \mathbf{p} è un vettore costante unitario e $w(t) < \epsilon$ è sempre positivo, essendo naturalmente $w(t) = \text{mod } \mathbf{w}(t)$. Sia

$$\int_{\mu}^{\nu} w(t) dt = \sigma.$$

Prendiamo in considerazione il rapporto, che chiameremo rapporto *incrementale*

$$\frac{\Delta F}{\sigma} = \frac{F(\mathbf{v}(t) + \mathbf{w}(t)) - F(\mathbf{v}(t))}{\sigma}$$

e supponiamo che questo rapporto al tendere di $\mathbf{w}(t)$ allo zero e dei punti μ, ν al punto τ compreso fra essi, tenda a un limite determinato e

(1) Salvo dove è necessario metterli in evidenza.

finito. Fissato $F, \mathbf{v}(t)$ e τ questo limite dipende solo da \mathbf{p} , quindi scriveremo

$$(3) \quad \lim_{\substack{w(t) \\ h=0}} \frac{F(\mathbf{v}(t) + w(t)) - F(\mathbf{v}(t))}{\sigma} = \frac{dF(\mathbf{v}(t))}{d\mathbf{v}(\tau)} \mathbf{p}$$

dove $\frac{dF(\mathbf{v}(t))}{d\mathbf{v}(\tau)}$ indica una certa operazione applicata a \mathbf{p} . Essa è una omografia vettoriale. Infatti applicata a vettori dà vettori. Poi essendo

$$\begin{aligned} \frac{F(\mathbf{v}(t) + w(t)\mathbf{p} + w(t)\mathbf{q}) - F(\mathbf{v}(t))}{\sigma} &= \frac{F(\mathbf{v}(t) + w(t)\mathbf{p}) - F(\mathbf{v}(t) + w(t)\mathbf{q})}{\sigma} + \\ &+ \frac{F(\mathbf{v}(t) + w(t)\mathbf{q}) - F(\mathbf{v}(t))}{\sigma}, \end{aligned}$$

si ha passando al limite

$$\frac{dF(\mathbf{v}(t))}{d\mathbf{v}(\tau)}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \frac{dF(\mathbf{v}(t))}{d\mathbf{v}(\tau)}\mathbf{q} + \frac{dF(\mathbf{v}(t))}{d\mathbf{v}(\tau)}\mathbf{p}$$

il che dimostra la linearità dell'operatore $\frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{v}(\tau)}$ che chiameremo la derivata di \mathbf{U} rispetto a $\mathbf{v}(\tau)$.

Sia ora il vettore $\mathbf{U} = F(\mathbf{v}(t))$; lo supporremo tale che sia $\left| \frac{\Delta F}{\varepsilon h} \right| < M$ per ogni ε e h , derivabile con derivata continua per ogni τ e $\mathbf{v}(t)$ e tale che qualsiasi rapporto incrementale converga al proprio limite uniformemente pure per ogni τ e $\mathbf{v}(t)$.

Consideriamo ora l'espressione

$$\frac{F(\mathbf{v}(t) + \varepsilon w(t)) - F(\mathbf{v}(t))}{\varepsilon}$$

dove $w(t)$ è ora un vettore dato in tutto l'intervallo (a, b) . Cercheremo ora il limite di questa espressione per ε tendente allo zero. Per far ciò, seguendo il Volterra⁽¹⁾, divideremo l'intervallo (a, b) in n parti ed ogni intervallo generico di ampiezza h_i in tre parti (k_i, l_i) ; (l_i, m_i) ; (m_i, n_i) .

Prendiamo poi un vettore $\bar{\theta}_i(t)$ che sia nullo fuori dell'intervallo (k_i, m_i) , uguale a un vettore $w(\tau_i) = w(\tau_i)\mathbf{p}_i$ ($l_i < \tau_i < m_i$) nell'intervallo (l_i, m_i) e che in (k_i, l_i) , (m_i, n_i) abbia la stessa direzione come in (l_i, m_i) e il modulo rispettivamente sempre crescente o decrescente linearmente. Allora posto

$$\sum_i \bar{\theta}_i(t) = w_r(t) \quad ; \quad \sigma_r = \int_{k_r}^{m_r} \theta_r(t) dt$$

$$\mathbf{A}_r = F(\mathbf{v}(t) + \varepsilon w_r(t)) - F(\mathbf{v}(t) + \varepsilon w_{r-1}(t))$$

(1) *Leçons sur les équations intégrales*, p. 20.

risulta

$$\mathbf{A}_r = \varepsilon \sigma_r \frac{dF(\mathbf{v}(t) + \varepsilon \mathbf{w}_{r-1}(t))}{d\mathbf{v}(\tau_r)} \mathbf{p}_r + \varepsilon \sigma_r \mathbf{g}_r$$

dove \mathbf{g}_r è infinitesimo con ε e σ . Per conseguenza

$$\frac{F(\mathbf{v}(t) + \varepsilon \mathbf{w}(t)) - F(\mathbf{v}(t))}{\varepsilon} = \frac{\sum_1^n \mathbf{A}_r}{\varepsilon} = \sum_1^n \sigma_r \left(\frac{dF(\mathbf{v}(t) + \varepsilon \mathbf{w}_{r-1}(t))}{d\mathbf{v}(\tau_r)} \mathbf{p}_r + \mathbf{g}_r \right).$$

Passando al limite per n tendente all'infinito e per ε tendente a zero si trova

$$(4) \quad \frac{dF(\mathbf{v}(t))}{d\varepsilon} = \int_a^b \frac{dF(\mathbf{v}(t))}{d\mathbf{v}(\tau)} \mathbf{w}(\tau) d\tau,$$

che è la formula cercata.

Questi risultati si possono facilmente estendere alle funzioni scalari di una varietà vettoriale $\Phi(\mathbf{v}_a^b(t))$. Sarà

$$(5) \quad \frac{d\Phi(\mathbf{v}(t))}{d\mathbf{v}(\tau)} \mathbf{p} = \lim_{\substack{\mathbf{w}(t) \\ h=0}} \frac{\Phi(\mathbf{v}(t) + \mathbf{w}(t)) - \Phi(\mathbf{v}(t))}{\sigma}$$

dove $\mathbf{w}(t)$, h e σ hanno lo stesso significato che nel caso analogo precedente. Ora un numero funzione di una varietà vettoriale può sempre dedursi da un vettore funzione della stessa varietà, immaginando il vettore di direzione costante, individuata da \mathbf{q} , e avente il modulo uguale a $\Phi(\mathbf{v}(t))$. Ora si ha

$$\frac{d\Phi(\mathbf{v}(t))}{d\varepsilon} \mathbf{q} = \int_a^b \frac{d(\Phi(\mathbf{v}(t)) \mathbf{q})}{d\mathbf{v}(\tau)} \mathbf{w}(\tau) d\tau$$

ma

$$\frac{d\Phi(\mathbf{v}(t)) \mathbf{q}}{d\mathbf{v}(\tau)} \mathbf{p} = \frac{d\Phi(\mathbf{v}(t))}{d\mathbf{v}(\tau)} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$$

quindi essendo \mathbf{q} arbitrario

$$(6) \quad \frac{d\Phi(\mathbf{v}(t))}{d\varepsilon} = \int_a^b \frac{d\Phi(\mathbf{v}(t))}{d\mathbf{v}(\tau)} \mathbf{w}(\tau) d\tau.$$

Una particolare funzione scalare di varietà vettoriale è la seguente:

$$F(\mathbf{v}(t)) \times \mathbf{i},$$

ove \mathbf{i} è un vettore costante. Avendosi

$$\frac{dF(\mathbf{v}(t)) \times \mathbf{i}}{d\mathbf{v}(\tau)} \mathbf{p} = \frac{dF(\mathbf{r}(t))}{d\mathbf{v}(\tau)} \mathbf{p} \times \mathbf{i}$$

si ha facilmente

$$(7) \quad \frac{dF(\mathbf{v}(t) \times \mathbf{i})}{d\epsilon} = \int_a^b \frac{dF(\mathbf{v}(t))}{d\mathbf{v}(\tau)} \mathbf{w}(\tau) \times \mathbf{i} d\tau.$$

Ora consideriamo la funzione scalare

$$\Phi[\mathbf{v}(t) + \epsilon \mathbf{w}(t)].$$

Questa funzione, fissati $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{w}(t)$, dipenderà solo da ϵ . Considerata come funzione di ϵ si può, supposta verificata la derivabilità rispetto a ϵ e la continuità della derivata nell'intervallo che si considera, applicare il teorema degli accrescimenti finiti. Quindi

$$\Phi[\mathbf{v}(t) + \epsilon \mathbf{w}(t)] - \Phi(\mathbf{v}(t)) = \epsilon \left(\frac{d\Phi[\mathbf{v}(t) + \epsilon \mathbf{w}(t)]}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=\lambda} \text{ con } 0 < \lambda < \epsilon$$

e fatto $\epsilon = 1$ si ottiene

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{v}(t) + \mathbf{w}(t)) - \Phi(\mathbf{v}(t)) &= \left(\frac{d\Phi(\mathbf{v}(t) + \epsilon \mathbf{w}(t))}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=\lambda} = \\ &= \int_a^b \frac{d(\Phi(\mathbf{v}(t) + \lambda \mathbf{w}(t)))}{d(\mathbf{v}(\tau) + \lambda \mathbf{w}(\tau))} \mathbf{w}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

e in particolare

$$(8) \quad (F(\mathbf{v}(t) + \mathbf{w}(t)) - F(\mathbf{v}(t))) \times \mathbf{i} = \int_a^b \frac{dF(\mathbf{v}(t) + \lambda \mathbf{w}(t))}{d(\mathbf{v}(\tau) + \lambda \mathbf{w}(\tau))} \mathbf{w}(\tau) \times \mathbf{i} d\tau$$

dove λ dipende da \mathbf{i} .

I risultati ora ottenuti valgono anche se l'intervallo è infinito purchè siano soddisfatte le condizioni di integrabilità delle funzioni sotto il segno d'integrazione e ciò per ogni $\mathbf{v}(t)$ limitato in tutto l'intervallo che si considera.

Nel caso dei fenomeni ereditari si presentano appunto funzioni del tipo $F\left(\mathbf{H}_{-\infty}^t(r)\right)$ dove \mathbf{H} è un vettore funzione di τ .

Se è soddisfatto il postulato dell'invariabilità dell'azione ereditaria, si ha:

$$F\left(\mathbf{H}_{-\infty}^{t+b}(\tau - b)\right) = F\left(\mathbf{H}_{-\infty}^t(\tau)\right).$$

Dall'analoga di questa formula per funzioni scalari il Volterra deduce alcune conseguenze che è utile estendere ai vettori funzioni di varietà vettoriale. Un primo teorema è dato dalla formula

$$(9) \quad \frac{dF\left(\mathbf{H}'(\tau)_{-\infty}\right)}{d\mathbf{H}(\xi)} = \frac{dF\left(\mathbf{H}'(\tau+b)_{-\infty}\right)}{d\mathbf{H}(\xi+b)}.$$

Si prende infatti un vettore $\mathbf{w}(\tau)$ nullo fra $(-\infty, -k)$ e $(k, +\infty)$ e uguale a $\mathbf{w}(t)\mathbf{p}$ con $w(t)$ maggiore di zero nell'intervallo $(-k, +k)$.

Posto

$$\int_{-k}^k \mathbf{w}(\tau) d\tau = \sigma,$$

ed essendo dunque

$$F\left(\mathbf{H}(\tau-b)_{-\infty} + \mathbf{w}(\tau-\xi-b)\right) = F\left(\mathbf{H}(\tau)_{-\infty} + \mathbf{w}(\tau-\xi)\right)$$

si ha

$$\begin{aligned} & \frac{F\left(\mathbf{H}(\tau-b)_{-\infty} + \mathbf{w}(\tau-b-\xi)\right) - F\left(\mathbf{H}(\tau-b)_{-\infty}\right)}{\sigma} = \\ & = \frac{F\left(\mathbf{H}(\tau)_{-\infty} + \mathbf{w}(\tau-\xi)\right) - F\left(\mathbf{H}(\tau)_{-\infty}\right)}{\sigma}; \end{aligned}$$

talchè passando al limite per $\mathbf{w}(\tau)$ e k tendenti a zero, si deduce

$$\frac{dF\left(\mathbf{H}'(\tau-b)_{-\infty}\right)}{d\mathbf{H}(\xi+b)} \mathbf{p} = \frac{dF\left(\mathbf{H}'(\tau)_{-\infty}\right)}{d\mathbf{H}(\xi)} \mathbf{p},$$

e anche, per l'arbitrarietà di \mathbf{p} la formula cercata.

Un altro teorema di Volterra estendibile ai vettori in discorso è il seguente

$$(10) \quad \frac{dF\left(\mathbf{H}'(\tau)_{-\infty}\right)}{d\mathbf{H}(\xi)} = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{dF\left(\mathbf{H}'(\tau)_{-\infty}\right)}{d\mathbf{H}(\xi)} \mathbf{H}'(\xi) d\xi,$$

supposta l'integrabilità della funzione sotto il segno d'integrazione per ogni $\mathbf{H}(\xi)$ limitato in tutto l'intervallo che si considera. Infatti si ha

$$\begin{aligned} F\left(\mathbf{H}'(\tau)_{-\infty}\right) - F\left(\mathbf{H}'(\tau+b)_{-\infty}\right) &= F\left(\mathbf{H}'(\tau)_{-\infty}\right) - F\left(\mathbf{H}'(\tau)_{-\infty}\right) + \\ &+ F\left(\mathbf{H}'(\tau)_{-\infty}\right) - F\left(\mathbf{H}'(\tau+b)_{-\infty}\right) = 0 \end{aligned}$$

e quindi:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{F\left(\mathbf{H}(\tau) + b\right) - F\left(\mathbf{H}(\tau)\right)}{b} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{F\left(\mathbf{H}(\tau + b)\right) - F\left(\mathbf{H}(\tau)\right)}{b}.$$

Passando al limite per b tendente allo zero, il primo membro di questa

equazione diviene $\frac{dF\left(\mathbf{H}(\tau)\right)}{d\tau}$. Riguardo all'altro membro siccome si ha

$$\mathbf{H}(\xi) - \mathbf{H}(\xi + b) = -b\mathbf{H}'(\xi) + b\varepsilon$$

in cui ε è infinitesimo con b , risulta facilmente:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{d\mathbf{H}(\tau)}{d\mathbf{H}(\xi)} (\mathbf{H}'(\xi) + \varepsilon) d\xi = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{d\mathbf{H}(\tau)}{d\mathbf{H}(\xi)} \mathbf{H}'(\xi) d\xi$$

che esprime il teorema cercato.

Della utilità di questi concetti e di queste formule sarà detto in altra occasione.

Geometria. — Studio proiettivo dell'intorno di una superficie.

Nota di CRISTINA EULA e di ODOARDO FRANCESCHI, presentata⁽¹⁾ dal Socio Corresp. GUIDO FUBINI⁽²⁾.

1. Estenderemo al caso delle rigate i risultati dati dal Fubini⁽³⁾ per le superfici qualunque, chiudendo poi con un'osservazione valida per queste. Sia S una superficie rigata, O un suo punto, siano x, y, χ coordinate proiettive non omogenee (cioè sia $t = 1$ la 4^a coordinata omogenea).

Si possono scegliere il punto unità e il tetraedro fondamentale in guisa che O sia il punto $(0, 0, 0)$ e che in un suo intorno valga lo sviluppo⁽⁴⁾

$$(1) \quad \chi = xy - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}(Ax^4 - 4Bx^3y - 6Cx^2y^2 - 4Dxy^3) + \\ + \frac{1}{120}(Ex^5 - 5Fx^4y - 10Gx^3y^2 - 10Lx^2y^3 - 5Mxy^4) + \dots$$

(1) Nella seduta del 20 novembre 1927.

(2) I risultati qui esposti furono trovati dai due Autori quasi contemporaneamente a insaputa l'uno dall'altro. (Nota di G. Fubini).

(3) *Nuova esposizione elementare*, ecc. «Rend. dell'Ist. Lombardo», ser. II, vol. 59.

(4) Si supponga che gli spigoli $x = y = 0$ e $x = \chi = 0$ siano le tangenti asintotiche in O e che gli spigoli opposti $x = y = 0$ e $x = \chi = 0$ siano polari rispetto alle quadriche di Darboux (relative al punto O).

Non si scrivono termini in y^3, y^4, y^5 per esprimere che, essendo S rigata, una delle tangenti asintotiche (abbiamo scelto la $\zeta = x = 0$) appartiene ad S . Cominceremo col dimostrare che $D = L = M = 0$, cioè che mancano anche i termini in xy^3, x^2y^3, xy^4 .

Si può a tal fine ricorrere al metodo della Nota citata. Con le notazioni abituali della Geometria proiettivo-differenziale⁽¹⁾ ove si ponga $\gamma = 0$ (perchè S è rigata) e $p_{ii} = 0$ (perchè $t = 1$) valgono le equazioni:

$$x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v, \quad ; \quad x_{vv} = \theta_v x_v$$

se le u, v sono le asintotiche. Sia x quella soluzione tale che in o le x, x_u, x_v, x_{uv} abbiano i valori iniziali $0, 1, 0, 0$; y quella per cui y, y_u, y_v, y_{uv} hanno i valori iniziali $0, 0, 1, 0$; ζ quella per cui $\zeta, \zeta_u, \zeta_v, \zeta_{uv}$ hanno i valori iniziali $0, 0, 0, 1$. Potremo sviluppare x, y, ζ secondo le potenze di u, v ; dai primi due di questi sviluppi potremo ricavare u, v sviluppate secondo le potenze di x, y . Sostituendo questi sviluppi di u, v nello sviluppo di ζ , ricaveremo ζ sviluppato secondo le potenze di x, y . Otteniamo così:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \zeta &= xy - \frac{1}{3} \beta x^3 + \frac{1}{12} \left\{ (2\beta\theta_u - \beta_u) x^4 - 4x^3 y (\beta_v + \beta\theta_v) - 6\theta_{uv} x^2 y^2 \right\} \\ &+ \frac{1}{24} \left\{ x^5 \left(-\frac{2}{5} \beta_{uu} + 2\theta_u \beta_u + \frac{16}{5} \beta \beta_v + \frac{16}{5} \beta^2 \theta_v - \frac{12}{5} \beta \theta_u^2 + \frac{4}{5} \beta \theta_{uu} \right) - \right. \\ &- 5x^4 y \left(\frac{2}{5} \beta_{uv} - \frac{4}{5} \theta_u \beta_v - \frac{12}{5} \beta \theta_{uv} - \frac{4}{5} \beta \theta_u \theta_v + \frac{2}{5} \beta_u \theta_v \right) - \\ &\left. - 10x^3 y^2 \left(\frac{2}{5} \beta_{vv} + \frac{2}{5} \beta_v \theta_v + \frac{1}{5} \beta \theta_v^2 + \frac{1}{5} \beta \theta_{vv} \right) \right\} + \dots \end{aligned} \right.$$

Scrivendo x ed y al posto di $(x\sqrt[3]{\beta})$ e di $y:\sqrt[3]{\beta}$ questo sviluppo assume proprio la forma (1) ove sia posto $D = L = M = 0$.

2. Allo stesso risultato si può giungere direttamente con un'altra via indicata a uno di noi dal prof. Fubini. Le equazioni di una generatrice di S sono del tipo:

$$x = \alpha + y P(\alpha), \quad \zeta = U(\alpha) + y V(\alpha)$$

ove P, U, V , sono funzioni del parametro α variabile dall'una all'altra generatrice.

Poichè $dx:dy = P$, avremo, osservando che le generatrici sono asintotiche e ricordando le equazioni delle asintotiche, che deve essere identicamente $P^2 \zeta_{xx} + 2P \zeta_{xy} + \zeta_{yy} = 0$.

(1) Cfr. il trattato di G. FUBINI ed E. ČECH (Bologna, 1927).

Calcolando il 1° membro, ove sia posto $x = \alpha + y P(\alpha)$ si deve ottenere un'identità nelle y, α . Ponendo in particolare $y = 0$ si trova che

$$P = \alpha^2 \left(\frac{1}{2} C + \frac{1}{12} G \alpha + \dots \right)$$

Si osservi, senza proseguire il calcolo per questa via, che, ponendo nel secondo membro di (1) $x = \alpha + yP$, ove P ha il precedente valore, si deve trovare un polinomio $U + yV$ di primo grado nella y . Cosicchè i coefficienti di $y^m \alpha^n$ (m, n interi $m \geq 2, n \geq 0$) devono essere nulli. I coefficienti di $y^2 \alpha^2$ ed $y^2 \alpha^3$ si verificano tosto nulli; invece, scrivendo che sono nulli i coefficienti di $y^3 \alpha, y^3 \alpha^2, y^4 \alpha$, si trova precisamente che $D = L = M = 0$.

3. I più generali cambiamenti di coordinate che mutano lo sviluppo (1) [con $D = L = M = 0$] in uno sviluppo di tipo analogo sono i due seguenti:

$$(\alpha) \quad x' = \varepsilon x \quad y' = \varepsilon^2 y \quad z' = z \quad (\varepsilon = \sqrt[3]{1})$$

$$(\beta) \quad x' = \frac{x + Kz}{1 + Hx + Ky + Rz} \quad y' = \frac{y + Hz}{1 + Hx + Ky + Rz} \quad z' = \frac{z}{1 + Hx + Ky + Rz}$$

(H, K, R = costanti arbitrarie) e i loro prodotti. Indicati con A', B' ecc. i coefficienti del nuovo sviluppo si trova nei due casi:

$$(I) \quad A' = \varepsilon^2 A \quad B' = \varepsilon B \quad C' = C \text{ ecc.}$$

$$(II) \quad A' = A - 4H \quad B' = B - 2K \quad C' = C + 2(HK - R) \text{ ecc.}$$

Dunque *in tre soli modi* [resta arbitraria solo una delle tre trasformazioni (α)] possiamo rendere $A = B = C = 0$ (oltre alle $D = L = M = 0$).

Consideriamo ora una retta uscente da O non posta nel piano tangente che sia definita in modo *invariante* dall'intorno di 4° ordine della S . Le sue equazioni saranno:

$$x : \varphi = y : \psi = z \quad \text{ove} \quad \varphi = \varphi(A, B, C) \quad e \quad \psi = \psi(A, B, C)$$

sono funzioni di A, B, C . Poichè la retta è definita in *modo invariante* queste equazioni devono essere equivalenti alle:

$$x' : \varphi(A', B', C') = y' : \psi(A', B', C') = z'$$

Ne segue, per le precedenti formule che:

$$(\gamma) \quad \varphi(\varepsilon^2 A, \varepsilon B, C) = \varepsilon \varphi(A, B, C) \quad ; \quad \psi(\varepsilon^2 A, \varepsilon B, C) = \varepsilon^2 \psi(A, B, C)$$

$$(\delta) \quad 2\varphi(A - 4H, B - 2K, C + 2HK - 2R) = \\ = 2\varphi(A, B, C) + 2K = 2\varphi(A, B, C) + B - (B - 2K)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 4\psi(A - 4H, B - 2K, C + 2HK - 2R) = \\ = 4\psi(A, B, C) + 4H = 4\psi(A, B, C) + A - (A - 4H). \end{aligned}$$

Cioè $2\varphi(A, B, C) + B$ e $4\psi(A, B, C) + A$ devono restare immutate per la (II) qualunque siano H, K, R cioè sono costanti.

E la (γ) prova che queste costanti sono nulle; cosicchè:

$$2\varphi = -B \quad ; \quad 4\psi = -A.$$

Quindi: *L'unica retta uscente da un punto O di una rigata S e non posta sul piano tangente e che sia intrinsecamente determinata dal corrispondente intorno del 4° ordine di S è la retta $2x:B=4y:A=-\tau$. Questa retta è lo spigolo (edge) della rigata in O; ciò che si deduce da (2) col metodo seguito in casi analoghi nella Nota citata. [Sono pure intrinsecamente definite le terne di rette $2x:\lambda\epsilon^{2i}-B=4y:\mu\epsilon^i-A=\tau$ per $i=0, 1, 2$ $\epsilon^3=1$ e λ, μ costanti numeriche qualsiasi].*

Il precedente teorema dà una interpretazione geometrica delle A, B nulle se la retta $x=y=0$ è lo spigolo); per il significato della C , come in loc. cit. si deve ricorrere alle quadriche di Darboux ⁽¹⁾.

Osservazione. — Il prof. Fubini ci fa osservare che tale teorema non ha l'analogo per superfici non rigate. Se:

$$\tau = xy - \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + \frac{1}{12}(Ax^4 - 4Bx^3y - 6Cx^2y^2 - 4Dxy^3 - Ey^4) + \dots$$

è una tale superficie, ogni retta uscente da O ($x=y=\tau=0$) non posta nel piano tangente ha un'equazione che si può porre nella forma:

$$\frac{2y}{B-E + 2\lambda(2B-E)} = \frac{2x}{D-A + 2\mu(2D-A)} = \tau.$$

Con convenienti valori dei parametri λ e μ . E per es. per ogni scelta dei valori numerici di tali parametri, resta così determinata una retta, che facilmente si riconosce dipendere in modo invariante dall'intorno di 4° ordine considerato del punto O della nostra superficie. Essa con le notazioni usuali

(1) Il prof. FRANCESCHI osserva che il solo coefficiente B dello sviluppo τ avrebbe un significato geometrico analogo a quello che ha in generale per le superfici non rigate (cfr. il libro citato) quando ci si riferisce all'involuppo delle quadriche canoniche relative ai punti dell'asintotica curva uscente dal punto O che si considera.

(cfr. il libro citato) della Geometria proiettiva differenziale è la retta congiungente il punto x al punto

$$x_{uv} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log \frac{\beta \gamma}{\alpha_{12}}}{\partial v} x_u + \frac{\partial \log \frac{\beta \gamma}{\alpha_{12}}}{\partial u} x_v \right) + \\ + \lambda \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} x_u + \mu \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} x_v.$$

Per eguali valori numerici di λ e μ si hanno le rette del fascio canonico (per $\lambda = \mu = 0$ la normale proiettiva) il cui analogo manca per le rigate. Per queste si potrebbe studiare l'intorno del 5° ordine.

Ecco perchè nella Geometria proiettiva differenziale le rette più notevoli sono caratterizzate da valori *numerici* di λ e μ !

Matematica. — *Una classe di superficie quadrabili.* Nota di R. CACCIOPPOLI, presentata⁽¹⁾ dal Socio Corrisp. G. SCORZA.

La lettura di una Nota dei proff. Nalli e Andreoli⁽²⁾, ricordandomi un antico teorema di Lebesgue⁽³⁾, mi ha suggerito le considerazioni seguenti, che valgono a determinare un'estesa classe di superficie quadrabili.

Adotterò per l'area di una superficie curva la definizione di Lebesgue. Un'altra, da me proposta, emerge spontaneamente dall'analisi del modo più generale di rappresentazione parametrica di una superficie⁽⁴⁾; ma stimo le due definizioni sostanzialmente identiche, come tenterò di mostrare in qualche prossimo lavoro dedicato a questa teoria.

1. La superficie S sia definita dalle equazioni parametriche

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v) \quad z = \chi(u, v).$$

(1) Nella seduta del 20 novembre 1927.

(2) Questi « Rendiconti », giugno 1927.

(3) *Intégrale, Longueur, Aire*, « Annali di Matematica », 1902, § 71.

(4) Questi « Rendiconti », agosto 1927. Ritrovo alcune intenzioni simili alle mie nella Nota su citata e riconosco agli Autori la priorità di una parte della terminologia, sebbene l'uso ch'essi ne fanno sia alquanto diverso, — poichè i presupposti essenziali della loro analisi implicano già per le coppie di funzioni la *variazione limitata*, la *continuità superficiale* (che dovrebbe essere quella che chiamo *assoluta continuità*), l'esistenza (quasi ovunque) di una *derivata superficiale* (jacobiano) limitata, ecc.; e per le superficie la quadrabilità e l'espressione consueta dell'area, conformemente ad una facile estensione dei risultati classici.

Supporremo per semplicità essere il comune dominio di definizione D delle tre funzioni continue φ, ψ, χ (*dominio base* di S) il quadrato fondamentale del piano uv .

Diremo, con Lebesgue, S *rettificabile* se ogni sua curva corrispondente ad una curva rettificabile di D è del pari rettificabile.

Naturalmente la rettificabilità è, oltre che della superficie, una proprietà della sua rappresentazione parametrica. Chiamando senz'altro rettificabile una superficie, si intenderà che essa sia tale da ammettere una rappresentazione conservante la rettificabilità.

Si dimostra agevolmente, come ha fatto Lebesgue, che S essendo rettificabile, il rapporto della lunghezza di una sua curva a quella della curva corrispondente di D è limitato. Ne diremo L un limite superiore.

Segue di qui che *ogni superficie rettificabile è quadrabile*. È questo il teorema cui accennavamo in principio; ne daremo la seguente dimostrazione:

Dividiamo, mediante segmenti paralleli agli assi, D in n^2 quadrati uguali, ed ognuno di questi ancora in due triangoli mediante una diagonale. Sia S_n la superficie poliedrica, iscritta in S , avente per facce i triangoli i cui vertici corrispondono ordinatamente a quelli dei triangoli in cui è decomposto D ; al divergere di n , S_n tende ad S .

Sia λ_i la maggiore fra le lunghezze delle $n + 1$ curve corrispondenti ai segmenti orizzontali $v = 0, v = \frac{1}{n}, \dots, v = 1$ contenuti nella i^{ma} delle strisce verticali di D . Sarà evidentemente

$$\text{area } S_n \leq L \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq L^2.$$

È dunque finito il minimo limite delle aree delle superficie poliedriche tendenti ad S ; S è cioè quadrabile.

Più ancora, il rapporto fra le aree di due porzioni corrispondenti di S e di D è limitato, ed un limite superiore ne è L^2 ⁽¹⁾.

Dalla dimostrazione precedente si rileva subito come sia sovrabbondante l'ipotesi, equivalente a quella della rettificabilità, che si mantenga limitato il rapporto fra le lunghezze di due *qualunque* curve di S e di D . Basta invece evidentemente che tale circostanza abbia luogo soltanto per i segmenti orizzontali di D , e che a quelli verticali corrispondano curve le cui lunghezze non oltrepassino un limite fisso (o inversamente). Ed un altro passo si fa subito sostituendo all'ipotesi del rapporto limitato quella, assai più generale, che ad un numero qualunque di segmenti orizzontali (o verticali) rela-

(1) La dimostrazione di Lebesgue conduce invece al valore $\frac{4}{\pi} L^2$.

tivi ad intervalli *distinti* dell'ascissa (o dell'ordinata) corrispondano su S curve la somma delle cui lunghezze si conservi limitata.

Convieni introdurre qui una nozione nuova:

Σ sia un sistema di curve rettificabili, i punti di ognuna delle quali siano riferiti ad un parametro t il cui campo di variabilità sia sempre compreso in un intervallo fisso (t_0, t_1) . Se la somma delle lunghezze di un numero qualunque di porzioni, relative ad intervalli di t tutti distinti, di queste curve, si mantiene limitata, diremo che Σ è *assolutamente rettificabile*. Sarà possibile allora, ed in infiniti modi, costruire in (t_0, t_1) una funzione crescente la cui variazione in un intervallo qualunque sia non inferiore alla lunghezza di ogni porzione di curva appartenente a Σ ed avente quell'intervallo per base; o pure, ciò che è lo stesso, una curva di intervallo base (t_0, t_1) ogni cui porzione sia non inferiore in lunghezza a qualunque porzione corrispondente in Σ . Una simile curva potrebbe dirsi *maggiorante* del sistema. Ed è chiaro che inversamente l'esistenza di una curva maggiorante trae seco l'assoluta rettificabilità di Σ .

L'assoluta rettificabilità è essenzialmente una proprietà della rappresentazione parametrica adottata per le curve del sistema.

Siamo giunti così al teorema:

Condizione sufficiente per la quadrabilità di S è che le curve $v = \text{cost}$ costituiscano (riferite al parametro u) un sistema assolutamente rettificabile e che inoltre l'insieme delle lunghezze delle curve $u = \text{cost}$ sia limitato (o inversamente).

Ma la seconda parte di questa condizione è ancora manifestamente sovrabbondante. Una semplice estensione di procedimenti noti ⁽¹⁾ conduce al risultato più generale:

Condizioni sufficienti per la quadrabilità di S sono l'assoluta rettificabilità di uno dei sistemi di curve coordinate e la sommabilità della lunghezza della curva generica dell'altro rispetto all'arco di una determinata curva maggiorante del primo sistema (sommabilità nel senso di Stieltjes).

S'intende che sulle curve del primo sistema è assunto come parametro la coordinata variabile.

La scelta che abbiamo fatta del dominio base è naturalmente inessenziale, ed era soltanto intesa a semplificare all'estremo la dimostrazione del teorema fondamentale.

2. Un esempio, dato da Lebesgue ⁽²⁾, di superficie quadrabile senza essere rettificabile è il seguente:

Sia C una curva del piano zx definita dall'equazione

$$z = f(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad \text{con} \quad f(0) = 0;$$

(1) Vedi TONELLI, *Sulla quadratura delle superficie*. Questi « Rendiconti », marzo 1926.

(2) Memoria citata, § 72.

ogni porzione di C escludente l'origine sia rettificabile, e di più, detto s l'arco, si abbia $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{x}$ ($x > 0$). La porzione della superficie cilindrica di sezione retta C compresa fra i piani $x = 0$ e $x = y$ non è rettificabile, non essendo tale alcuna sua curva passante per l'origine; è però quadrabile, ed ha area 1.

Il teorema generale del numero precedente ne assicura subito la quadrabilità. Le equazioni parametriche sono infatti

$$x = u \quad , \quad y = v \quad , \quad z = f(u),$$

ed il dominio base è il triangolo del piano uv avente i lati $v = 0$, $u = 1$, $u = v$. Le linee $u = \text{cost}$, che sono rette, costituiscono evidentemente, assumendovi v come parametro, un sistema assolutamente rettificabile, di cui è maggiorante, p. es., il segmento $(0, 1)$ dell'asse v . La lunghezza della curva $v = \text{cost}$ è $-\log v$, e $\log v$ è sommabile nell'intervallo $(0, 1)$.

Questo esempio un po' schematico vale a mostrare come il criterio precedente possa assicurare la quadrabilità di superficie non rettificabili. Ma la portata del teorema è soprattutto in ciò che le condizioni che enuncia sono quelle cui più facilmente adempiono i casi semplici; mentre avviene spesso per le superficie rettificabili che proprio la rappresentazione parametrica più immediata non conserva la rettificabilità. Per es., per la superficie rettificabile generata dalla rotazione intorno all'asse z della curva rettificabile $x = f(z)$ la rappresentazione parametrica più semplice è

$$x = f(u) \cos v \quad , \quad y = f(u) \sin v \quad , \quad z = u;$$

ma la rettificabilità non è conservata se la curva data ha tangenti parallele all'asse delle x . Dal criterio precedente la quadrabilità è invece provata in ogni caso, poichè i meridiani hanno lunghezza costante ed i paralleli costituiscono un sistema assolutamente rettificabile; anzi, entrambi i sistemi di linee coordinate sono assolutamente rettificabili.

Generalizzazioni ulteriori di questi risultati si potrebbero cercare in varie direzioni. Si potrebbe sostituire all'ipotesi dell'assoluta rettificabilità, cioè di una curva maggiorante rettificabile, quella di una curva maggiorante solo *generalmente* rettificabile (cioè con uno o più punti eccettuati), e definire poi un integrale di Stieltjes *generalizzato* ⁽¹⁾ maggiorante l'area della superficie.

Così la superficie generata dalla rotazione intorno all'asse z della curva C del primo esempio ha meridiano non rettificabile. È però finita la lunghezza dell'arco di C compreso fra i punti di ascissa 1 e x , e vale $-\log x$;

(1) Vedi DANIELL, *Two generalizations of the Stieltjes integral*, « Annals of Math. », 1921

mentre il parallelo corrispondente al secondo di quei punti ha lunghezza $2\pi x$. L'integrale

$$\int_0^1 x d \log x$$

ha valore finito: la superficie è pertanto quadrabile.

D'altra parte si potrebbe generalizzare la natura della corrispondenza fra il dominio base e la superficie, rimuovendo l'ipotesi che sia univoca la rappresentazione del primo sulla seconda.

Si giungerebbe così, in particolare, alle condizioni date da Tonelli⁽¹⁾ per la quadrabilità della superficie $z = f(x, y)$, in quanto esse esprimono sostanzialmente che le proiezioni di questa sui piani zx e yz hanno area finita⁽²⁾.

Ma non insisterò oltre su tali questioni, che non hanno che un interesse particolare e non s'orientano secondo quella che credo essere la via maestra di tutta la teoria.

Idromeccanica. — *Sopra una categoria di moti stazionari dei liquidi (pesanti) viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali.* Nota di U. CRUDELI, presentata⁽³⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Esporremo qui lo studio della pressione p , il quale consente la promessa discussione sulla formula della portata relativa ai movimenti (stazionari) simmetrici (rispetto ad un asse) già considerati nella mia precedente Nota di questi « Rendiconti » (fascicolo 10 del 1° sem. 1927).

Col solito significato dei simboli, le equazioni che servono per il suddetto studio sono:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta_z v_x \\ \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta_z v_y \\ \rho \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= - \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \mu \Delta_z v_z, \end{aligned} \right.$$

L'asse delle z (verticale e coincidente con quello di simmetria del movi-

(1) Nota citata.

(2) Cioè, secondo la nomenclatura che adopero nel citato lavoro, che le coppie (f, x) e (f, y) hanno variazione limitata.

(3) Nella seduta del 6 novembre 1927.

mento) supposto *vólto verso l'alto*. Come si vede facilmente, stante la simmetria del moto si ha

$$\left\{ \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \frac{x}{r} \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= \frac{y}{r} \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

ed inoltre

$$\begin{aligned} \Delta_2 v_x &= \frac{x}{r} \left(-\frac{v_r}{r^2} + \Delta_2 v_r \right) \\ \Delta_2 v_y &= \frac{y}{r} \left(-\frac{v_r}{r^2} + \Delta_2 v_r \right); \end{aligned}$$

quindi le predette equazioni equivalgono per noi alle seguenti

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho \left\{ v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_r^2}{2} \right) \right\} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(-\frac{v_r}{r^2} + \Delta_2 v_r \right) \\ \rho \left\{ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_z^2}{2} \right) \right\} &= -\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \mu \Delta_2 v_z, \end{aligned} \right.$$

alle quali naturalmente potevasi anche pervenire introducendo nello schema generale in coordinate cilindriche delle equazioni della dinamica dei liquidi (pesanti) viscosi le condizioni della stazionarietà e della simmetria. Ma, essendo

$$v_r = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right),$$

si ottiene

$$-\frac{v_r}{r^2} + \Delta_2 v_r = -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial r} + \Delta_2 \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right) \right\} = -\frac{\partial^2 \Delta_2 F}{\partial z \partial r};$$

poi, considerando la nostra particolare categoria di moti simmetrici, in cui $\Delta_2 F = \alpha r^2 + \beta$ (dove α e β sono costanti), viene

$$-\frac{v_r}{r^2} + \Delta_2 v_r = 0;$$

inoltre, nella categoria in discorso si ha

$$\Delta_2 v_z = \Delta_2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) = -\frac{\partial^2 \Delta_2 F}{\partial z^2} + \Delta_4 F = 4\alpha.$$

Nel nostro caso, pertanto, le (1) diventano

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \left\{ v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_r^2}{2} \right) \right\} &= - \frac{\partial p}{\partial r} \\ \rho \left\{ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_z^2}{2} \right) \right\} &= - \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z} \right) + 4 \alpha \mu, \end{aligned} \right.$$

che possono anche scriversi

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{p}{\rho} + (g - 4 \alpha v) z \right\} &= - v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_r^2}{2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{p}{\rho} + (g - 4 \alpha v) z \right\} &= - v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_z^2}{2} \right), \end{aligned} \right.$$

essendo $v = \frac{\mu}{\rho}$.

Ora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial z} &= - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(- \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \Delta_2 F \right); \end{aligned}$$

quindi, per noi,

$$2 \alpha r + \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial r}.$$

Ne segue che alle (2) può darsi la seguente forma (1):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + (g - 4 \alpha v) z \right\} &= 2 \alpha r v_z \\ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + (g - 4 \alpha v) z \right\} &= - 2 \alpha r v_r, \end{aligned} \right.$$

designando v la grandezza della velocità.

(1) Alla quale naturalmente potevasi anche giungere prendendo le mosse dalle note equazioni dei movimenti stazionari

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \left(v_z \omega_y - v_y \omega_z + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta_2 v_x \\ \rho \left(v_x \omega_z - v_z \omega_x + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta_2 v_y \\ \rho \left(v_y \omega_x - v_x \omega_y + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial z} \right) &= - \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \mu \Delta_2 v_z \end{aligned} \right.$$

e tenendo presente la mia Nota dei Lincei, *Sui moti di un liquido viscoso (omogeneo) simmetrici rispetto ad un asse* (fascicolo 7 del 1° sem. 1927).

Poi, ricordando che

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \chi}, \quad v_\chi = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

dove ψ denota la funzione di corrente, si vede essere

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + (g - 4\alpha v) \chi = 2\alpha\psi + C$$

con C costante a priori arbitraria. Ma $\psi = r \frac{\partial F}{\partial r}$ e, nel nostro caso ⁽¹⁾,

$$F = \frac{r^2}{4} \left(\frac{\alpha}{4} r^2 + \beta \right) + \Sigma H_n(\chi) J_0(c_n r)$$

[la $\Sigma H_n(\chi) J_0(c_n r)$ potendosi, in particolare, supporre costituita da un sistema finito di termini non nulli], essendo

$$H_n(\chi) = A_n e^{\epsilon_n \chi} + B_n e^{-\epsilon_n \chi};$$

dunque

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} = & -\frac{v^2}{2} + (4\alpha v - g)\chi + \frac{\alpha r^2}{2} (\alpha r^2 + 2\beta) - \\ & - 2\alpha r \Sigma c_n H_n(\chi) J_1(c_n r) + C, \end{aligned}$$

denotando al solito con J_1 la funzione d'indice uno del Bessel.

Per $r = 0$, cioè lungo l'asse del tubo, viene

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{v^2}{2} + (4\alpha v - g)\chi + C;$$

quindi, supposto che il tubo sia di lunghezza l , avremo

$$(3) \quad \frac{1}{\rho} (p_1 - p_2) = -\frac{1}{2} (v_1^2 - v_2^2) + (4\alpha v - g)l,$$

con manifesto significato dei simboli.

Ora, quando nella (3) venga trascurato il termine $-\frac{1}{2} (v_1^2 - v_2^2)$

oppure quando sia *rigorosamente* $v_1^2 - v_2^2 = 0$ [questa seconda circostanza presentandosi sempre per $A_n = B_n$ nell'ipotesi che gli estremi dell'asse del tubo distino ugualmente dal piano (x, y)], si ottiene

$$4\alpha\mu = \frac{p_1 - p_2}{l} + \rho g;$$

(1) Vedasi la mia Nota del fascicolo 10 (1° sem. 1927) superiormente citata.

per cui allora, quando venga ivi trascurato il termine *eg* inerente al peso specifico del liquido (come, ad esempio, nel regime del Poiseuille, il quale regime sussiste nel caso particolarissimo $A_n = B_n = 0$), avremo

$$(4) \quad \alpha = \frac{p_1 - p_2}{4 \mu l}.$$

Ciò premesso, si richiami la formola generale della *portata* (stabilita nella mia precedente Nota)

$$Q = -\frac{\pi}{2} R^2 (2 \beta + \alpha R^2),$$

designando con R il raggio del tubo. Per $\beta = -\alpha R^2$ si ha

$$(5) \quad Q = \frac{\pi}{2} \alpha R^4;$$

ne segue che, ove si sostituisca nella (5) al posto di α la espressione (4), si ottiene

$$Q = \frac{\pi R^4}{8 \mu l} (p_1 - p_2),$$

come nel regime del Poiseuille⁽¹⁾, senza però che questo (anche attualmente) sia in generale il regime del moto.

Idrodinamica. — *Sul contatto tra linee di flusso e linee di corrente nei moti dei fluidi.* Nota di A. MASOTTI, presentata⁽²⁾ dal Socio Corrisp. U. CISOTTI.

1. Nello studio dei moti non stazionari dei fluidi si ha cura di distinguere le *linee di flusso* dalle *linee di corrente*; le prime sono le linee vettoriali della velocità e costituiscono, in ogni istante, una congruenza; le seconde sono le traiettorie delle particelle liquide e costituiscono, invece, un complesso. Nei moti stazionari v'è coincidenza delle linee di flusso con le linee di corrente, e ciò avviene, più generalmente, quando l'orientazione della velocità in ogni punto è invariabile col tempo⁽³⁾.

(1) Soltanto giova osservare che nel regime del Poiseuille le pressioni agli estremi dell'asse del tubo eguagliano quelle in punti qualsivogliano delle corrispondenti sezioni estreme (invero nel regime del Poiseuille la p è funzione della sola x).

(2) Nella seduta del 20 novembre 1927.

(3) Presso LAMB, *Hydrodynamics* (V ed., Cambridge, University Press, 1924), queste linee sono chiamate *lines of motion* e *paths of the particles*, rispettivamente; quando esse coincidono nei moti permanenti sono dette *stream-lines*. Presso APPELL, *Traité de Mécanique Rationnelle*, t. III: *Équilibre et mouvement des milieux continus* (3^e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1921), le denominazioni sono: *lignes de flux* e *trajectoires*.

In ogni punto P e in ogni istante t la linea di flusso che in quell'istante contiene P e la linea di corrente della particella che in quell'istante transita per P sono tangenti, perchè entrambe tangenti alla velocità; hanno quindi un contatto che è almeno del primo ordine. È lecito chiedersi quale sia l'ordine effettivo di questo contatto e quale influenza abbiano su di esso le circostanze meccaniche⁽¹⁾. A queste domande rispondo nella presente Nota facendo rilevare che in generale il contatto è del primo ordine, ed è più intimo, cioè di ordine ≥ 2 , solo in quei punti nei quali, all'istante considerato, l'orientazione della velocità è stazionaria (è cioè stazionario il vettore unitario che la definisce).

Ecco le semplici considerazioni che portano a questi risultati. — Sia \mathbf{s} il versore della velocità \mathbf{v} , sicchè $\mathbf{v} = v\mathbf{s}$; il vettore \mathbf{s} è funzione del posto e del tempo, la cui derivata sostanziale o totale rispetto al tempo si può calcolare nei due modi messi in evidenza dalle relazioni seguenti:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d\mathbf{s}}{ds_c} \frac{ds_c}{dt} = \frac{v}{\rho_c} \mathbf{n}_c,$$

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + v \frac{d\mathbf{s}}{ds_f} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \frac{v}{\rho_f} \mathbf{n}_f;$$

in queste s_c denota l'arco, ρ_c il raggio di flessione, \mathbf{n}_c il versore della normale principale della linea di corrente, mentre $s_f, \rho_f, \mathbf{n}_f$ hanno analogo significato ma con referenza alla linea di flusso⁽²⁾. Dal confronto delle equazioni scritte scende che

$$(I) \quad \frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_c} \mathbf{n}_c - \frac{1}{\rho_f} \mathbf{n}_f,$$

ed in questa è evidentemente contenuto quanto ho annunciato.

Se la linea di flusso e la linea di corrente hanno in comune il piano osculatore $\mathbf{n}_f = \pm \mathbf{n}_c$ a seconda che le normali principali sono equiverse o contraverse; la (I) diviene

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} = \left(\frac{1}{\rho_c} \mp \frac{1}{\rho_f} \right) \mathbf{n}_c;$$

(1) Sul contatto di due curve sghembe veggansi, per esempio: JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. I (3° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1909), p. 423; PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I (3° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1922), p. 455.

(2) La prima equazione mette in luce il significato meccanico dell'operatore d/dt (derivazione sostanziale o molecolare), e per questo vi compaiono solo elementi che si riferiscono alla traiettoria della particella; la seconda, che si riattacca invece al suo significato analitico (derivazione totale rispetto al tempo), ne effettua una nota decomposizione (nella somma della derivata locale rispetto al tempo e della derivata stazionaria). — È appena necessario aggiungere che alle espressioni definitive si perviene con l'applicazione della prima formula di Frenet.

questa circostanza si presenta quando la forza totale che agisce sull'unità di massa, nel posto e nell'istante considerati, giace nel piano osculatore della linea di flusso.

2. È notevole la seguente applicazione della (1) allo studio del contatto tra linee di flusso e linee di corrente nei punti P di una superficie fissa Σ che è permanentemente superficie di flusso.

Siano \mathbf{N} e \mathbf{v} i versori spiccati da P che definiscono, rispettivamente, la normale a Σ e la normale superficiale comune alla linea di flusso e alla linea di corrente, orientate in modo che la terna $(\mathbf{s}, \mathbf{v}, \mathbf{N})$ sia, per esempio, sinistrorsa; dalle relazioni

$$\mathbf{s} \times \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{s} \wedge \mathbf{N} = -\mathbf{v}$$

scende che

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \times \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \wedge \mathbf{N} = -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} ;$$

se ora θ indica l'angolo della velocità con una direzione orientata fissa del piano tangente in P a Σ , contato positivamente nel senso che porta, per l'angolo retto, \mathbf{s} sopra \mathbf{v} , è facile vedere che (1)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} \mathbf{s} ,$$

sicché la seconda delle precedenti diviene

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \wedge \mathbf{N} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \mathbf{s} .$$

È in virtù di queste relazioni che dalla (1), mediante moltiplicazione scalare e vettoriale per \mathbf{N} , successivamente, si deducono le seguenti:

$$(2) \quad \mathcal{N}_c = \mathcal{N}_f \quad , \quad \frac{1}{v} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathcal{G}_c - \mathcal{G}_f ;$$

la prima di queste esprime l'eguaglianza delle curvature normali, \mathcal{N}_c e \mathcal{N}_f , delle linee considerate sulla superficie Σ ; la seconda mette in luce in qual modo la differenza delle curvature geodetiche, \mathcal{G}_c e \mathcal{G}_f , dipende dagli elementi cinetici (2).

(1) Sia \mathbf{k} il versore della direzione predetta; designando, com'è consuetudine, con i l'operatore che fa ruotare di un retto, nel verso positivo, le direzioni e i loro versori, si ha

$$\mathbf{s} = \mathbf{k} e^{i\theta} \quad , \quad \mathbf{v} = \mathbf{k} e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} ;$$

scende subito da queste la relazione annunciata.

(2) Veramente queste locuzioni sono esatte quando Σ è anche superficie di corrente sicché oltre alle linee di flusso essa contiene anche le linee di corrente; la trattazione fatta vale più generalmente quando, Σ essendo solamente superficie di flusso, le linee di corrente sono tangenti a Σ ; è ovvia in questo caso l'interpretazione che spetta alla dicitura del testo.

Idromeccanica. — *Sopra il flusso dell'energia nel caso eccezionale del teorema di Kutta-Joukowski.* Nota di A. ROSENBLATT, presentata⁽¹⁾ dal Socio Corresp. U. CISOTTI.

1. Il prof. B. Finzi in due Note interessanti⁽²⁾ ha mostrato come nel caso di angoli d'apertura 2π del profilo piano investito da una corrente irrotazionale la derivata dell'energia cinetica del fluido rispetto al tempo non sia nulla in generale. Partendo dalle equazioni di moto del fluido

$$(1) \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \vec{\text{grad}} p$$

egli perviene alla formola

$$(2) \quad \frac{dT}{dt} = \sum_{\omega} \int p d\psi$$

T essendo l'energia cinetica, ψ la funzione di corrente e l'integrazione essendo estesa ai cerchietti ω circondanti i punti P angolosi nel senso positivo. Applicando questo risultato al caso della lamina piana considerato dal prof. Cisotti egli perviene alla formola

$$(3) \quad \frac{dT}{dt} = \rho c^2 C \cos \beta \sin \beta = P_x \cdot c,$$

(C circolazione nel senso positivo), P_x essendo la componente secondo la direzione asintotica della corrente parallela all'asse dei x .

Si può trasformare la formola (2) supponendo nei punti angolosi valido uno sviluppo della forma

$$(4) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{z - z_0}} (\alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{z - z_0} + \dots),$$

(1) Nella seduta del 20 novembre 1927.

(2) *Interpretazione energetica d'una eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, « Rendiconti della R. Accademia Naz. dei Lincei », 1927.

Potenza di corrente che investe un arco di circonferenza, « Bollettino della Unione Matematica Italiana », 1927.

$\omega = u - iv$, ciò che avviene certamente in casi molto generali (1). La formula (2) può scriversi

$$(5) \quad \frac{dT}{dt} = \frac{\rho}{2} \operatorname{Real} \left[i \sum_{\omega} \int \omega^2 \bar{\omega} d\zeta \right]$$

dunque si ha

$$(6) \quad \frac{dT}{dt} = -\rho\pi \operatorname{Real} [\sum \alpha_0^2 \bar{\alpha}_1].$$

Applichiamo questa formula al caso del prof. Cisotti. Abbiamo nel punto P' ($le^{i\beta} + le^{i\beta} \cos \beta$)

$$\alpha_0 = i \left(c \cos \beta - \frac{C}{2\pi l} \right) \sqrt{\frac{l}{2e^{i\beta}}}, \quad \alpha_1 = \frac{c \cos \beta}{e^{i\beta}}.$$

Applicando la formula

$$(7) \quad P_x + iP_y = \rho\pi \left(\sum \alpha_0^2 - \frac{iCc}{\pi} \right)$$

data da me nella mia Nota precedente (2) si trova

$$(8) \quad \frac{dT}{dt} = -\rho c^2 C \cos \beta \sin \beta = -P_x c,$$

con segno contrario di quello del prof. Finzi.

2. Il prof. Finzi ha anche applicato la sua formula (2) al calcolo del caso di un'arco di cerchio di raggio a esteso tra i punti $P(ae^{i(\beta-\alpha)})$ e $P'(ae^{i(\beta+\alpha)})$. La formula

$$(9) \quad \zeta = -\zeta e^{i\beta} \frac{\zeta \sin \frac{\alpha}{2} - a}{\zeta - a \sin \frac{\alpha}{2}}$$

dà la rappresentazione sul piano ζ ai punti P, P' rispondendo i punti $Q(aie^{-i\frac{\alpha}{2}})$ e $Q'(-aie^{i\frac{\alpha}{2}})$. Il potenziale nel piano ζ essendo dato da

$$(10) \quad \Omega_{\zeta} = c_1 \left(\frac{\zeta}{a} + \frac{a}{\zeta} \right) - ic_2 \left(\frac{\zeta}{a} - \frac{a}{\zeta} \right) - i \frac{C \log \frac{\zeta}{a}}{2\pi}$$

(1) Cfr. il lavoro del prof. LICHTENSTEIN, *Ueber die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken*, « Journal de Crelle », To. 140, 1911.

(2) *Sur le théorème de Kutta-Joukowski*, questi « Rendiconti », 1927, vol. V.

si trova per lo sviluppo

$$(11) \quad \omega_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda - \lambda_p}} \left\{ -\frac{c}{2} \cos \frac{2\beta - \alpha}{2} e^{i \frac{\alpha - \beta}{2}} - \frac{C e^{i \frac{\alpha - \beta}{2}}}{8 \pi a \sin \frac{\alpha}{2}} \right\} \sqrt{-2 a i \sin \alpha +} \\ + c i \sin (\beta - \alpha) e^{-i(\beta - \alpha)} + \frac{C i e^{i(2\alpha - \beta)}}{4 \pi a}.$$

Nel caso particolare di circolazione nulla si trova

$$(12) \quad P_x + i P_y = \rho \pi \sum \alpha_o^2 = \frac{\rho \pi c^2 a \sin^2 \alpha}{2} [\cos \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos 2\beta - \cos \alpha \sin \beta \sin 2\beta + \\ + i (\sin \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos 2\beta + \cos \alpha \cos \beta \sin 2\beta)].$$

Si trova anche

$$(13) \quad \frac{dT}{dt} = - P_x c.$$

Finzi ottiene invece il segno +. Questo risulta dal fatto che egli applica le formole di Bickley⁽¹⁾ mutate di segno:

$$(14) \quad \begin{cases} P_x = \pi \rho \sin^2 \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta, \\ P_y = - \pi \rho \sin^2 \alpha \left(\cos^2 \beta \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) \end{cases}$$

che danno nel caso della orientazione dell'arco accettata dal Finzi la formola (12).

(1) *Some twodimensional potential problems connected with the circular arc*, «Philosophical Magazine», 1918, pp. 35-36.

Idromeccanica. — *I moti di Viterbi ed i sistemi tripli ortogonali di superficie da essi determinati.* Nota di B. CALDONAZZO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio Corrisp. U. CISOTTI.

In una Nota precedente ⁽²⁾ ho chiamato *moti di Viterbi* i moti permanenti vorticosi di liquidi perfetti sotto l'azione di forze conservative i quali soddisfano alle due condizioni: *a) i vortici sono normali alle velocità; b) le linee vorticosi costituiscono una congruenza normale.*

La denominazione da me introdotta è giustificata dal fatto che tali moti furono considerati per la prima volta ed esaurientemente studiati da A. Viterbi ⁽³⁾, che impiegò a questo scopo il calcolo differenziale assoluto.

Egli trovò che questi moti sono caratterizzati dai due seguenti casi possibili: 1° *moti simmetrici rispetto ad un asse lungo i piani diametrali* (e come caso limite i moti piani); 2° *moti uniformi lungo rette parallele, con velocità in generale diversa da retta a retta.*

Più recentemente F. Sbrana ⁽⁴⁾ studiò questi moti con un procedimento analitico sensibilmente più semplice.

Nella mia Nota citata sopra, dove ho studiato una classe di moti più generali di quelli di Viterbi in quanto non vi è richiesta la condizione *b)*, ho avuto occasione di rilevare che i moti di Viterbi si possono studiare vantaggiosamente sfruttando le loro proprietà geometriche. Notando che per la condizione *a)* le linee di corrente l_1 costituiscono una congruenza normale ad una famiglia di superficie Σ_1 , che per le condizioni dinamiche le linee l_2 normali alle l_1 ed alle linee vorticosi l_3 costituiscono pure una congruenza normale ad una famiglia di superficie Σ_2 - le cosiddette superficie di Bernoulli -, che infine per la condizione *b)* le linee vorticosi l_3 sono normali ad una terza famiglia di superficie Σ_3 , si è naturalmente condotti a studiare il sistema triplo ortogonale di superficie Σ . Con la condizione *a)*, senza la *b)*, ho trovato nella Nota citata che le linee l_3 sono *isotachie* e che le l_1 sono *geodetiche* delle superficie di Bernoulli. Introducendo la condizione *b)*, passando così ai moti di Viterbi, ho trovato che le superficie di Bernoulli devono essere *modanate* e che le Σ_3 devono essere *svilupabili*. Ciò

(1) Nella seduta del 20 novembre 1927.

(2) *Sopra alcune proprietà di moti liquidi i cui vortici sono normali alle velocità*, questi « Rend. », vol. VI, serie 6^a, (1927).

(3) A. VITERBI, *Sopra una classe di moti vorticosi permanenti*, « Atti del R. Ist. Veneto », t. LXI, pp. 444-464 e t. LXII, pp. 175-176.

(4) F. SBRANA, *Sopra una classe di moti vorticosi permanenti*, « Atti della Società Ligustica di Sc. e Lett. di Genova », vol. VI, fasc. II.

mi ha condotto a distinguere per i moti di Viterbi i tre seguenti casi solamente possibili: 1° superficie Σ , *piane*; 2° linee di corrente rettilinee; 3° linee l_2 rettilinee.

In questa Nota, come mi ero proposto allora, deduco dalla distinzione geometrica ora ricordata i risultati stabiliti dal Viterbi, facendo uso sistematico dell'analisi vettoriale. Con questo procedimento, oltre che operare su elementi geometrici e cinematici di immediata intuizione, si ha il vantaggio di ritrovare i risultati del Viterbi per una via che mi sembra la più naturale specialmente per quello che riguarda lo stabilire il primo caso del Viterbi dei moti simmetrici.

L'introduzione delle superficie di Bernoulli mi ha permesso di stabilire che nei moti di Viterbi secondo rette parallele queste superficie sono *isotachiche* e con *vortici di intensità costante*.

I. Indichiamo con $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$ i versori rispettivamente della velocità \mathbf{v} , di $(\text{rot } \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$ e di $\text{rot } \mathbf{v}$, le cui linee d'azione sono l_1, l_2, l_3 . Si ha pertanto

$$(I) \quad v\mathbf{N}_1 = \mathbf{v}, \quad v\omega\mathbf{N}_2 = (\text{rot } \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}, \quad \omega\mathbf{N}_3 = \text{rot } \mathbf{v},$$

essendo manifestamente

$$v = \text{mod } \mathbf{v}, \quad \omega = \text{mod } \text{rot } \mathbf{v}.$$

In seguito si dovrà ricorrere alle seguenti relazioni cui soddisfanno i vettori $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$ in virtù della normalità delle congruenze delle l_r :

$$(2) \quad \mathbf{N}_r \times \text{rot } \mathbf{N}_r = 0, \quad r = 1, 2, 3 \quad (1);$$

$$(3) \quad \mathbf{N}_r \times \text{grad} (\mathbf{N}_t \times \text{rot } \mathbf{N}_s) - \mathbf{N}_s \times \text{grad} (\mathbf{N}_t \times \text{rot } \mathbf{N}_r) = \\ = \mathbf{N}_r \times \text{rot } \mathbf{N}_s \cdot \mathbf{N}_t \times \text{rot } \mathbf{N}_r - (\mathbf{N}_t \times \text{rot } \mathbf{N}_r)^2 - (\mathbf{N}_t \times \text{rot } \mathbf{N}_s)^2,$$

dove r, s, t è una permutazione circolare diretta dei numeri 1, 2, 3 ⁽²⁾.

Convorrà ancora ricordare la formula di Frenet

$$(4) \quad \text{rot } \mathbf{N}_r = c_r \mathbf{b}_r,$$

dove c_r è la flessione delle l_r e \mathbf{b}_r il vettore unitario binormale alle l_r .

(1) Cfr. C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale*, vol. I, 62, che in seguito citerò con A. V. G.

(2) Le (3) costituiscono la seconda terna delle note equazioni differenziali di Lamé per i sistemi tripli ortogonali: cfr. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 3ª ediz., vol. II, p. 622.

Per passare dalle formule citate alle (3) basta porre in quelle

$$\mathbf{N}_r \times \text{grad} = \frac{1}{H_r} \frac{\partial}{\partial u_r}, \quad \mathbf{N}_r \times \text{rot } \mathbf{N}_r = \frac{1}{H_r H_t} \frac{\partial H_r}{\partial u_t}, \quad \mathbf{N}_r \times \text{rot } \mathbf{N}_t = -\frac{1}{H_t H_r} \frac{\partial H_r}{\partial u_t}.$$

In una Nota a parte sui sistemi tripli ortogonali dedurrò direttamente le formule di Lamé.

Gioverà infine ricordare che la curvatura media di una superficie normale alle linee l_r è espressa da

$$(5) \quad \operatorname{div} \mathbf{N}_r = \operatorname{div} \mathbf{N}_s \wedge \mathbf{N}_t = \mathbf{N}_t \times \operatorname{rot} \mathbf{N}_s - \mathbf{N}_s \times \operatorname{rot} \mathbf{N}_t,$$

i due termini dell'ultimo membro essendo le *curvature principali* della Σ_r rispettivamente secondo \mathbf{N}_s e secondo \mathbf{N}_t , ⁽¹⁾. Dopo ciò risulta pure

$$(5') \quad \frac{d\mathbf{N}_r}{dP} \mathbf{N}_s = \mathbf{N}_t \times \operatorname{rot} \mathbf{N}_s \cdot \mathbf{N}_s, \quad \frac{d\mathbf{N}_r}{dP} \mathbf{N}_t = -\mathbf{N}_s \times \operatorname{rot} \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{N}_t, \quad (2).$$

II. Nel primo dei tre casi distinti nella Nota precedente le superficie Σ_3 sono piani. Si ha quindi, ricordando la (5), $\operatorname{div} \mathbf{N}_3 = 0$ e per conseguenza dalla terza delle (1) (A. V. G. 42 [3])

$$\mathbf{N}_3 \times \operatorname{grad} \omega = 0.$$

Ne risulta che sulle linee l_3 il modulo di $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ (come già quello di \mathbf{v}) è costante. Le binormali tanto alle linee l_1 che alle l_2 , linee piane delle Σ_3 , sono parallele ad \mathbf{N}_3 . È quindi in base alla (4)

$$(6) \quad \operatorname{rot} \mathbf{N}_1 = c_1 \mathbf{N}_3, \quad \operatorname{rot} \mathbf{N}_2 = c_2 \mathbf{N}_3,$$

dove c_1 e c_2 sono le flessioni, a meno del segno, delle l_1 ed l_2 . Da queste, mediante l'operatore div , si ha

$$\mathbf{N}_3 \times \operatorname{grad} c_1 = 0, \quad \mathbf{N}_3 \times \operatorname{grad} c_2 = 0,$$

cosicchè le dette flessioni sono costanti sulle l_3 . Se si ricorda che le Σ_2 sono superficie modanate e quindi generabili dal loro profilo l_1 sopra un piano Σ_3 , col rotolamento di questo piano sopra una rigata, la circostanza ora rilevata per c_2 ci viene riconfermata in quanto il profilo l_1 in questo rotolamento rimane invariato, mentre ogni suo punto descrive una l_3 . E poichè le l_2 sono le traiettorie ortogonali delle l_1 su ogni Σ_3 , anche le l_2 rimangono invariate e le Σ_1 da esse generate sono pur esse superficie modanate, con la stessa rigata direttrice delle Σ_2 . Viene così confermata anche la costanza di c_1 lungo le l_3 .

(1) C. BURALI-FORTI ha dato i *Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie col metodo vettoriale generale*, « Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XXXIII, (1912), pp. 1-40, considerando una superficie di una famiglia normale ad una congruenza di rette. Nella mia Nota *Sulla geometria differenziale di superficie aventi interesse idrodinamico*, questi « Rend. », vol. XXXIII, serie 5^a, (1924), pp. 396-400, ho esteso il metodo alle superficie normali ad una congruenza di linee qualsiasi. Un ulteriore studio per questo caso ha fatto la prof. M. PASTORI con la Nota *Sulle superficie ortogonali a una congruenza normale di curve*, « Rend. del R. Ist. lombardo », vol. LX, (1927), pp. 111-119.

(2) Cfr. M. PASTORI, loc. cit., p. 116.

Dalla prima delle (1), essendo $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, si ricava la curvatura media delle Σ_i

$$\operatorname{div} \mathbf{N}_1 = -\mathbf{N}_1 \times \operatorname{grad} \log v.$$

Poichè v è costante lungo le l_3 anche $\operatorname{div} \mathbf{N}_1$ non varia lungo le linee vorticosi. D'altra parte, posto per semplicità in accordo colla (2)

$$(7) \quad \operatorname{rot} \mathbf{N}_3 = a_1 \mathbf{N}_1 + a_2 \mathbf{N}_2,$$

tenuto presente la seconda delle (6), è pure

$$\operatorname{div} \mathbf{N}_1 = \operatorname{div} (\mathbf{N}_2 \wedge \mathbf{N}_3) = c_2 - a_2.$$

La costanza di $\operatorname{div} \mathbf{N}_1$ e di c_2 secondo \mathbf{N}_3 messa in evidenza sopra importa la costanza anche di a_2 :

$$(8) \quad \mathbf{N}_3 \times \operatorname{grad} a_2 = 0.$$

Si ponga ora in (3) $r = 3, s = 1, t = 2$; per le (6) e (7) si ottiene

$$\mathbf{N}_1 \times \operatorname{grad} a_2 = a_2^2 - a_1 c_1.$$

Da questa, supposto $c_1 \neq 0$, segue che come c_1 ed a_2 anche a_1 è costante lungo le linee vorticosi:

$$(8') \quad \mathbf{N}_3 \times \operatorname{grad} a_1 = 0.$$

Dopo ciò la curvatura media delle Σ_2

$$\operatorname{div} \mathbf{N}_2 = \operatorname{div} (\mathbf{N}_3 \wedge \mathbf{N}_1) = a_1 - c_1$$

risulta anch'essa costante lungo le l_3 . Anche le curvature totali delle Σ_1 e delle Σ_2 , cioè $-a_2 c_2$ e $-a_1 c_1$ hanno la stessa costanza assieme alle a e c . Tutto ciò importa che le superficie modanate Σ_1 e Σ_2 colla stessa rigata direttrice devono essere superficie di rivoluzione. La constatazione analitica si può avere così. Dalla (7) si ha (A. V. G. 39, [4])

$$\frac{d \operatorname{rot} \mathbf{N}_3}{dP} \mathbf{N}_3 = a_1 \frac{d \mathbf{N}_1}{dP} \mathbf{N}_3 + a_2 \frac{d \mathbf{N}_2}{dP} \mathbf{N}_3 + \mathbf{N}_3 \times \operatorname{grad} a_1 \cdot \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_3 \times \operatorname{grad} a_2 \cdot \mathbf{N}_2.$$

Gli ultimi due termini per le (8) e (8') sono nulli; per le (5') e la (7) si ha infine

$$\frac{d \operatorname{rot} \mathbf{N}_3}{dP} \mathbf{N}_3 = (-a_1 a_2 + a_2 a_1) \mathbf{N}_3 = 0.$$

Quindi $\operatorname{rot} \mathbf{N}_3$ non varia sulle l_3 ; ma è $\operatorname{rot} \mathbf{N}_3 = c_3 \mathbf{b}_3$, dove c_3 è la flessione delle l_3 e \mathbf{b}_3 la loro binormale, flessione e binormale che con $\operatorname{rot} \mathbf{N}_3$ non variano sulle l_3 . Quindi ogni l_3 è una circonferenza e le Σ_3 , famiglia di piani normali ad una qualsiasi di queste circonferenze, costituiscono un fascio avente per asse l'asse della circonferenza.

In tali condizioni il moto del liquido risulta simmetrico rispetto a quest'asse, avendosi come caso limite il moto per piani paralleli quando l'asse è all'infinito ($c_3 = 0$). Si ha così uno dei casi del Viterbi.

Nel caso escluso sopra con $c_1 = 0$ si avrebbe $\text{rot } \mathbf{N}_1 = 0$; le l_1 sono rette e si cade allora nel secondo dei casi rilevati e che ora esamineremo.

III. Se le l_1 sono rette è $\text{rot } \mathbf{N}_1 = 0$. La (3) allora, prendendo per r, s, t successivamente le due terne 1, 2, 3 e 3, 1, 2, fornisce due relazioni che, posto per semplicità in accordo con le notazioni precedenti

$$\mathbf{N}_2 \times \text{rot } \mathbf{N}_3 = a_2, \quad \mathbf{N}_3 \times \text{rot } \mathbf{N}_2 = c_2,$$

si possono scrivere

$$(9) \quad \begin{cases} \mathbf{N}_1 \times \text{grad } \log c_2 = -c_2, \\ \mathbf{N}_1 \times \text{grad } \log a_2 = a_2. \end{cases}$$

D'altra parte dalla prima delle (1), come è stato rilevato sopra, si ha

$$\text{div. } \mathbf{N}_1 = c_2 - a_2 = -\mathbf{N}_1 \times \text{grad } \log v$$

e dalla seconda delle stesse essendo $(\text{rot } \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}$ un vettore conservativo, data la natura del moto

$$\text{rot } \mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_2 \wedge \text{grad } \log (v\omega),$$

da cui segue

$$(10) \quad c_2 = -\mathbf{N}_1 \times \text{grad } \log (v\omega).$$

Da questa e dall'espressione di $\text{div } \mathbf{N}_1$ si ricava

$$(10') \quad a_2 = -\mathbf{N}_1 \times \text{grad } \log \omega.$$

Osserviamo che le (9) sono soddisfatte da $a_2 = c_2 = 0$, nel qual caso dalle precedenti risulta che v e ω non variano sulle l_1 , e che le superficie Σ_1 hanno le curvature media $a_2 - c_2$ e totale $-a_2 c_2$ nulle, cosicchè le Σ_1 sono piani e le l_1 sono rette parallele. Tale soluzione è anche l'unica. Infatti in caso contrario le (9) si possono scrivere

$$(9') \quad \mathbf{N}_1 \times \text{grad } c_2^{-1} = 1, \quad \mathbf{N}_1 \times \text{grad } a_2^{-1} = -1.$$

Dalle (10) e (10') confrontate colle (9) e dalle (9') si deduce che

$$\frac{c_2}{v\omega}, \quad a_2 \omega, \quad \frac{a_2 c_2}{a_2 + c_2}$$

sono costanti sulle l_1 . Assieme alle due prime espressioni risulta costante manifestamente anche $a_2 c_2 / v$ e perciò con la terza anche $(a_2 + c_2) / v$. Questo assicura altresì la costanza sulle l_1 di a_2 / v e di c_2 / v e quindi quella di

ω, a_2, c_2 e v . Dalle (9) segue quindi $a_2 = c_2 = 0$, in contraddizione con l'ipotesi fatta. Pertanto $a_2 = c_2 = 0$ è l'unica soluzione, come era stato affermato.

Si ha così l'altro caso dei moti del Viterbi. Si constata per di più che su ciascuna delle traiettorie rettilinee parallele oltre che la velocità anche il suo rotore conserva lo stesso modulo. Se si ricorda poi che v non varia anche sulle l_3 , ne segue che le superficie di Bernoulli (le Σ_2 , attualmente cilindriche) sono superficie isotachie.

Dalla prima delle (1), coll'operatore rot , essendo nel caso attuale $\text{rot } \mathbf{N}_1 = 0$, si ha $\text{grad } v \wedge \mathbf{N}_1 = \omega \mathbf{N}_3$ e da questa $\omega = -\mathbf{N}_2 \times \text{grad } v$, la quale mette in evidenza che ω come v non varia sulle l_3 . Quindi le superficie di Bernoulli oltre che isotachie sono superficie sulle quali anche $\text{rot } v$ ha modulo costante.

Nel caso speciale in cui fosse $\mathbf{N}_1 \times \text{rot } \mathbf{N}_2 = 0$ e quindi $\text{rot } \mathbf{N}_2 = 0$, anche le l_2 sono rette e quindi le Σ_3 sono piani, come nel primo dei casi studiati. È questo il caso allora incontrato quando si è supposto $c_1 = 0$. Si può ora facilmente concludere che le Σ_3 devono formare un fascio di piani, che le Σ_2 sono cilindri coassiali e che il moto avviene per cilindri coassiali uniformemente secondo le generatrici.

IV. Rimane da esaminare l'ultimo caso, in cui le l_2 sono rette. Si ha ora $\text{rot } \mathbf{N}_2 = 0$, con $\text{rot } \mathbf{N}_1 = c_1 \mathbf{N}_3$ e $\text{rot } \mathbf{N}_3 = a_1 \mathbf{N}_1 + a_2 \mathbf{N}_2$. Si ricade manifestamente nel caso dei moti simmetrici con le l_2 rettilinee, per cui le Σ_2 sono cilindri coassiali, come è stato rilevato poco sopra. Corrispondentemente deve essere $c_1 = a_2 = 0$.

Geometria. — *Su certi gruppi infiniti del Lie, connessi alla teoria delle algebre e al calcolo differenziale assoluto.* Nota di G. ANDREOLI presentata dal Socio Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica fisica. — *La risoluzione di una banda di assorbimento ritenuta comune al praseodimio e neodimio.* Nota ⁽¹⁾ di L. FERNANDES, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Sin dal 1885 in cui Auer von Welsbach riuscì a scindere il vecchio Didimio, i numerosi sperimentatori che esaminarono lo spettro di assorbimento dei due nuovi elementi, osservarono come gli joni praseodimio e neodimio presentassero entrambi nella regione azzurra, una banda di assorbimento di lunghezza d'onda μ 469.

Il materiale che servì nei primi tempi all'esame spettroscopico era generalmente assai impuro e si attribuì quindi questa coincidenza all'impurezza del materiale.

Demarçay ⁽²⁾ però dopo aver ottenuto del neodimio il quale non presentava più nessuna altra banda d'assorbimento del praseodimio, conclude che la λ 469 non appartiene al praseodimio e dopo nuove ricerche ammette esser dovuta da un nuovo elemento.

Anche Auer von Welsbach ⁽³⁾ e Urbain ⁽⁴⁾ interpretarono come indizio della natura non elementare dei due elementi il fatto che una banda di assorbimento del praseodimio coincidesse esattamente con una del neodimio. Analoghe ipotesi avanzarono Krüss e Nilson ⁽⁵⁾ e Böhm ⁽⁶⁾ per spiegare questa coincidenza.

Gli autori invece che esaminarono più recentemente, prodotti assai più puri e che avevano resistito, senza mutare l'intensità relativa delle varie bande, a numerosi frazionamenti, scartarono questa ipotesi e preferirono considerare la possibilità di una coincidenza o la sovrapposizione di due bande molto vicine.

Anche i trattati più moderni, quali quelli dello Spencer, del Levy e del Mellor considerarono la banda λ 469 « comune al praseodimio e neodimio ».

L'esistenza però di una banda comune a due joni diversi non era cosa molto probabile perchè sarebbe venuto ad essere forse, l'unico caso conosciuto. D'altra parte pur ammettendo che le due bande avessero lunghezza d'onda diverse, esse dovevano essere così vicine da rendere assai difficile la

(1) Pervenuta all'Accademia il 14 ottobre 1927.

(2) « C. R. », 104, 580.

(3) « Zitzber. Kais. Akad. », Wiss., Wien, 112, 1903.

(4) « Ann. Chim. Phys. », 1900, 19, 184.

(5) « Berz. », 20, 2134 (1887).

(6) *Darstellung der seltenen Erden*, 1905.

risoluzione. Diluendo infatti le soluzioni dei due sali, la banda d'assorbimento prima si restringe un poco, ma poi diventa sempre più sfumata sino a divenire per forte diluizione, una leggera ombra.

Anche nel caso di soluzioni assai diluite ne risulta che pur essendo piccola l'intensità, la larghezza della banda è sempre tanto grande da render impossibile di poter notare una differenza di lunghezza d'onda per i due diversi elementi.

Per poter ottenere invece una maggior sottigliezza della banda, sono ricorso all'assorbimento di lamine cristalline che presentano notoriamente uno spettro assai più nitido di quello delle soluzioni.

Già Dimner⁽¹⁾ aveva osservato l'assorbimento del nitrato doppio col-l'ammonio allo stato cristallino e Dufet⁽²⁾ quello dei solfati, ma il primo di questi autori si era servito di uno spessore troppo forte ed aveva quindi ottenuto delle bande di larghezza paragonabile a quello delle soluzioni. Il secondo invece si era servito di un materiale non sufficientemente puro perchè i suoi valori potessero servire a risolvere l'attuale problema.

*
* *

L'osservazione dei cristalli di solfato di neodimio o praseodimio purissimi ottenuti coi metodi descritti in una precedente nota⁽³⁾ e la lettura delle lunghezze d'onda delle bande d'assorbimento fu eseguita con un grande spettrografo di Hilger a deviazione costante e taratura diretta.

Come dispositivo sperimentale mi ha servito quello che è usato attualmente per ricerche su cristalli di terre rare, nel Laboratorio fisico di Arcetri, dalla signorina prof. Brunetti, che sentitamente ringrazio.

In queste condizioni la banda λ 469 del praseodimio si scinde dando luogo ad un doppietto di bande intense e sfumate, a due bande intense ed una debole: il neodimio invece dà luogo ad una banda intensissima e netta e ad una d'intensità alquanto inferiore. In queste condizioni compaiono poi nell'azzurro altre bande di maggior lunghezza d'onda.

I cristalli preparati per lenta vaporazione delle soluzioni neutre dei solfati furono osservati attraverso lo spessore di circa un millimetro allo stato naturale, ma poichè sono policroici furono osservati in tutte le direzioni.

Nel caso del praseodimio, poichè anche per piccoli spessori del cristallo si ottenevano delle bande molto intense, fu usata una soluzione solida di solfato di praseodimio nel solfato di lantanio che come è noto non presenta spettro di assorbimento nella regione visibile.

(1) « Sb. W. », 1897.

(2) « Bull. Soc. Min. », 24, 323, 1900.

(3) ROLLA e FERNANDES, « Gaz. Chim. Ital. », LVI, 688, 1926.

La luce di un'intensa lampada ad incandescenza veniva concentrata sul cristallo e proiettata quindi mediante una lente sulla fenditura dello spettrografo.

Nella figura 1 riporto le fotografie dello spettro di assorbimento delle soluzioni dei due solfati di neodimio e di praseodimio nelle quali risulta la coincidenza della banda λ 469.

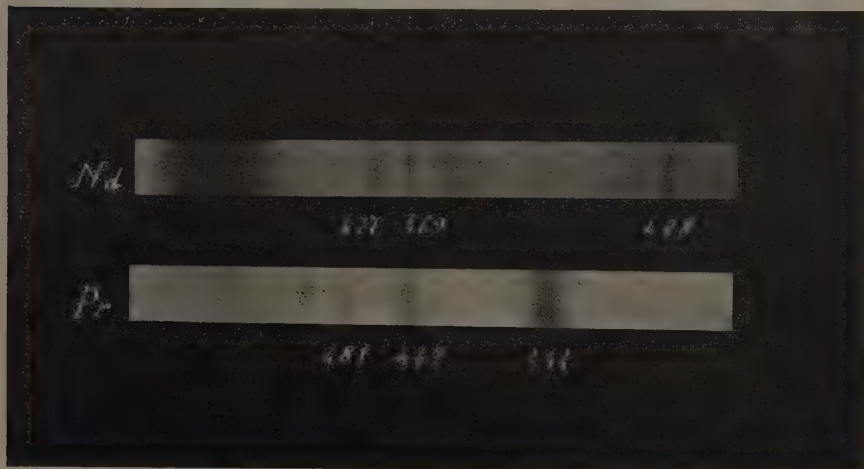


Fig. 1.

La figura 2 invece riporta lo spettro di assorbimento dei cristalli (per tutta la regione azzurro indaco dove la banda λ 469 è scissa in più bande le cui lunghezze d'onda non presentano coincidenze.

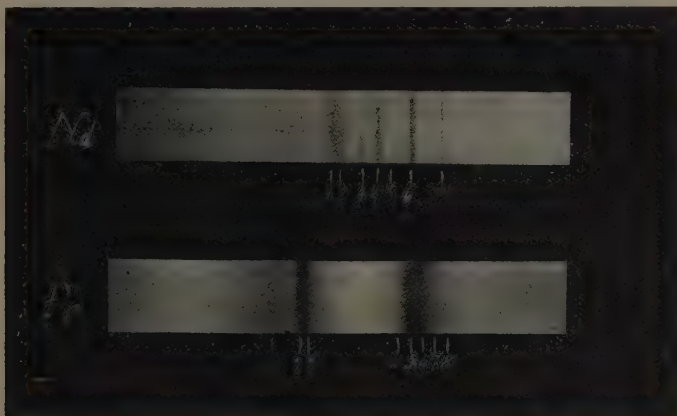


Fig. 2.

Nella seguente tabella riporto i valori di queste lunghezze d'onda ottenute dalla media di numerose letture. I numeri d'ordine si riferiscono a quelli indicati nelle fotografie.

$\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$			$\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$		
	λ	Intensità		λ	Intensità
1	4862	intensa	1	4773	intensissima sfumata
2	4833	intensissima	2	4765	intensa
3	4821	intensissima	3	4744	debole
4	4732	intense confuse	4	4730	»
	4723		5	47'4	»
5	4719	debole	6	4698	intensissima netta
6	4705	intensissima	7	4673	intensa
7	4671	media		4660	debolissima
8	4653	debole		4645	»
				4630	»
				4607	»
				4588	»
				4574	»
				4559	»

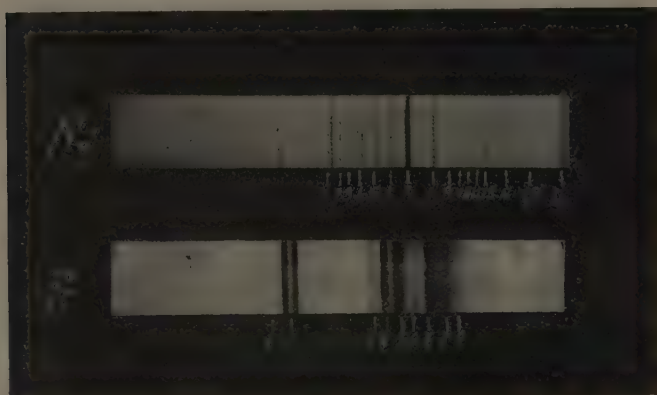


Fig. 3.

Allo scopo infine di ottenere una maggior definizione delle singole righe e quindi una risoluzione più netta di quelle più vicine, ho ripetuto l'osservazione a bassa temperatura.

Per primo Becquerel ha osservato come le bande di assorbimento dei solidi e dei liquidi abbiano il massimo di finezza e di nitidezza a temperature vicine a quelle dell'aria liquida e più recentemente Herztzfeld ha interpretato il fenomeno.

Anche nel nostro caso, a bassa temperatura furono ottenute delle righe nitide e sottili (vedi fig. 3) ed oltre ad una notevole variazione d'intensità si è potuto osservare delle considerevoli variazioni di lunghezza d'onda.

I cristalli venivano per l'osservazione sostenuti da un'armatura metallica e introdotti in una provetta di Dewar non argentata, non erano però completamente immersi nell'aria liquida, sia per evitare le bande di assorbimento dell'ossigeno, sia per non diminuire eccessivamente la intensità luminosa. In queste condizioni quindi la temperatura dei cristalli non era esattamente quella dell'aria liquida ma differiva di poco.

Nella tabella seguente sono riportati i valori delle lunghezze d'onda delle righe di assorbimento dei solfati di praseodimio e neodimio osservate in queste condizioni.

$\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$			$\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$		
	λ	Intensità		λ	Intensità
1	4848	media	1	4776	intensa netta
2	4833	intensissima	2	4771	» »
	4821		3	4762	medie
3	4732	intensa		4759	
4	4723	intensissime	4	4746	media
	4719		5	4730	»
5	4705	intensissima	6	4714	»
6	4640	debole	7	4698	intensissima netta
7	4771	intensissima	8	4673	intensa
8	4652	intensa	9	4660	debole
9	4641	debole	10	4650	»
			11	4640	»
			12	4634	»
			13	4627	»
			14	4607	»
			15	4588	»
			16	4560	intensissima

Chimica. — *Sulla struttura cristallina del cloruro doppio di cadmio e cesio* CsCdCl_3 . (Considerazioni sulla struttura monometrica tipo $\text{A}[\text{BX}_3]$). Nota ⁽¹⁾ di A. FERRARI e di A. BARONI, presentata dal Socio G. BRUNI ⁽²⁾.

Il cloruro di cesio si combina con quello di cadmio per dare due sali complessi Cs_2CdCl_4 e CsCdCl_3 ⁽³⁾.

Secondo Wells e Walden il primo si forma aggiungendo cloruro di cadmio ad una soluzione concentrata di cloruro di cesio, mentre precipitando il cloruro di cadmio in soluzione satura con cloruro di cesio si otterrebbe il secondo. Ricristallizzando dall'acqua Cs_2CdCl_4 si ottiene CsCdCl_3 .

Abbiamo preparato il composto CsCdCl_3 precipitando nelle condizioni dette sopra il cloruro di cadmio con cloruro di cesio.

Filtrato il precipitato e lasciata a sè la soluzione si separarono dei cristalli ben sviluppati e sufficientemente grandi da riconoscerne ad occhio la forma cubica.

Abbiamo analizzato sia il precipitato lavato con poca acqua che i cristalli. I risultati sono i seguenti:

	polvere precipitata	cristalli	Calcolato per CsCdCl_3
Cadmio	31.66	31.90	31.97
Cesio	36.98	37.00	37.77

Entrambi i prodotti corrispondono quindi al sale doppio nelle proporzioni 1 : 1.

Abbiamo applicato il metodo röntgenografico allo studio del reticolo di questa sostanza.

Le linee di diffrazione del fotogramma di Debye del clorocadmato di cesio ottenuto con un tubo Coolidge ad anticatodo di ferro non sono nitide esse si ordinano tuttavia abbastanza bene in un reticolo cubico.

Nella tabella seguente sono dati gli angoli di riflessione corretti ⁽⁴⁾, le distanze reticolari, gli indici delle faccie, il lato della cella elementare, le intensità osservate e il fattore nS^2 .

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 24 ottobre 1927.

(3) GODEFFROY, « Ber. », 8, 9 (1875). H. L. WELLS e P. T. WALDEN, « Zeit. anorg. Chemie », 5, p. 269 (1894).

(4) Gli angoli sono corretti per l'errore dovuto allo spessore del preparato secondo la formula di Pauli. (« Zeit. f. Krystall. », 56, p. 591).

TABELLA I.

Θ osserv.	$d = \frac{\lambda}{2d \sin \theta/2}$	K	$h_1 \ h_2 \ h_3$	a	Intensità osservata	n_{S_2}
43.85	2.591	α	002	5.182	md	711
47.77	2.376	α	(133) ⁽¹⁾	(10.33)	m	—
54.21	2.123	α	112	5.207	d	806
57.23	1.832	β	022	5.190	d	—
63.27	1.841	α	022	5.218	m	1420
72.14	1.621	α	013	5.130	d	806
88.49	1.385	α	123	5.180	mf	1610
104.13	1.218	α	114 033	5.170	m	1210
111.40	1.172	α	024	5.220	mf	2860
131.33	1.062	α	224	5.203	f	2860
141.89	1.023	α	134 015	5.220	f	2480

Dalla precedente tabella si ricava come valore medio di a 5.20 Å e da questo valore della costante si calcola, ammettendo che nella cella sia contenuta una molecola, la densità:

$$\frac{351.42 \times 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ gr.}}{5.20^3 \times 10^{-24} \text{ cm}^3} = 4.14,$$

mentre quella da noi dedotta sperimentalmente è alquanto più bassa e precisamente 3.75.

Il fattore di struttura S è stato calcolato attribuendo alla cella del composto CsCdCl_3 le coordinate:

$$\text{Cs}(000) \quad \text{Cd}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad \text{Cl}(0 \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0).$$

L'accordo è abbastanza buono; a conferma della detta struttura si osserva che nessuna faccia ad indici tutti dispari compare nel fotogramma delle polveri; per queste faccie si ha infatti un fattore di struttura piccolo. La conferma della predetta struttura si trova anche col metodo di Laue. Infatti con un cristallo ottenuto nel modo predetto abbiamo ottenuto il fotogramma di Laue riprodotto schematicamente assieme alla proiezione gnomonica nella fig. 1.

(1) Questa linea si potrebbe ordinare solo ammettendo la cella doppia con gli indici scritti fra parentesi.

A conferma della suddetta struttura nella proiezione si osserva che le faccie ad indici tutti dispari danno macchie di riflessione che sono deboli essendo il loro fattore di struttura:

$$\text{Cs}^+ - \text{Cd}^{++} + 3 \text{Cl}^- = 62$$

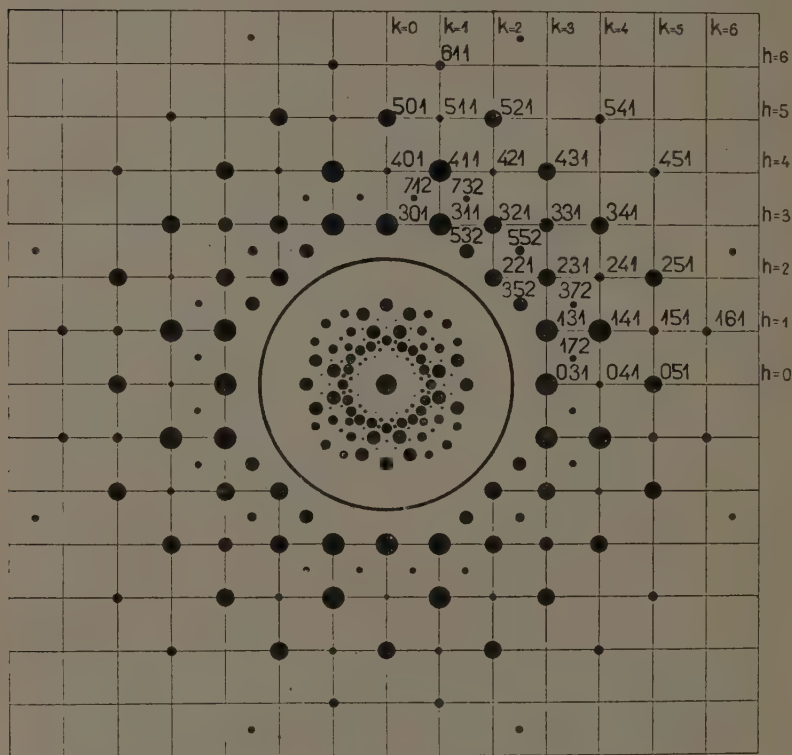


Fig. 1.

mentre sono più forti quelle corrispondenti alle faccie aventi due indici dispari e uno pari per le quali il fattore di struttura risulta:

$$\text{Cs}^+ + \text{Cd}^{++} - \text{Cl}^- = 82.$$

Con Cs^+ , Cd^{++} e Cl^- si intende il numero di elettroni dell'ione corrispondente.

La 311 e la 131 che sono forti quanto la 301 e la 031 devono ciò al fatto che in quel punto coincide la riflessione di secondo ordine ad indici quindi tutti pari e il cui fattore di struttura è $\text{Cs}^+ + \text{Cd}^{++} + 3\text{Cl}^- = 154$.

Nei calcoli delle predette intensità abbiamo ritenuto che i tre elementi costituenti la molecola si ritrovino allo stato di ioni (Cs^+ , Cd^{++} e Cl^-). Se però ci basiamo su questa supposizione per vedere come lo spazio venga utilizzato nel reticolo, osserviamo che attribuendo ai detti ioni i raggi apparenti calcolati da molti reticoli noti, le dimensioni della cella sono inferiori a quello che è necessario per contenerli. Infatti la distanza $\text{Cl} - \text{Cd}$ risulta di 2.60 mentre la distanza medesima assumendo per i detti ioni i valori dati da V. M. Goldschmidt⁽¹⁾ dovrebbe essere:

$$1.81 + 1.03 = 2.84 \text{ \AA}.$$

Per la distanza $\text{Cs} - \text{Cl}$ che nel nostro reticolo risulta 3.68, la somma dei raggi è:

$$1.65 + 1.81 = 3.46 \text{ \AA}.$$

quindi perfettamente sufficiente.

Il maggior avvicinamento degli atomi di cloro e di cadmio è assai importante, perchè sta ad indicare che l'ione CdCl_3^- non è costituito da un ione Cd^{++} attorniato da tre ioni Cl^- conservanti le dimensioni usuali, ma presenta dimensioni inferiori, che non si possono calcolare ritenendole una proprietà additiva dei componenti.

Possiamo confermare questa affermazione con qualche altro esempio.

Nel composto KMgF_3 studiato da A. E. van Arkel⁽²⁾ la distanza $\text{Mg} - \text{F}$ è 2.00 Å mentre la somma dei raggi degli ioni Mg^{++} e F^- è $0.78 + 1.33 = 2.11 \text{ \AA}$.

Nel cloromercuriato di cesio le cui costanti sono state date recentemente da G. Natta⁽³⁾ la distanza $\text{Hg} - \text{Cl}$ risulta di 2.77 Å mentre la somma dei raggi degli ioni corrispondenti è $1.12 + 1.81 = 2.93 \text{ \AA}$. Ci limitiamo a questi casi perchè i raggi degli ioni semplici che intervengono sono noti con buona concordanza e sicurezza, ma la serie dei reticoli di questo tipo fino ad ora studiati è assai lunga, come si può vedere in una tabella data da V. M. Goldschmidt⁽⁴⁾. Occorre notare che per parecchi di questi reticoli lo spazio sarebbe sufficiente per contenere gli ioni che formano il complesso coi loro comuni raggi. In questi casi però interviene ad allargare il reticolo il metallo che si trova ai vertici e che presenta un raggio ragguardevole.

(1) *Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente VII.* « Norske Videnskaps-Akad. », Oslo.

(2) « Phisica », V, 162, 1925.

(3) Questi « Rendiconti », (6^a) V, 1^o sem. 1927, 1003.

(4) Loc. cit., p. 70.

Riassumendo:

1° Il clorocadmio di cesio presenta un reticolo monometrico, la cui cella elementare contenente una molecola ha uno spigolo di 5.20 \AA .

2° L'ione CdCl_3^- presenta delle dimensioni globali diverse e precisamente inferiori a quelle che si ottengono facendo la somma delle dimensioni degli ioni componenti Cd^{++} e Cl^- . Questa proprietà sembra generale per gli ioni complessi.

3° L'identità della struttura di CsCdCl_3 e di CsHgCl_3 è un esempio di più delle analogie cristallografiche fra cadmio e mercurio.

Chimica-fisica. — *Analisi coi raggi X e struttura cristallina delle leghe cadmio-argento.* Nota I di G. NATTA e M. FRERI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. BRUNI ⁽²⁾.

Tra i sistemi binari a componenti metallici, quello cadmio-argento è da ritenersi come uno dei più interessanti per i numerosi composti che presenta e per la larga estensione e varietà di soluzioni solide. La spiccata analogia di questo sistema con quello rame-zinco, che deve attribuirsi alla posizione omologa che hanno le due coppie di elementi nel sistema periodico, e le polemiche che hanno suscitato i numerosi lavori, non sempre concordi, sopra la costituzione degli ottoni, ancor ora discussa, ci hanno indotto a riprendere con nuovi mezzi di indagine l'esame delle leghe cadmio-argento.

Sebbene tali leghe siano state già esaminate da vari sperimentatori, rimangono ancora delle incertezze sulla loro costituzione, specialmente riguardo alla esistenza ed alla formula da attribuirsi a certi composti. Le discordanze tra le diverse interpretazioni, date a questo sistema, dimostrano che i vecchi metodi impiegati per lo studio delle leghe appaiono, in molti casi, inadeguati per stabilire la natura chimica delle fasi metalliche.

Noi abbiamo ora applicato, per lo studio delle leghe cadmio-argento, i metodi dell'analisi röntgenografica, i quali, dall'esame degli spettri di diffrazione, ci permisero non solo di accertare l'esistenza delle soluzioni solide e dei diversi composti presenti, ma anche di determinare per ciascuno di essi la forma cristallina, la struttura intima, la natura chimica, la distribuzione degli atomi componenti nella cella elementare, e le dimensioni di questa.

L'apparecchiatura da noi usata per l'analisi coi raggi X della struttura cristallina e in particolare delle leghe è stata descritta in precedenti pubblicazioni ⁽³⁾.

(1) Nella seduta del 6 novembre 1927.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(3) G. NATTA, *Struttura delle leghe cadmio-magnesio*, R. Istituto Lombardo Scienze e Lettere. Premio « Fondazione Cagnola », 1925.

Riassumendo brevemente le attuali cognizioni sul sistema cadmio-argento ricordiamo che dapprima fu esaminato da Gautier ⁽¹⁾, quindi da Kirke-Rose ⁽²⁾ ma in modo imperfetto. Quest'ultimo indicò la presenza di numerosi composti: Ag_4Cd , Ag_2Cd , Ag_3Cd_2 , AgCd , Ag_2Cd_3 , AgCd_3 , che in gran parte furono ritenuti inesistenti dai successivi sperimentatori. G. Bruni e E. Quercigh ⁽³⁾ diedero in base ai dati dell'analisi termica un diagramma completo di solidificazione, dal quale risulta l'esistenza di due larghe serie di soluzioni solide dal 0 all'80 e dal 87 al 100 % di cadmio e di due composti intermetallici AgCd e AgCd_4 , mentre le leghe 80-87 % sarebbero formate da un conglomerato di AgCd_4 con la soluzione solida limite della fase successiva. Poco dopo Petrenko e Fedorow ⁽⁴⁾ presentarono un diagramma, in parte coincidente con quello precedentemente descritto, ma che ne differisce nella parte centrale: essi nel campo delle soluzioni solide, che stanno tra i due composti osservati dal Bruni, indicano la presenza di due altri composti Ag_2Cd_3 e AgCd_3 .

Noi abbiamo preparato le leghe, partendo da cadmio e da argento puri di Kahlbaum, ed abbiamo in esse determinato, dopo la preparazione, l'argento, per conoscere le eventuali variazioni di composizione causate dalla notevole volatilità del cadmio ad alta temperatura. Si è però osservato che nelle leghe preparate per fusione sotto un bagno fuso di una miscela di sali alcalini non si osserva, durante la preparazione, variazione apprezzabile di composizione. Abbiamo aspirato le leghe fuse in tubetti di quarzo di circa un millimetro interno di diametro ed abbiamo temprato immediatamente i cilindretti così ottenuti per rapida immersione in acqua fredda. Abbiamo successivamente ricotto lungamente le leghe mantenendole per varie ore a temperature diverse e man mano decrescenti per poter poi osservare coi raggi X le eventuali trasformazioni.

In molti casi, per maggiore esattezza, il fotogramma della lega temprata, la ricottura, il successivo fotogramma e l'analisi furono eseguiti sullo stesso cilindretto.

Tutti i fotogrammi furono eseguiti con le radiazioni di un anticatodo di rame ($K_{\alpha 1} = 1541.16$, $K_{\alpha 2} = 1537.302$, $K_{\beta} = 1389.33$). Il tipo di camera usato per i fotogrammi delle polveri permette la rotazione del preparato, necessaria per la maggior parte di queste leghe per il notevole sviluppo dei singoli germi cristallini. La fenditura di 1 mm. di larghezza e di 6 mm. di altezza per l'entrata dei raggi X nella camera, permette di ottenere fotogrammi con grande rapidità (40 minuti) a relativamente bassi milliamperaggi (4 milliamperes a 37 KV).

(1) « Compt.-rend. » 123 (1896), 172; « Bull. Soc. Encouragement », 51 (1896), 1315

(2) « Proc. Roy. Soc. » London, 74 (1905), 218.

(3) « Zeitschr. f. anorg. Chem. », 68 (1910), 198.

(4) « Zeitschr. f. anorg. Chem. », 70 (1911), 161.

L'approssimazione raggiunge i 0.2-0.3 % e corrisponde a circa 0.01 Å nel valore delle costanti reticolari.

1. Fase α . *Soluzioni solide di cadmio in argento*. — Tutti i fotogrammi delle leghe sia temprate che ricotte dall'argento puro sino al 45 % di cadmio (44 % atomico), presentano lo stesso tipo di linee. Lo spostamento regolare della posizione delle linee con la composizione dimostra che la fase α è formata da soluzioni solide di cadmio nel reticolo dell'argento (fig. 1). Le intensità relative delle linee nei vari fotogrammi si mantengono rigorosamente costanti. Dato il numero atomico poco diverso del cadmio da quello dell'argento e quindi dato il potere diffrangente per i raggi X praticamente identico, non è possibile affermare che i valori normali delle intensità siano dovuti ad una distribuzione irregolare del metallo soluto nel reticolo del solvente; sembra però da escludersi *a priori*, osservando la variazione regolare del parametro con la composizione, l'esistenza di soluzioni solide con distribuzione regolare secondo Tammann. Nella tabella seguente sono indicati, per le varie leghe e per le diverse facce, i valori degli angoli di riflessione Θ 2, non corretti dallo spostamento dovuto al diametro del preparato, spostamento che è notevole a causa della forte opacità della lega. Tale correzione si è invece applicata nella determinazione delle dimensioni della cella elementare, il cui valore limite, per $\Theta/2$ crescenti, è indicato al piede delle varie colonne.

TABELLA I. — Fase α .

K	h k l	Percentuali atomiche di argento					
		100	94.6	85.3	74.4	68.4	55.8
β	111	19.85	19.60	19.70	19.50	19.40	19.50
	002	22.50	22.75	22.65	22.50	22.45	22.10
	220	29.55	29.50	29.25	29.00	28.75	28.10
	220	33.00	32.60	32.60	32.50	32.10	32.10
β	113	35.70	35.75	35.15	34.60	34.30	34.00
	113	39.40	39.20	39.00	38.90	38.95	38.50
	222	41.50	41.15	41.00	40.80	40.50	40.56
β	331	48.60	48.80	48.00	47.90	47.50	47.75
	004	50.10	49.60	49.50	49.00	48.90	48.60
	331	56.30	55.40	55.30	54.60	54.25	54.25
	240	58.60	57.65	57.50	56.90	56.50	56.40
	332	62.50	—	—	61.30	—	60.80
	224	—	—	—	66.15	—	65.50
<i>a</i> corretto		4.07	4.08	4.10	4.13	4.14	4.15

Si osserva che il lato della cella elementare varia linearmente con la composizione aumentando dal valore di 4.07 \AA che ha per l'argento puro sino a 4.14 \AA per la lega al 31 % atomico di cadmio (composizione prossima al limite della curva del solido). Il valore di a non aumenta più proporzionalmente per un ulteriore aumento del cadmio sino al 44 % atomico, valore limite della curva delle temperature di inizio della solidificazione, dimostrando quindi, come anche si dedurrebbe dal diagramma termico, che la lega di tale composizione segrega durante la solidificazione dei cristalli di composizione limite vicina al 35 %. Sino a questo limite è seguita rigorosamente la legge di Vegard di proporzionalità tra composizione e dimensione della cella. Essendo per la lega al 31 % atomico di cadmio, $71.4 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$ il

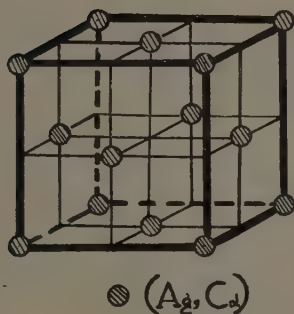


Fig. 1.

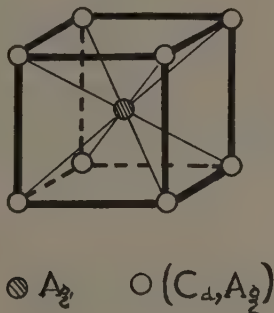


Fig. 2.

volume della cella elementare, ed essendo il peso medio degli atomi costituenti 431.9×1.66 (dove 1.66 è il peso dell'atomo di numero atomico 1) si calcola per la densità 10.48.

2. Fase β . *Composto AgCd e soluzioni solide di Cd nello stesso.* — Mentre la lega al 45 % di cadmio fornisce un fotogramma come quello dell'argento, la lega al 48 % dà dei fotogrammi di aspetto completamente diverso. Fotogrammi analoghi, con le linee soltanto leggermente avvicinate alla macchia primaria, forniscono pure i fotogrammi al 50 % (49.0 at.) e al 52 % (51.0 at.) di cadmio. Le poche linee presenti si ordinano facilmente per un reticolo cubico corpo centrato, tipo cloruro di cesio (fig. 2) e le intensità calcolate accordano bene con le intensità sperimentali.

Il lato della cella risulta per la lega al 48 % di cadmio (47.0 at.) 3.32 \AA , per quella al 52 % (51.0 at.) 3.34 \AA , (valori corretti) i volumi risultano rispettivamente 36.62 e 37.25 \AA^3 , e le densità 9.97 e 9.82. Le

celle elementari contengono una molecola AgCd ed il reticolo permette la sostituzione di atomi di cadmio con quelli di argento. Data la vicinanza nel peso atomico dei due metalli è impossibile, in base all'esame delle intensità, stabilire se la fase β ha la costituzione definita dalle seguenti coordinate degli atomi:

$$\begin{aligned} \text{Cd} &= 0,0,0 & ; & \quad (\text{Ag}, \text{Cd}) = 1/2, 1/2, 1/2 \text{ (I)} \\ \text{oppure} \quad (\text{Ag}, \text{Cd}) &= 0,0,0 & ; & \quad (\text{Ag}, \text{Cd}) = 1/2, 1/2, 1/2 \text{ (II)} \end{aligned}$$

ossia se tutte le posizioni degli atomi nel reticolo sono o non sono strutturalmente equivalenti.

Il valore calcolato per la densità del composto AgCd (9.93) è solo leggermente superiore a quella determinata da noi sperimentalmente (9.770).

TABELLA II. — Fase β (comp. AgCd — modif. cubica).

$\theta/2$	d	h k l	a	I oss.	NS ²
20.80	2.1703	101	3.078	f	261
28.75	1.6022	002	3.245	m	55
36.95	1.4562	β 121		d	
35.50	1.3270	121	3.253	ff	444
41.75	1.1570	220	3.276	f	130
45.95	1.0722	β 222		dd	
47.95	1.0378	103	3.281	ff	261
54.35	0.9483	222	3.286	m	73
61.00	0.8811	132	3.298	ff	444

3. Fase β' . — Già in base all'analisi termica Petrenko e Fedorow avevano osservato che il composto AgCd subisce a 460° una trasformazione, che è stata interpretata come una decomposizione della lega β instabile nelle fasi vicine α e γ .

Noi abbiamo esaminato dopo una lunga ricottura a temperatura leggermente inferiore a quella di trasformazione e dopo successiva tempera (per evitare la ulteriore trasformazione a 200°) tali leghe col metodo delle polveri. I fotogrammi della lega temprata sono completamente diversi da quelli della lega ricotta e le linee di quest'ultima non coincidono con quelle di nessuna altra fase del sistema. L'interpretazione di P. e F. appare perciò errata.

Viene invece dimostrato esistere una trasformazione polimorfica, perchè tutte le linee dei fotogrammi si ordinano bene per un reticolo esagonale o romboedrico con un rapporto assiale 1.62. Il lato della cella risulta $a = 3.01$ (valore corretto). La cella elementare contiene una molecola AgCd e si calcola per la densità 9.57.

TABELLA III. — Composto AgCd (modif. esagonale).

$\theta/2$	d	h k l	a	l oss.	NS ²
20.25	2.2267	101	2.920	mf	41
22.00	2.0571	102	3.015	d	18
31.40	1.4790	110	2.958	mf	36
34.75	1.3520	103	2.951	f	41
37.60	1.2631	112	2.968	f	36
38.50	1.2379	201	2.958	f	41
39.85	1.2026	004	2.971	dd	10
42.80	1.1341	202	2.990	d	18
50.00	1.0060	203	2.980	f	41
52.00	0.9779	120	2.990	d	18
53.60	0.9577	121	2.991	ff	82
55.40	0.9358	114	2.980	f	72
58.50	0.9038	$\left. \begin{matrix} 122 \\ 105 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 2.980 \\ 2.980 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} ff \\ ff \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 36 + \\ 41 \end{matrix} \right\}$
59.95	0.8890	204	3.008	d	18
62.10	0.8740	300	3.018	d	18
67.10	0.8365	123	2.990	f	41

Il calcolo delle intensità fu eseguito per varie supposizioni.

- Ottimo accordo tra le intensità calcolate e quelle osservate si ha per la seguente struttura (fig. 3):

$$\text{Ag} = 0.0.0$$

$$\text{Cd} = 1/3, 2/3, 1/2.$$

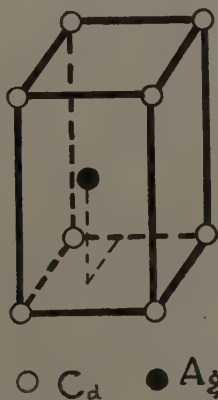


Fig. 3.

I valori calcolati per NS^2 dove S è il fattore di struttura ed N è il numero dei piani cooperanti ad ogni singola riflessione, accordano in modo perfetto con le intensità osservate (v. Tab. III).

Anche la modificazione esagonale del composto AgCd sembra sia capace di tenere disciolta allo stato solido una ulteriore quantità di cadmio ma tale supposizione non è confermata da una sensibile deformazione nelle dimensioni della cella elementare.

I fotogrammi delle leghe ricotte a 400° di composizione compresa tra il 48 e il 55 % di cadmio (47.0 % e 53.9 % atomici) sono tutti dello stesso tipo senza sovrapposizione sensibile di linee dovute ad altre strutture, a differenza della lega al 55 % temprata che appare costituita da una miscela delle fasi β e γ .

In una prossima Nota riferiremo i risultati ottenuti dall'esame röntgenografico delle altre fasi del sistema.

Chimica-fisica. — *Relazioni fra i potenziali di ionizzazione di primo e di secondo ordine degli elementi omologhi*⁽¹⁾. Nota di G. PICCARDI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. ROLLA.

Il sistema di curve, riportato in una precedente Nota⁽³⁾, permette di valutare il potenziale di ionizzazione di primo ordine V.I di un elemento, partendo dai valori dei potenziali dei suoi omologhi. Riportiamo qui una tabella di potenziali (fino ad oggi sconosciuti o valutati con approssimazione) calcolati mediante questo sistema di curve: l'esattezza dei valori ottenuti dipende naturalmente da quella dei potenziali di partenza; dato il metodo di determinazione, la prima cifra decimale si può ritenere esatta, la seconda rientra nell'errore grafico.

Ge 7.52	As 9.04	Se 9.02	Cl 12.26	Xe 12.33
	Sb 8.46	Te 8.43	Br 10.47	Rd 11.96
	Bi 8.48	Po 8.46	J 9.76	
			85 9.65	

Non è possibile valutare il potenziale di primo ordine del radio Ra. I (che si ritiene aggirarsi fra 5 e 5.5 volta), essendo sconosciuto il potenziale dell'elemento, ancora ignoto, di numero atomico 87 (elemento fonda-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 6 novembre 1927.

(3) Questi « Rendiconti ».

mentale dell'ultima porzione di periodo) perchè dalla curva relativa a questi elementi, non si può ricavare che il valore della differenza Ra. I-87 I.

Ma i potenziali di secondo ordine del radio⁽¹⁾ e dei metalli alcalino-terrosi e bivalenti, Zn, Cd, Hg, sono noti, eccettuato quello del mercurio (quest'ultimo è non ben precisato a 20-volta): cercando allora quali relazioni intercedono fra i potenziali di primo e di secondo ordine degli elementi omologhi, si può passare dal Ra. II al Ra. I e quindi a 87 I.

Anche in questo caso è probabile che l'identità di configurazione degli elementi omologhi ci assicuri per ogni gruppo di elementi una legge ben definita e cioè: Il rapporto fra il potenziale di ionizzazione di secondo ordine e quello di primo ordine, relativi ad uno stesso elemento, è, per i vari omologhi, costante ($V. II : V. I = r = \text{costante}$).

Una verifica completa di questa legge si può fare solo per pochi gruppi di elementi, causa la mancanza di dati numerici sperimentali; i risultati di questa verifica sono riuniti nel grafico qui unito che porta in ascisse il numero atomico ed in ordinate il rapporto $r = V. II : V. I$.

Osservando il grafico si osserva che il rapporto r si può effettivamente ritenere, in prima approssimazione, costante in vari gruppi di elementi omologhi.

Per i gas nobili si trova $r = 2.2$ circa. Noi abbiamo utilizzato per l'elio i valori spettroscopici, per l'argo, il cripto e lo xeno i valori determinati dal De Jardin⁽²⁾, allo scopo di avere dei valori ottenuti con lo stesso metodo, nelle stesse condizioni e dallo stesso sperimentatore (linea 2).

Per i metalli alcalino terrosi e i bivalenti Zn, Cd, Hg, (che anche in questo caso seguono quasi esattamente la legge degli alcalino terrosi) si trova $r = 1.9$ (linea 1).

In generale per quasi tutti gli altri elementi (circoli doppi) r è compreso fra 1.9 e 2.2 cioè fra i valori relativi agli alcalino terrosi ed ai gas nobili. Per i metalli trivalenti del gruppo del boro, non si può stabilire il valore di r che nel caso dell'alluminio⁽³⁾ ed in quello del tallio⁽⁴⁾ e si trova $r = 3.0$ in ambedue i casi confermandosi così l'invariabilità del rapporto r (linea 3). Il valore eccezionalmente alto presentato in questo caso dal rapporto r si può spiegare col fatto che nei metalli trivalenti, la prima ionizzazione avviene sopra un'orbita p , mentre la seconda avviene sopra un'orbita s , appartenenti ad una stessa serie, a differenza degli elementi appartenenti ai gruppi sopra citati, per i quali le due ionizzazioni avvengono sopra la stessa orbita p .

(1) K. T. COMPTON e F. L. MOHLER, *Critical Potential*, «Bull. Nat. Res. Council», vol. 9; parte I^a, n. 48, 1924.

(2) G. DEJARDIN, «C. R.», 176, 894-897, 1923; «C. R.», 178, 1069-1071, 1924.

(3) Al II = 18.17 v. RUSSEL, «Nature», 113, 162, 1924.

(4) Tl II è stato stimato da MOHLER e RUARK. circa 18.5, v.

Per il rame ⁽¹⁾ (e probabilmente anche per tutti i metalli nobili) si trova un valore pure notevolmente superiore al valore generalmente osservato e cioè 2.65; anche in questo caso la prima ionizzazione avviene su di un'orbita *s*, la seconda su di un'orbita *p*.

Per i metalli alcalini, invece il comportamento è del tutto discorde. Per essi *r* non è costante, ma subisce forti variazioni al variare del numero atomico, come mostra la curva 4 del diagramma.

Questo fatto interessantissimo dimostra che quando la successive ionizzazioni, avvengono non sopra la stessa orbita, nè sopra due successive orbite appartenenti ad una stessa serie, ma sopra due orbite, appartenenti a due serie diverse, ed entrano perciò in giuoco le discontinuità della struttura atomica (che coincidono con quelle del sistema degli elementi), la legge è completamente diversa. (Ciò conferma ancora una volta che l'inizio di un periodo avviene effettivamente in corrispondenza di un metallo alcalino, che deve perciò considerarsi come l'elemento fondamentale di tutto il periodo stesso).

I valori dei potenziali di secondo ordine usati per i metalli alcalini sono quelli che si deducono dai limiti delle serie K, L, M, N, O dei raggi X. Per il litio abbiamo riportato anche i valori calcolati sul potenziale di ionizzazione determinato spettroscopicamente da Sugiyura ⁽²⁾, 67.5 v. e su quello calcolato da Pauling ⁽³⁾, 76.2 v.

Abbiamo detto che per i gruppi di elementi omologhi (ad eccezione degli alcalini) $r = \text{Cost.}$ in prima approssimazione. Precisando maggiormente, nel caso dei metalli alcalini terrosi, si trova che il rapporto *r* subisce una piccolissima variazione, al variare del numero atomico, diminuendo secondo una legge quasi esattamente lineare ⁽⁴⁾, di 0.025 passando dal magnesio al bario.

In base a questa legge lineare si può determinare con buona esattezza il valore di *r* nel caso del radio $r = 1.910$; allora:

$$\text{Ra I} = \text{Ra II}/r = 10.23/1.910 = 5.35.$$

(Ra I cade dunque esattamente fra 5 e 5.5 volta, valori fra i quali si ritiene generalmente esser compreso il potenziale di ionizzazione del radio).

Ottenuto così il potenziale di ionizzazione di primo ordine del radio si può, mediante la curva I del diagramma riportato nella precedente Nota, determinare immediatamente quello dell'elemento sconosciuto di numero atomico 87; e si trova $87 \text{ I} = 4.24$ volta.

(1) Calcolato sul valore $\text{Cu} = 20.5$ v. determinato spettroscopicamente da A. G. SHENSTONE, « Phys. Rev. », 29, 380, 1927.

(2) Y. SUGIURA, « Jour. d. Phys. et le Radium » (6), 6, 232-235, 1925.

(3) L. PAULING, « Phys. Rev. », 29, 285, 1925.

(4) Ottenuta per interpolazione.

Sempre in base alla legge lineare dei metalli alcalino terrosi si trova per il potenziale di ionizzazione di secondo ordine del berillio, Be II 18.8 volta.

È notevole il fatto che i potenziali da noi calcolati per il radio e l'elemento 87 siano leggermente superiori a quelli dei loro omologhi bario e cesio, dimostrando che anche questi elementi radio e 87, come il tallio ecc. risentono della perturbazione che viene portata nel sistema degli elementi dal gruppo delle terre rare.

Chimica organica. — *Solfonazione di eteri fenolici con acido ammino solfonico.* Nota di A. QUILICO, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica-Fisica. — *Analisi coi raggi X e struttura cristallina delle leghe cadmio-argento.* Nota II di G. NATTA e M. FRERI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Botanica. — *Frutti di due varietà portati dalla stessa pianta* ⁽¹⁾. Nota di R. SAVELLI, presentata ⁽²⁾ dal Socio B. LONGO.

Lagenaria vulgaris Sér. è nota principalmente nelle sue forme *Gourda* Sér. e *Cougourda* Sér., differenti fra loro perchè mentre nel frutto della prima una strozzatura mediana separa due rigonfiamenti disuguali, nel frutto della seconda rimane soltanto il rigonfiamento maggiore, distale, e la parte prossimale — invece di tornare a rigonfiarsi — si assottiglia in un collo più o meno gracile e generalmente ricurvo (cfr. Fiori, *Nuova Flora analitica d'Italia*, vol. II, fasc. 4°, p. 537). Esaminando le due piante esse appaiono perfettamente uguali in tutto il resto, e dunque sembra bene che la caratteristica differenziale consista in un *unit-character*, epperò volendo porsi da un punto di vista devriesiano si potrebbe anche ritenere che la forma *Gougourda* sia propriamente una « varietà » anche nello stretto senso genetico del termine, abbia cioè il valore di « varietà retrograda » rispetto alla *Gourda*, forma fondamentale, da cui la *Cougourda* verrebbe a dipendere per un ef-

(1) Lavoro eseguito nella R. Stazione di Bieticoltura di Rovigo.

(2) Nella seduta del 20 novembre 1927.

fetto di perdita - o meglio di latenza - del fattore determinante il rigonfiamento prossimale⁽¹⁾.

L'oggetto di questa nota è costituito da una pianta ambigua la quale non potrebbe essere ascritta all'una piuttosto che all'altra delle nominate varietà, e meriterebbe anzi di appartenere a tutt'e due perchè in essa - come mostra l'unita figura - i frutti tipicissimi delle due varietà nascono insieme, fin sullo stesso tralcio. I frutti coincidono appieno, come si vede, con quelli che per le due distinte varietà sono ritratti in A. Fiori, *Iconographia Florae Italicae*, 2^a ed. 1921, p. 413, fig. 3319 (Gourda) e fig. 3319-1-A (Cougourda), e, fors'anche con più somiglianza, con quelli ritratti in Vilmorin-Andrieux, *Les plantes potagères*, p. 230.

Qual'è la giusta interpretazione di un fatto così curioso?



Fig. 1.

Si potrebbe, evidentemente, parlare di *variazione gemmaria* poichè il frutto viene dal fiore, e il fiore non è che un germoglio trasformato, il quale esordisce come una gemma. Noi abbiamo qui una pianta che in qualche punto dà gemme fiorali sviluppanti caratteri di *Gourda*, mentre, in altri punti, altre gemme fiorali sviluppano caratteri di *Cougourda*.

(1) Tuttavia, passando le diverse regioni d'Italia, o i diversi luoghi d'una stessa regione, si vede che ciascuna di queste due forme racchiude nel suo ambito numerose sotto-forme, differenti per la diversa ampiezza e lunghezza relativa dei rigonfiamenti, per la diversa lunghezza e curvatura del collo, onde si potrebbe desumere che il *fattore* principale, determinante la presenza o l'assenza del rigonfiamento di *Gourda*, debba essere influenzato nelle sue estrinsecazioni da *sottofattori* il cui vario aggruppamento determina i minori particolari delle distinte stirpi isolabili entro ciascuna delle due forme.

È facilmente spiegabile che queste stirpi debbano essere, in Italia, numerose, posto che l'introduzione della pianta risale all'epoca romana (SACCARDO, *Cronologia della Flora Italiana*, 1909, p. 274) e la distribuzione ne è stata, per così dire, polverizzata in piccolissime colture fatte appunto per i frutti, che il popolo adopra, oltre che per ornamento, come rustiche borracce per vino o polvere da caccia, che talvolta adorna con laboriosi eleganti graffiti.

Ma parlando di variazione gemmaria noi faremmo una classificazione grossolana del fenomeno, perchè son molte le cause di tali variazioni e diverso da caso a caso il loro valore. Possono essere *mutazioni*, e allora vanno distinte le gemme che rappresentano la forma stipite e le gemme aberranti che costituiscono la innovazione: la quale, ben s'intende, può non essere una innovazione in senso assoluto, ma soltanto *relativamente alla stirpe considerata* che può esser venuta a dare, *ex novo*, forme già attivate in altre stirpi.

Ma, in questo caso, quale la forma stipite, quale l'innovazione?

Sui semplici dati morfologici il quesito sarebbe insolubile; ma per fortuna i dati genealogici prestano soccorso e permettono di scartare senz'altro l'ipotesi della mutazione gemmaria. Nel 1926 io coltivavo nella ospitale *Stazione di Bieticoltura* di Rovigo alcune piante di pura *Gourda* accanto ad altre di pura *Cougourda*: esse portavano separatamente frutti delle precise forme quest'anno riunitesi sopra uno stesso individuo, il quale — con una probabilità che rasenta la quasi certezza — rappresenta il prodotto d'incrocio in F_1 , generatosi per *vicinismo* tra le due varietà.

Eccoci dunque avvicinati alla spiegazione del significato di questa pianta bivariatale: ma i problemi ch'essa ci prospetta non sono, dopo ciò, diminuiti d'interesse.

Perchè dunque nel suo aspetto somatico, nel suo *fenotipo*, essa non presenta l'una o l'altra forma soltanto? Perchè, in altri termini, non manifesta una netta dominanza di una delle due forme e — per contro — una recessività completa dell'altra? I criteri usuali avrebbero portato a credere che *Gourda* avrebbe dovuto con tutta probabilità dominare su *Cougourda* se è vero che questa è, come accennavo, una varietà retrograda di quella.

Ma il fatto che sulle diverse parti di un eterozigoto coesistano, l'una accanto all'altra, le estrinsecazioni dei fattori antagonisti riuniti nello zigoto, è tutt'altro che nuovo; ed io stesso ne descrissi un bellissimo esempio dato da un prodotto di incrocio fra *Nicotiana Tabacum* a fiori rossi con *Nicotiana silvestris* a fiori bianchi (cfr. R. Savelli, *La mutazione pistillodica attraverso l'ibridazione*. «Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti», tomo LXXXVI, parte seconda, a pp. 1156-1157), il cui particolare interesse sta in ciò: che simili manifestazioni «a mosaico» sono state prevalentemente descritte negli eterozigoti di F_1 , mentre in quel caso le piante di F_1 , coltivate per 10 anni in gran numero, non mi avevano mai mostrato un tal fatto, ed io non so indovinare per qual meccanismo tale manifestazione «a mosaico» possa essere stata favorita dal passaggio agli eterozigoti della F_2 cui apparteneva la pianta considerata.

Si può in questi casi, nel citato Tabacco, nella zucca che ho illustrato or ora, e in tanti altri casi analoghi, si può, davvero, parlare di *disgiunzione vegetativa*?

Io mi riservo di cogliere una prossima occasione per esprimere nettamente il mio pensiero al riguardo. Le diverse denominazioni con le quali

i vari studiosi designerebbero il fenomeno non dipendono da semplici differenze di terminologia, variabili da paese a paese e da lingua a lingua: io dimostrerò che esse scaturiscono da concezioni diverse e celano un persistente dissidio sull'essenza e sul fondamento del mendelismo.

« Disgiunzione vegetativa », « ibridi a mosaico », « dominanza incompleta », « pecilodinamismo », « cambiamento di valenza », sono espressioni che segnano altrettanti atteggiamenti del pensiero, la cui odierna confusione deriva dal non saper tenere convenientemente distinto il « fattore » dal « carattere », il substrato idioplasmatico o « gene » da quella che è la sua estrinsecazione somatica risultante come fatto posteriore da tutta una catena di reazioni successive ed interferenti, deviabili durante il corso dell'ontogenesi.

Per oggi ho voluto segnalare soltanto il caso assai tipico di una pianta che nelle sue diverse parti presenta i caratteri di due distinte varietà, ma per avventura in quest'anno medesimo io ho potuto osservare nel Mais un fatto che, sebbene diverso, idealmente si connette con questo e mi permetterà in una prossima Nota di studiare la validità delle distinzioni sopra accennate.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 4 dicembre 1927 (Anno VI)

Presidenza del prof. sen. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva variabile sopra una superficie algebrica.* Nota ⁽¹⁾ del Socio F. SEVERI.

In una mia Memoria pubblicata nei «*Mathematische Annalen*» del 1913, ho dimostrato che le corrispondenze algebriche esistenti sulla curva variabile in un sistema lineare $|C|_{\infty^r}$ ($r \geq 2$) tracciato sopra una superficie regolare F , sono tutte a valenza, e ne ho tratto p. es. come conseguenza la prima dimostrazione completa dell'importante proprietà messa in luce nel 1886 da Hurwitz: che cioè una curva a moduli generali possiede soltanto corrispondenze a valenza.

Convieni tuttavia di porre in esplicita evidenza le ipotesi sotto cui il teorema da me stabilito ha piena validità; ipotesi che son soddisfatte per un generico sistema tracciato su F , al quale si riferiscono le mie considerazioni. A tali ipotesi ho accennato incidentalmente in una Nota lineea del 1914 (1° semestre, p. 582). Qui desidero di precisarle compiutamente.

1. Sarà opportuno anzitutto che riassuma la mia dimostrazione, tanto più che ciò mi dà occasione di semplificarla leggermente. Essa consta di due parti.

Nella prima dimostro che, se sulla generica C esiste una corrispondenza algebrica singolare (variabile insieme a C), è possibile di fissare *razio-*

(1) Presentata nella seduta del 4 dicembre 1927.

nalmente su C una corrispondenza singolare. Questo fatto stabilisco per via trascendente e per via algebrico-geometrica. Ecco la linea del procedimento geometrico.

Considero il sistema continuo completo $\{T\}$ di corrispondenze, cui appartiene la corrispondenza singolare T , variabile con C , nel dato sistema lineare. Se $\{T\}$ ritorna in sè per ogni circolazione di C , esso è razionalmente determinato sulla generica C . Altrimenti $\{T\}$ dà luogo ad un numero finito (ved. il Lemma del n. 4 della mia citata Memoria) di sistemi continui analoghi $\{T_1\} = \{T\}, \{T_2\}, \dots, \{T_k\}$; un numero finito, perchè trattasi di corrispondenze, che, derivando per continuità le une dalle altre, hanno gli stessi indici α, β di T . Queste corrispondenze hanno inoltre lo stesso grado virtuale $^v = [T_i T_i] (i = 1, 2, \dots, k)$; e siccome due di quei sistemi continui, in quanto si limiti per un momento la variabilità di C entro un fascio, essendo elementi di una g_k^t sullo stesso ente algebrico irriducibile ∞^1 , possono portarsi a coincidere sopra qualche particolare curva del fascio, risulta altresì $^v = [T_i T_l] (i, l = 1, \dots, k)$. Ne deriva - e con quest'argomentazione semplifico un po' il procedimento del 1913 - che il sistema continuo $\{R\} = \{T_1 + T_2 + \dots + T_k\}$, il quale è razionalmente determinato sopra ogni C , consta di corrispondenze singolari. Invero, il grado virtuale $^v'$ di R è espresso da $k^2 v$ e gl'indici son dati da $\alpha' = k\alpha$, $\beta' = k\beta$. Quanto al numero u' dei punti uniti, esso è espresso da ku , u denotando il numero dei punti uniti di T . Pertanto, se R fosse a valenza, avremmo $^{(2)}$:

$$(u' - \alpha' - \beta')^2 = 4p(\alpha'\beta' - \frac{1}{2}v'),$$

ove p è il genere della generica C . E se ne ricaverebbe:

$$(u - \alpha - \beta)^2 = 4p(\alpha\beta - \frac{1}{2}v),$$

contrariamente all'ipotesi che T non sia a valenza $^{(2)}$.

Osservazione. - In verità l'argomentazione colla quale concludesi che $[T_i T_i] = [T_i T_l]$ resta subordinata all'ipotesi che $\{T\}$ sia un effettivo sistema continuo. Se le T_1, T_2, \dots , considerate come curve sopra la superficie Φ delle coppie di punti di C , fossero isolate, potrebbe darsi che, sopra una particolare Φ , esse degenerassero riducendosi all'intorno di un medesimo punto multiplo, e non si potrebbe concludere colla ricordata uguaglianza. Ma non è restrittivo di supporre che $\{T\}$ sia un sistema almeno ∞^1 , giacchè si può, ove occorra, sostituire a T il sistema ∞^p delle corrispondenze complementari (ved. il n. successivo).

(1) Ved. il mio *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, parte I (Zanichelli 1927), p. 259.

(2) Ved. il mio *Trattato*, citato, p. 281.

Se il grado v di $\{T\}$ vale zero (come accade p. es. per un sistema continuo di corrispondenze biunivoche, ordinarie o singolari, sopra una curva ellittica), l'uguaglianza $[T_i T_i] = [T_i T_i] = 0$ esclude che possano esservi più sistemi derivanti da $\{T\}$, cioè *in tal caso* $\{T\}$ *mutasi in sé per le circolazioni di C.*

La dimostrazione trascendente dell'uguaglianza $[T_i T_i] = [T_i T_i]$, che deriva dalla Memoria del 1913, è subordinata all'ipotesi che *in un fascio generico di curve C non vi sieno che curve con punti doppi nodali staccati (dai punti base)*; ma è probabile che quest'ipotesi, semplificatrice dei calcoli, sia superflua. Comunque, con tale restrizione, la dimostrazione trascendente è applicabile anche al caso di corrispondenze isolate; p. es. ad una corrispondenza birazionale sopra una curva di genere $p > 1$. Poichè una tal corrispondenza ha il grado virtuale negativo (ved. il mio *Trattato*, p. 269), *essa non può che mutarsi in sé per le circolazioni di C.*

2. Costruiamo ora il sistema continuo $\{S\}$, ∞^p , formato dalle corrispondenze complementari ⁽¹⁾ di quelle contenute in $\{R\}$ ⁽²⁾. Anche $\{S\}$ rimane staccato razionalmente su ogni C, e consta di corrispondenze singolari. Una S ha il secondo indice uguale a p (mentre il primo indice, che del resto qui non interessa, è espresso da $\alpha\beta - \frac{1}{2}v$ ⁽³⁾). Essa è individuata non appena sia fissato, come omologo di un punto determinato x di C, un gruppo *non speciale* di p punti. Ciò risulta dal modo di generare il sistema $\{S\}$, a partire da una sua corrispondenza S, che consiste nell'aggiungere ad S la corrispondenza degenerare nella quale di ogni x di C è omologo un fissato gruppo non speciale di p punti, e nel togliere la corrispondenza degenerare variabile che associa ad ogni x un gruppo variabile di p punti (ved. il n. 17 della mia Memoria). Ma d'altronde, pel seguito, come si constaterà, basta anche osservare soltanto che esiste un numero finito di corrispondenze S, associanti a un dato x un assegnato gruppo non speciale di p punti (ved. l'osservazione al n. 18 della mia Memoria).

Scelgasi su F una curva D, disposta genericamente rispetto a $\{C\}$, nel senso che nessuno degli m punti x_1, x_2, \dots, x_m del gruppo (C, D) , ov'essa taglia la generica C, sia quivi un punto di Weierstrass. Esisterà allora su C una corrispondenza S_1 di $\{S\}$, individuata dalla condizione di far correspon-

(1) Ved. il mio *Trattato*, p. 228.

(2) Il sistema $\{R\}$ contiene in generale ∞^{2p} sistemi *lineari* distinti di corrispondenze e fra questi ve ne sono ∞^p le cui corrispondenze associano ad ogni dato punto di C, ∞^p gruppi equivalenti. Le corrispondenze contenute in tali ∞^p sistemi lineari hanno una medesima corrispondenza complementare, facente passare da un punto genericamente fissato su C ad un fissato gruppo non speciale di p punti. Così spiegasi come le S sieno ∞^p , invece che ∞^{2p} (cfr. col n. 17 della mia Memoria citata).

(3) Ved. il mio *Trattato*, p. 264.

dere al punto x_1 il gruppo px_1 ; una S_2 , associante ad x_2 il gruppo px_2 ; ecc. Onde la corrispondenza $S_1 + S_2 + \dots + S_m$ è razionalmente determinata su ogni C . E come poco fa si vede che, essendo S singolare, lo è pure la somma di m particolari delle S . Resta così dimostrato che su ogni C può staccarsi razionalmente una corrispondenza singolare.

Osservazione. — La $S_1 + S_2 + \dots + S_m$ non può associare ad un generico punto x di C punti tutti coincidenti con x , perchè se no essa ridurrebbesi ad un multiplo dell'identità ed avrebbe perciò il grado virtuale negativo, per $p > 1$; mentre il suo grado virtuale è ≥ 0 . Per $p = 1$, $S_1 + S_2 + \dots + S_m$ può appartenere ad un medesimo sistema continuo con un multiplo dell'identità, soltanto se la generica S non ha alcun punto unito. E allora gli omologhi di x in $S_1 + S_2 + \dots + S_m$ non coincidono con x .

3. Nella seconda parte della mia Memoria, introdotta l'ipotesi, di cui finora non ho fatto uso, che F sia regolare, mostro che ogni corrispondenza, razionalmente fissata su ogni C , è a valenza. Donde, a causa del n. 2, segue che sulla generica C non esistono corrispondenze singolari (pur potendo esistere su particolari C).

Il ragionamento che svolgo in questa seconda parte è il seguente: Sia H una rete generica tolta dal sistema $|C|$ e T sia la corrispondenza fissata razionalmente su C ; x un punto generico della curva. Per x passa un fascio Σ di curve di H , il quale (astrazione fatta dai punti base di H) ha $n - 1$ ulteriori punti base su C (semplici e distinti), costituenti un gruppo Z . In ciascuna curva di tal fascio esiste un gruppo Y di punti omologhi di x , rispetto alla T giacente su quella curva. E, variando la curva in Σ , Y descrive in generale una curva D_x , la quale passa per x con molteplicità s uguale al numero delle curve di Σ per la cui corrispondenza T il punto x è unito, e pei punti di Z con molteplicità t , in generale, uguali fra loro. La molteplicità t in un punto di Z denota su quante curve del fascio quel punto è omologo di x . Le intersezioni di D_x colla considerata C (fuori dei punti base di H) cadono nel punto x contato s volte, nel gruppo Y e nel gruppo Z , contato t volte. Variando x su C , la D_x descrive un sistema continuo, il quale (per esser tracciato su di una superficie regolare) è contenuto totalmente in un sistema lineare. Perciò il gruppo $sx + Y + tZ$ varia in una serie lineare; e siccome anche $x + Z$ si muove in una serie lineare, si conclude che $Y + (s - t)x$ varia in una serie lineare, effettiva o virtuale; cioè che T ha, su C , la valenza $s - t$.

4. Quand'è che le circostanze generali, testè segnalate, vengono meno? Quand'è insomma che D_x può degenerare in tutto o in parte in un gruppo di punti fissi, compresi necessariamente nel gruppo $x + Z$; oppure quand'è che, pur essendo D_x una vera e propria curva, essa presenta nei punti di Z molteplicità disuguali?

Supporremo, in quel che segue, che, se la T contiene come parte la corrispondenza involutoria $(n-1, n-1)$, J , generata dalla g_n^1 caratteristica staccata su C dalla rete H , la J sia tolta da T tante volte quant'è possibile. Poichè J è valenza, la corrispondenza differenza lo sarà o no secondo che T è o no a valenza. Continueremo a chiamare T quest'eventuale corrispondenza differenza.

La prima circostanza, che D_x degeneri in tutto o in parte in un gruppo di punti, si presenta allora e solo allora che la g_n^1 caratteristica, sulla generica C considerata, sia *composta colla corrispondenza T o con una sua parte*; chè allora tutti od alcuni degli omologhi di x , sulle singole curve di Σ , son fissi. E per questo si richiede che la varietà delle coppie di punti di g_n^1 sia *riducibile*, o, in altre parole, che sia riducibile la corrispondenza simmetrica J . Anzi, trattandosi della serie caratteristica sulla generica C , occorrerà addirittura che sia riducibile la varietà delle coppie di punti dell'involuzione razionale I_n determinata su F dalla rete H . Vi sarà insomma una corrispondenza algebrica τ fra i punti di F , la quale farà parte (nel senso espresso) di I_n , e che subordinerà la corrispondenza T od una sua parte su ogni curva C di H .

La seconda circostanza, che le molteplicità di D_x non sieno uguali nei singoli punti di Z , conduce similmente alla riducibilità della g_n^1 caratteristica, come varietà di coppie di punti. Perchè è certo che le molteplicità di D_x saranno uguali in quei punti di Z , che possono scambiarsi fra loro per le circolazioni di x , sulla C considerata. E se vi sono in Z dei punti, che, comunque circoli x , non si scambian fra loro, la g_n^1 è riducibile, nel senso sopra detto.

Le due circostanze segnalate possono presentarsi insieme. Ad ogni modo, o separatamente o insieme, esse conducono alla accennata riducibilità.

Se le corrispondenze con cui è composta la g_n^1 son tutte a valenza, nel caso che della D_x facciano parte punti fissi, astraendo da questi, non si fa che toglier da T delle corrispondenze a valenza, e la corrispondenza residua, epperò T , son a valenza; nel caso che D_x passi con molteplicità disuguali pei punti del gruppo Z , il gruppo delle intersezioni di D_x con C , fuori di x , differisce da un multiplo di Z per multipli di gruppi omologhi di x in corrispondenze a valenza, onde T risulta anche in tal caso a valenza. Si conclude che:

Sopra una superficie regolare può esistere una rete di curve tutte dotate di corrispondenze singolari, soltanto se la g_n^1 caratteristica della rete sia composta mediante qualche corrispondenza singolare.

Osservazione 1^a. Una g_n^1 può effettivamente esser composta mediante corrispondenze algebriche, senza che essa sia composta con un'involuzione; cioè restando primitivo il suo gruppo di monodromia. Per esempio, sopra una curva ellittica equianarmonica, le g_3^1 generate dalle trasformazioni univoche singolari cicliche di 3° ordine, son composte con tali corrispon-

denze, pur non essendo composte con involuzioni (esse infatti son d'ordine primo).

Il prof. Guido Ascoli, in un lavoro di prossima pubblicazione, definisce un *gruppo di corrispondenze algebriche*, sopra una curva algebrica, come un insieme di corrispondenze tali che il prodotto di due qualunque di esse si spezzi in parti tutte appartenenti all'insieme. Ebbene, le corrispondenze, che eventualmente compongono una data g_n^1 , formano un gruppo finito G , ed i gruppi della g_n^1 sono gl'insiemi dei punti derivanti dai singoli punti della curva, mediante le trasformazioni di G .

Osservazione 2ª. Esistono esempi di reti di curve piane, che contengono corrispondenze singolari. Taluni di essi (reti di cubiche armoniche ed equianarmoniche) sono stati indicati dalla signora dott.ssa Rossi nella dissertazione di laurea, che è stata in questi giorni discussa presso l'Università di Roma, e che verrà presto pubblicata.

5. Se la g_n^1 caratteristica della rete non è composta con un'involuzione, nel qual caso *la rete si dirà semplice* ⁽¹⁾, e inoltre contiene almeno un punto doppio, e soltanto doppio, ossia se nella rete vi sono curve che abbiano contatti semplici, fuori dei punti base, il gruppo di monodromia della g_n^1 è transitivo e primitivo e contiene una trasposizione, onde ⁽²⁾ coincide col gruppo totale. Allora la g_n^1 non può neppure esser composta con una corrispondenza. Invero, detti $x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ i punti di un gruppo di g_n^1 , esiste una circolazione di x su C che scambia due qualunque dei punti x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , riportando in sè x . Dunque:

Sopra una superficie regolare, la curva generica di un sistema lineare (irriducibile) semplice ∞^r ($r \geq 2$), contenente due curve con un contatto semplice, fuori dei punti base, è priva di corrispondenze singolari.

In particolare, se $r \geq 3$, esistono sempre nel sistema infinite coppie di curve con un contatto semplice, epperò:

La curva generica di un sistema lineare (irriducibile) semplice ∞^r ($r \geq 3$), sopra una superficie regolare, non contiene che corrispondenze a valenza.

Se $r = 2$, e vi sono sulla curva generica corrispondenze singolari, senza che la g_n^1 caratteristica sia composta con un'involuzione, le parti della jacobiana della rete, che non sono fondamentali per questa, dovranno necessariamente essere multiple.

6. Nella mia Memoria del 1913 ho anche trattato il caso delle superficie irregolari ed ho dimostrato che *ogni corrispondenza algebrica sulla curva generica di un sistema lineare $|C| \infty^r$ ($r \geq 2$), sopra una superficie irregolare,*

(1) Taluni considerano come semplici soltanto le reti di grado 1.

(2) Vedasi p. es. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni*. Pisa, Spoerri, 1900, p. 28.

è a valenza rispetto al sistema lineare d'integrali abeliani riducibili individuato su C dal sistema aggiunto.

Orbene, le ipotesi sotto cui il teorema ha piena validità, son le medesime di quelle sopra indicate. Occorre cioè che *la serie caratteristica di C non sia composta mediante corrispondenze prive di valenza, rispetto a quel sistema d'integrali riducibili.*

Matematica. — *Sui sottogruppi fondamentali di un gruppo.*
Nota II⁽¹⁾ del Corrisp. G. SCORZA.

Questa Nota si riattacca a quella che col medesimo titolo è stata pubblicata nel fascicolo precedente, ne mantiene le notazioni e ne continua la numerazione degli articoli e delle formule. È inteso pertanto che in quanto segue H è un gruppo non abeliano d'ordine finito di tipo τ , col centrale J_0 , e G è un suo sottogruppo fondamentale, col centrale J , corrispondente al sistema fondamentale I . Inoltre τ' è il tipo di G o ∞ o 2 , secondo che G non è, od è abeliano, λ è il numero dei sistemi fondamentali di H contenuti in G , λ' è il numero dei sottogruppi fondamentali di H contenenti G e λ'' quello dei sottogruppi fondamentali di H contenuti in G .

5. È stato dimostrato dal prof. Cipolla⁽²⁾ che è

$$(9) \quad \tau \geq \lambda.$$

Ebbene dico, in primo luogo, che:

È $\tau = \lambda$ quando, e solo quando, è $\tau = 1$;

di guisa che:

Se $\tau > 1$, è necessariamente $\tau \geq \lambda + 1$.

E infatti si supponga che sia $\tau = \lambda$, cioè che i sistemi fondamentali di H esterni a G siano soltanto due. Si indichino con I' e I'' codesti sistemi e con G' e G'' i sottogruppi fondamentali ad essi corrispondenti.

Sarà

$$H = G + I' + I'',$$

indi anche

$$H = G + G' + G'';$$

(1) Presentata nella seduta del 20 novembre 1927.

(2) Vedi: CIPOLLA, *Sulla struttura dei gruppi d'ordine finito*, Nota III, n. 2 (« Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli », maggio e giugno 1911).

ma allora G, G' e G'' si tagliano a due a due in un medesimo sottogruppo invariante Γ di H , $\frac{H}{\Gamma}$ è un gruppo quadrimo, e l'indice di Γ in G, G' e G'' è 2⁽¹⁾.

Dico che è $\Gamma = J_0$.

Ed invero è chiaro intanto che Γ contiene J_0 , perchè J_0 appartiene a ciascuno dei sottogruppi G, G' e G'' ; ed è pur chiaro che Γ , come intersezione di sottogruppi fondamentali, o coincide con J_0 o è la somma di J_0 e di un certo numero di sistemi fondamentali di H . Ma se Γ fosse un sistema fondamentale di H contenuto in Γ e G''' fosse il sottogruppo fondamentale ad esso corrispondente, G, G' e G'' , contenendo Γ conterebbero Γ , indi G''' conterebbe a sua volta I, I' e I'' ; ed allora, essendo $H = G + I' + I''$, sarebbe pure $H = G + G'''$, mentre ciò è impossibile⁽²⁾.

Segue che l'indice di J_0 in G, G' e G'' è 2, ossia che si può porre, indicando con $\alpha (\alpha', \alpha'')$ un elemento qualsiasi di $I (I', I'')$,

$$G = J_0 + J_0 \alpha, \quad G' = J_0 + J_0 \alpha', \quad G'' = J_0 + J_0 \alpha'.$$

Di qua, badando che, essendo α, α' e α'' in I, I' e I'' , anche $J_0 \alpha, J_0 \alpha'$ e $J_0 \alpha''$ sono in I, I' e I'' , si ricava che è addirittura

$$J_0 \alpha = I, \quad J_0 \alpha' = I', \quad J_0 \alpha'' = I'',$$

$$G = J_0 + I, \quad G' = J_0 + I', \quad G'' = J_0 + I'',$$

e

$$H = J_0 + I + I' + I'',$$

ossia che è, come volevasi, $\tau = 1$.

Inversamente è chiaro che se $\tau = 1$ anche $\lambda = 1$, e dunque il teorema è dimostrato.

6. Ma le cose possono essere ulteriormente precisate; cioè possiamo dimostrare, in secondo luogo, che:

Se $\tau > 2$, è addirittura $\tau \equiv \lambda + 2$.

In virtù di quanto precede, questa osservazione sarà giustificata non appena sia fatto vedere che, se $\tau > 2$, non può essere $\tau = \lambda + 1$ ⁽³⁾.

Supponiamo, se è possibile, che sia $\tau > 2$ e $\tau = \lambda + 1$.

Giacchè il numero dei sistemi fondamentali di H è $\tau + 2$ e giacchè di questi $\lambda (= \tau - 1)$ sono contenuti in G , i sistemi fondamentali di H

(1) Cfr. G. SCORZA, *I gruppi che possono pensarsi come somme di tre loro sottogruppi* (« Bollettino dell'Un. Mat. Italiana », anno V, dicembre 1926).

(2) Vedi la mia Nota ora citata.

(3) A questo proposito è bene avvertire che, per quanto risulta dalla determinazione dei gruppi di tipo 2 compiuta dal prof. CIPOLLA, se $\tau = 2$ è veramente $\tau = \lambda + 1$.

esterni a G saranno soltanto tre. Poniamo che essi siano I' , I'' e I''' , e indichiamo con G' , G'' e G''' i sottogruppi fondamentali ad essi corrispondenti.

Se esistesse un sottogruppo fondamentale di H contenente propriamente G , i sistemi fondamentali di H esterni a tale sottogruppo sarebbero al più 2, indi, per il teorema dimostrato nel numero precedente, sarebbe, contro il supposto, $\tau = 1$; dunque un tale sottogruppo non esiste, G è massimo, $\lambda' = 1$ e i sistemi fondamentali di H contenuti in G , ma non in J , sono $\lambda - 1$ ($= \tau - 2$).

Sia \bar{I} un tal sistema e \bar{G} il corrispondente sottogruppo fondamentale. Dico che \bar{G} non può contenere nessuno dei sistemi I' , I'' e I''' .

Infatti, se li contenesse tutti e tre, essendo $H = G + I' + I'' + I'''$, sarebbe $H = G + \bar{G}$, e ciò non è possibile. Se ne contenesse soltanto due, per es., I' e I'' , sarebbe $H = G + \bar{G} + G''$ e G''' conterrebbe l'intersezione di G e \bar{G} , indi I che è in G e che è pure in \bar{G} , perchè \bar{I} è in G . Ora ciò è impossibile, perchè, se G''' contenesse I , G conterrebbe I''' , mentre I''' è esterno a G .

Se infine ne contenesse soltanto uno e questo fosse, ad es., I' , detto x un elemento di I (indi anche, come è stato osservato, di \bar{G}) ed x' un elemento di I' , sarebbe xx' un elemento di \bar{G} esterno a G e quindi un elemento di I' . Ma allora x' ed xx' , appartenendo entrambi ad I' , sarebbero permutabili ed x' riescirebbe un elemento permutabile con x , cioè un elemento di G , mentre I' è esterno a G .

Si conclude che G è contenuto propriamente in G ; ossia che tutti i sottogruppi fondamentali di H corrispondenti ai $\lambda - 1$ sistemi fondamentali contenuti in G , ma non in J , sono contenuti propriamente in G ; di guisa che è $\lambda'' - 1 \geq \lambda - 1$, cioè $\lambda'' \geq \lambda$. Ma per la (1) della Nota precedente è pure $\lambda'' \leq \lambda - \lambda' + 1$ e qui $\lambda' = 1$; dunque è proprio $\lambda'' = \lambda$, o, ciò che qui fa lo stesso, $\lambda'' = \lambda - \lambda' + 1$.

Intanto G è massimo, dunque se con ρ si indica il suo genere, per il teorema stabilito nel n. 4 della Nota precedente, deve essere

$$\tau - \lambda + 2 \geq 2^{2\rho - 1}, \quad \text{ossia} \quad 3 \geq 2^{2\rho - 1}.$$

Si conclude che è $\rho = 1$, indi $\lambda'' = 1$. Ma $\lambda'' = \lambda = \tau - 1$, dunque sarebbe, contro il supposto, $\tau = 2$.

7. Badando alla (4) della Nota precedente e a quanto fin qui è stato dimostrato, si ha che:

In ogni caso è

$$(10) \quad \tau \geq 2\tau' + \lambda' - \lambda'' + 5,$$

mentre se è $\tau > 1$, si ha

$$(11) \quad \tau \geq 2\tau' + \lambda' - \lambda'' + 6,$$

e se $\tau > 2$, si ha

$$(12) \quad \tau \geq 2\tau' + \lambda' - \lambda'' + 7.$$

8. Dico ora che

È in ogni caso $\tau' \leq \tau - 3$ ⁽¹⁾; che se $\tau > 1$ è più precisamente $\tau' \leq \tau - 4$ e che se $\tau > 3$ è addirittura $\tau' \leq \tau - 6$.

Per la (2) della Nota precedente è $\tau' \leq \lambda - \lambda' - 2$. Ma $\lambda' \geq 1$, dunque $\tau' \leq \lambda - 3$. Ora $\lambda \leq \tau$ e, se $\tau > 1$, è $\lambda < \tau$, dunque $\tau' \leq \tau - 3$ e se $\tau > 1$, $\tau' \leq \tau - 4$.

Ciò porta che per dimostrare il teorema basterà far vedere che, se $\tau > 3$, non può essere nè $\tau' = \tau - 4$, nè $\tau' = \tau - 5$.

Se è possibile, sia, in primo luogo, $\tau' = \tau - 4$.

Sarà, per la (12),

$$\tau \geq 2(\tau - 4) + \lambda' - \lambda'' + 7 \geq 2(\tau - 4) + 1 - \lambda'' + 7 = 2\tau - \lambda'',$$

ossia $\lambda'' \geq \tau = \tau' + 4$. Ora ciò è assurdo, perchè, per la (3) della Nota precedente, è $\lambda'' \leq \tau' + 3$.

Sia, in secondo luogo, $\tau' = \tau - 5$.

Sarà, per la (12),

$$\tau \geq 2(\tau - 5) + \lambda' - \lambda'' + 7 \geq 2(\tau - 5) + 1 - \lambda'' + 7 = 2\tau - \lambda'' - 2,$$

ossia $\lambda'' \geq \tau - 2 = \tau' + 3$. Segue, per una ragione già addotta, $\lambda'' = \tau' + 3$, ossia $\lambda'' = \tau - 2$.

Ora, ricordando la (2) della Nota precedente, si ha $\lambda \geq \tau' + \lambda' + 2 \geq \tau' + 3 = \tau - 2$; e, per il teorema del n. 6, $\lambda \leq \tau - 2$: dunque $\lambda = \tau - 2$, e allora G è massimo e $\lambda' = 1$.

Segue che qui è $\lambda'' = \lambda - \lambda' + 1$; dopo di che il teorema che chiude la Nota precedente dà che, indicato con ρ il genere di G , sussiste la disuguaglianza

$$\tau - \lambda + 2 \geq 2^{2\rho-1}, \quad \text{cioè} \quad 4 \geq 2^{2\rho-1}.$$

Ma allora $\rho = 1$, indi $\lambda'' = 1$; ed essendo $\lambda'' = \tau - 2$ sarebbe, contro il supposto, $\tau = 3$.

9. Giova rilevare alcuni corollarii immediati del teorema ora stabilito.

Se $\tau = 1, 2$ o 3 la $\tau' \leq \tau - 3$, non potendo essere che $\tau' = -2$ oppure $\tau' \geq 1$, dà $\tau' = -2$; se $\tau > 3$, la $\tau' \leq \tau - 6$ dà, per la ragione addotta, $\tau' = -2$, se $\tau = 4, 5$ o 6 ; dunque:

(1) Questa disuguaglianza è stata già rilevata dal prof. AMATO, Vedi la sua Nota: *Sul tipo minimo dei gruppi di rango 2* (« Rendic. della R. Accad. delle Sc. Fis. e Mat. di Napoli », dicembre 1918).

Un gruppo di tipo $\tau < 7$ non ammette sottogruppi fondamentali che non siano abeliani ⁽¹⁾.

Si supponga adesso che H sia di rango r e, conformemente a ciò, sia G_r un sottogruppo fondamentale di H di genere r e

$$G_r, G_{r-1}, \dots, G_2, G_1$$

una successione di sottogruppi fondamentali di H di cui ciascuno, diverso dall'ultimo, contenga propriamente il successivo.

Fra codesti sottogruppi soltanto G_1 può essere, eventualmente, abeliano; di più ciascun di essi, diverso dal primo, è un sottogruppo fondamentale non solo di H , ma anche di tutti quelli che, nella detta successione, lo precedono.

Ebbene indichiamo con τ_j il tipo di G_j , con l'intesa che, se G_1 è abeliano, τ_1 stia per -2 .

Poichè ciascuno dei gruppi G_r, G_{r-1}, \dots, G_3 ammette in G_2 un sottogruppo fondamentale non abeliano, τ_j , per $j > 2$, è certo > 3 ; quindi è

$$\begin{aligned} \tau_r &\leq \tau - 6, \\ \tau_{r-1} &\leq \tau_r - 6, \\ &\dots\dots\dots, \\ \tau_3 &\leq \tau_4 - 6, \\ \tau_2 &\leq \tau_3 - 6, \\ \tau_1 &\leq \tau_2 - 3, \\ -2 &\leq \tau_1, \end{aligned}$$

ossia, sommando membro a membro e riducendo,

$$-2 \leq \tau - 6r + 3,$$

indi

$$\tau \geq 6r - 5 \quad \text{ed} \quad r \leq \frac{\tau + 5}{6}.$$

Si ha così per il rango e il tipo una disuguaglianza più espressiva di quella $\left(r \leq \frac{\tau + 2}{3}\right)$ assegnata già dal prof. Cipolla.

(1) Teorema già noto. Vedi la già citata Nota del prof. AMATO dalla quale risulta inoltre che esistono effettivamente gruppi di tipo 7 con sottogruppi fondamentali non abeliani.

Idromeccanica. — *Sui vortici elico-conici.* Nota ⁽¹⁾ del Cor-
risp. U. CISOTTI.

Ho recentemente messo in rilievo ⁽²⁾ un tipo di vortici piani che risultano componendo il moto dovuto a una sorgente piana puntiforme con un moto circolatorio intorno alla medesima, vortici che ho determinato *spirali* perchè le linee di flusso sono spirali logaritmiche che si aggirano attorno alla posizione della sorgente a cui tendono assintoticamente.

Proseguendo nel medesimo ordine di idee metterò in luce un altro tipo di vortici — spaziali ora — che provengono dalla composizione del moto dovuto ad una sorgente *spaziale* puntiforme e ancora di una circolazione attorno a un asse contenente la sorgente. Ho attribuito la denominazione di *elico-conici* a tali vortici, poichè — come si vedrà — le linee di flusso sono eliche coniche le cui proiezioni sopra un qualunque piano normale all'asse sono spirali di Archimede.

1. *Sorgente puntiforme nello spazio.* — È ben nota la soluzione idrodinamica che definisce il flusso permanente, irrotazionale e simmetrico rispetto a un punto O di un fluido incompressibile.

La velocità in un punto P dello spazio è diretta secondo la retta PO e la sua componente, centrifuga rispetto a O, è:

$$(1) \quad \frac{a}{4\pi\rho^2},$$

essendo ρ la distanza di P da O, e a il flusso uscente attraverso qualsiasi superficie chiusa, racchiudente il punto O.

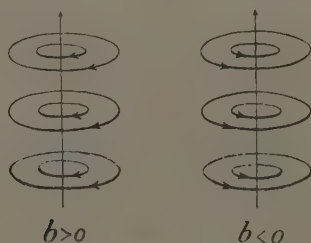


Fig. 1.

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 novembre 1927.

(2) Questi « Rendiconti », vol. VI, serie 6^a, 2^o sem., 1927, p. .

2. *Vortice assiale.* — Altra soluzione idrodinamica ben nota corrisponde al moto permanente di un fluido incompressibile, irrotazionale, le cui linee di flusso sono circonferenze normali a una retta e coi rispettivi centri sulla medesima, ciascuna circonferenza viene percorsa con velocità di componente, secondo la normale all'asse e sinistrorsa:

$$(2) \quad \frac{b}{2\pi r},$$

r = distanza di P dall'asse; b = circolazione sinistrorsa attorno ad una linea chiusa qualsiasi che circondi l'asse.

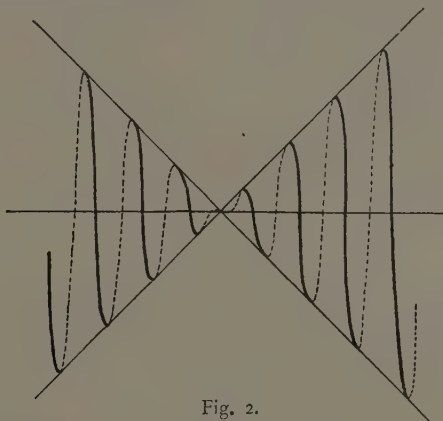


Fig. 2.

3. *Vortici elico-conici.* — Si consideri ora il moto composto dei due moti precedenti: la velocità risulta definita dalla seguente relazione vettoriale:

$$\mathbf{v} = \frac{a}{4\pi(P-O)^2} \text{vers}(P-O) + \frac{b}{2\pi(P-P_0)^2} \mathbf{k} \wedge (P-P_0),$$

essendo \mathbf{k} un vettore unitario che caratterizza direzione e verso dell'asse vorticoso, O il punto sorgente sull'asse stesso, P_0 la proiezione di P sull'asse.

Le superficie di flusso sono coni rotondi coassiali col vertice in O.

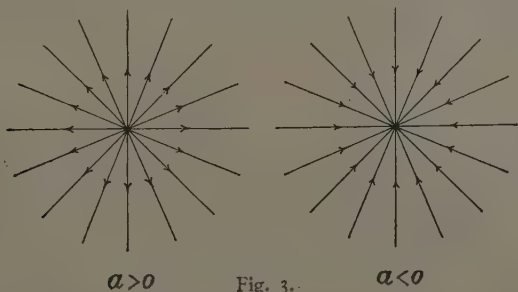


Fig. 3.

Se introduciamo la collatitudine θ , definita da

$$\rho \cos \theta = k \times (P - O), \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

con che $r = \rho \sin \theta$, dalle (1) e (2) scende che le linee di flusso sopra, una generica superficie conica $\theta = \text{costante}$, per $0 < \theta < \pi$, sono definite dalle equazioni:

$$\rho = \frac{a}{2b} \psi \sin^2 \theta + \text{costante} \quad (-\infty \leq \psi \leq +\infty),$$

essendo ψ la longitudine, valutata a partire da un piano assiale comunque prefissato. Si tratta di eliche coniche; le proiezioni di tali linee sui piani normali all'asse sono spirali di Archimede.

Fisica. — *Emissione ionica dei metalli bombardati mediante elettroni.*
Nota del Socio A. LO SURDO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *L'azione dell'ossido d'azoto sui tiosolfati dei metalli dell'8° gruppo* ⁽¹⁾. Nota I ⁽²⁾ del CORRISP. L. CAMBI e di ADA CLERICI.

Ho osservato recentemente che gli spettri d'assorbimento dei nitrososolfuri del ferro offrono dati che si accordano con le conclusioni cui sono pervenuto fin dal 1907: cioè i cosiddetti sali di Roussin sono iponitriti ferrici.

Le ricerche spettrografiche, compiute da me e da L. Szegő ⁽³⁾, confutavano e correggevano quelle di W. Manchot e di Linchk ⁽⁴⁾, tendenti a rivalorizzare la pur vecchia ipotesi che i sali stessi contengano ferro monovalente.

In un lavoro successivo, W. Manchot ⁽⁵⁾ ritornava sulle stesse idee a proposito di due nuovi sali, nitrosotiosolfato di nichel e nitrosotiosolfato di cobalto, cui egli attribuiva la struttura



(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 6 novembre 1927.

(3) Questi « Rendiconti », IV [6] (1926), 491; « Gaz. Chim. Ital. », 57 (1927), 536.

(4) « Ber. », 59 (1926), 412.

(5) « Ber. », 59 (1926), 2445.

Tali formole corrispondono tanto al cobalto e nichel monovalenti, con NO come molecola neutra d'addizione, quanto al cobalto trivalente ed al nichel bivalente con —NO residuo di un acido iponitroso. Il caso è analogo a quello dei nitrososolfuri di Roussin. La supposta monovalenza del metallo riposa su deduzioni puramente formali, non corrisponde al comportamento chimico dei due composti ed alle condizioni della loro sintesi.

Le ricerche che espongo in questa Nota, compiute con A. Clerici, dimostrano che i radicali —NO di questi tiosolfati hanno lo stesso comportamento di quelli dei nitrososolfuri, portano cioè alla conclusione che siano residui a funzione alogenica.

Occorre che ritorni sulla natura dell'acido iponitroso dei sali predetti. Dopo venti anni di riposo i nitrososolfuri interessano nuovamente diversi AA. Qualcuno di essi, poco al corrente della letteratura in merito, è sulla via di riscoprirli, come accade a H. Reihlen e A. Friedolsheim⁽¹⁾, che, senza conoscere evidentemente i miei lavori, ripetono le mie considerazioni e conclusioni di quattro lustri or sono.

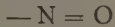
Questi ultimi AA. muovono alla confutazione di W. Manchot ed alievi e concludono che *i sali di Roussin sono iponitriti ferrici*.

Inoltre, dal fatto che i sali stessi non si riproducono partendo dagli iponitriti propriamente detti, ammettono che questi derivino dalla forma «trans» ed i nitrososolfuri dalla «cis» dell'acido iponitroso.

Invero fin dal 1908 ho dimostrato⁽²⁾ che l'acido iponitroso dei nitrososolfuri è diverso da quello degli iponitriti semplici noti per il suo potere riducente, soprattutto sui sali ferrici che in mezzo acido lo ossidano ad NO⁽³⁾.

Tale notevole diversità di comportamento, sfuggita a tutti gli AA. che cito, non può attribuirsi a stereoisomeria, ma ad isomeria di struttura, come si è verificato in casi analoghi, ad es. per i diazoidrati⁽⁴⁾.

Gli aggruppamenti che dobbiamo considerare, oltre quello dell'acido



iponitroso, sono due: il residuo —NO del nitrossile, il radicale $\begin{array}{c} \parallel \\ \text{NO} \end{array}$ — delle nitrosoidrossilamine: entrambi spiegherebbero le facili ossidazioni ad ossido d'azoto. Non ho riscontrato finora nei nitrosocomplessi alcuna rea-

(1) «Liebig's Annalen», 457 (1927), 71.

(2) Questi «Rendiconti», XVII [5] (1908), 202.

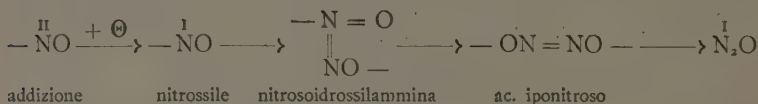
(3) REIHLEN e FRIEDOLHEIM attribuiscono lo studio delle scissioni ad NO e N₂O dei sali di Roussin a I. BELLUCCI e DE CESARIS (questi «Rendiconti», XVII [5] 1908, 424), ma il lavoro di questi AA. è posteriore ai miei sullo stesso argomento. Essi si occuparono delle scissioni predette soltanto dopo che io ne avevo indicato l'importanza e le avevo studiate: essi non hanno fatto che confermare le conclusioni cui ero pervenuto.

(4) L. CAMBI, questi «Rendiconti», V, [6] (1927), 837.

zione caratteristica del nitrossile e, per contro, nei complessi più stabili troviamo sempre la coppia N_2O_2'' .

La struttura più probabile appare perciò quella che Angeli ha assegnato alle nitrosoidrossilamine. Infatti, queste si formano anche per azione diretta dell'NO su diversi composti organometallici, generano con alcuni ossidanti l'ossido d'azoto stesso, costituiscono facilmente complessi con i metalli dell'8° gruppo.

L'azione complessiva dell'NO sui sali metallici, in condizioni in cui ha luogo la formazione di composti iponitrosi, può essere cioè così rappresentata



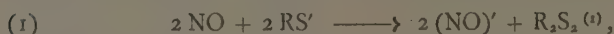
La formazione di iponitrito d'argento dai sali di Roussin, da me pure scoperta, la decomposizione dei sali di nichel e cobalto su indicati ad N_2O attestano l'isomerizzazione del gruppo N_2O_2'' , in essi contenuto, ad acido iponitroso.

L. CAMBI.

La reazione fra tiosolfato di nichel ed ossido d'azoto.

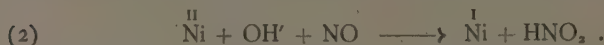
1. Le esperienze da noi compiute riguardano le reazioni fra NO e tiosolfato di nichel in presenza d'un eccesso di tiosolfato alcalino.

Scegliemmo il caso del nichel perchè in esso la formazione di gruppi NO' non poteva derivare da una riduzione operata dal metallo, come può avvenire nei sali del cobalto e del ferro, ma dal S_2O_3'' . Doveva cioè verificarsi la reazione generale già discussa:



effettuata con l'intervento del tiosolfato complesso.

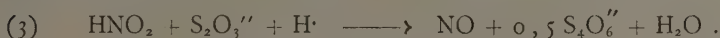
Invece, stando a W. Manchot, la sintesi del nitrososale del nichel doveva compiersi secondo il processo



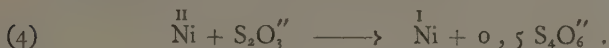
La formazione di $K_3[\text{NO} \cdot \text{Ni} (\text{S}_2\text{O}_3)_2]$ richiederebbe appunto 2 Mol. NO per 1 Ni. Invero dalle esperienze dell'A. risulterebbe al massimo il rapporto 1.5 NO : 1 Ni, che si verificherebbe in condizioni assai diverse da quelle di

(1) L. CAMBI e L. SZEGÖ, loc. cit., p. 492.

preparazione del sale predetto ⁽¹⁾. Ma l'A. nota che può intervenire una riduzione del tipo:



Il che vuol dire che si avrebbe nel complesso la reazione:



Cioè l'NO agirebbe da semplice trasportatore nell'ossidazione del tiosolfato operata dal nichel bivalente che si ridurrebbe a monovalente.

W. Manchot non formula e non precisa queste reazioni inverosimili, ma esse esprimono la sua ipotesi.

Il nichel monovalente, di cui conosciamo soltanto il cianuro $\text{K}[\text{Ni}(\text{CN})_3]$, generato dall'amalgama di metallo alcalino, che sviluppa idrogeno dalla soluzione acquosa, che si autoriduce fino a nichel metallico, si formerebbe e persisterebbe non solo in presenza dell'NO ma dell'acido nitroso.

Reputiamo superfluo ogni altro commento.

2. Preparammo $\text{K}_3[\text{NO} \cdot \text{Ni}(\text{S}_2\text{O}_3)_2] \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$ col metodo descritto dall'A. citato e ne confermammo la composizione, ma abbiamo indagato anche le sue reazioni. Riassumiamo le nostre osservazioni:

a) il sale per azione dei sali rameici in soluzione sviluppa quantitativamente NO;

b) per azione dell'iodio in soluzione acida sviluppa NO, in soluzione neutra dà luogo principalmente ad NO ed in rapporti variabili con le condizioni d'esperienza a nitrito;

c) con eccesso di iodo N/10, in soluzione acidulata ed in atmosfera inerte, risultano i rapporti $1 \text{ Ni} : 1 \text{ NO} : 3 \text{ Iodo assorbito}$;

d) con miscela di solfato ferrico e solfato d'argento dà pure NO; con solo solfato d'argento principalmente N_2O ;

e) con alcuni caustici si decompone svolgendo quantitativamente N_2O ;

f) le soluzioni acquoso-alcooliche del tiosolfato di potassio e d'acetato di nichel, nelle concentrazioni e nei rapporti usati per la preparazione del nitrososale - nonchè le soluzioni acquose a qualsiasi concentrazione contenenti fino a $4 \text{ K}_2\text{S}_2\text{O}_3$ per 1 Ni - assorbono NO in proporzioni mai eccedenti $1 \text{ Ni} : 1 \text{ NO}$.

Abbiamo concluso:

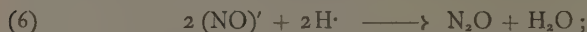
a) le scissioni con iodo, solfato di rame, sale ferrico in presenza di solfato d'argento sono analoghe a quelle dei sali di Roussin illustrate

(1) La sintesi si compie con miscela $3 \text{ K}_2\text{S}_2\text{O}_3 : 1 \text{ Ni}(\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2)_2$ ed il massimo d'assorbimento è stato osservato per azione prolungata dell'NO su miscela $12 \text{ K}_2\text{S}_2\text{O}_3 : 1 \text{ Ni}$. L'A. dice però che tale assorbimento non presenta un limite netto, ma varia con le condizioni d'esperienza che non precisa.

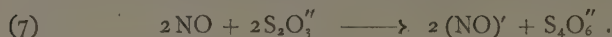
a suo tempo da L. Cambi, presentano cioè la stessa reazione schematica



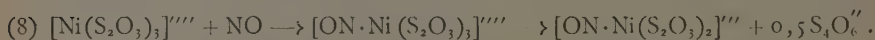
b) le scissioni in assenza di ossidanti, ed in particolare quella con gli alcali caustici, seguono lo schema ⁽¹⁾



c) la sintesi, in cui interviene il tiosolfato complesso di nichel iniziale, corrisponde ad un processo di riduzione dell'NO con formazione primaria di tetrathionato:



Cioè volendo mettere in evidenza l'intervento del nichel, si può considerare lo schema seguente:

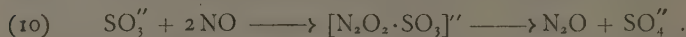


La formazione primaria del tetrathionato è anche nettamente indicata dal titolo iodometrico della miscela acquoso-alcoolica in cui ha reagito l'NO. Il titolo non subisce variazioni notevoli, come abbiamo verificato: si sostituisce cioè 1 (NO)' ad 1 S₂O₃'.

Dobbiamo soffermarci a questo punto sull'azione dell'NO in soluzioni acquose di acetato di nichel e tiosolfato potassico. In queste si nota sempre la separazione di solfo a grado che si effettua l'assorbimento del gas. Tale separazione deve essere ricondotta alla decomposizione del tetrathionato e dei politionati che da questo possono generarsi. Sono ben note le scissioni di questi sali a solfo, ad es.



che sono appunto accelerate dalla presenza di un eccesso di tiosolfato alcalino ⁽²⁾. Il solfito formatosi, per l'alcali fornito dall'acetato alcalino presente, può reagire con lo stesso ossido d'azoto: è pure noto il processo:



Infatti abbiamo riscontrato la presenza di SO₄'' e la formazione di acidità acetica.

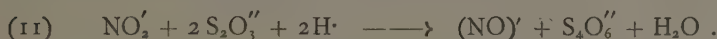
(1) Dobbiamo ricordare che nelle scissioni operate dal solfato di nichel, zinco, cadmio, ecc. in assenza di ossidanti, si sviluppa principalmente N₂O, ma accompagnato da piccole e variabili percentuali di NO. Non abbiamo potuto stabilire se questo provenga da una scissione parziale più complessa della [6], dell'aggruppamento (NO)', che è possibile; oppure da impurità trattenute dal nitrosotiosolfato, che per la sua decomponibilità non può sottoporsi ad adeguate purificazioni.

(2) A. KURTENACKER e M. KAUFMANN, « Z. allg. anorg. Chemie », 148 (1925), 225.

W. Manchot, come abbiamo osservato, usando alte percentuali di tiosolfato rispetto all'acetato di nichel, notava che l'assorbimento procede rapido fino al rapporto 1 Ni : 1 NO e di poi *lento, variabile, non ben definito*, ma non si è preoccupato di queste reazioni secondarie, che alterano il processo ulteriore di fissazione dell'ossido d'azoto, dalle quali non si può nemmeno escludere l'intervento di lenta decomposizione del tiosolfato alcalino stesso ⁽¹⁾.

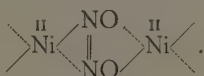
Abbiamo notato a questo proposito che l'azione dell' NO nelle soluzioni acquose predette, provoca una diminuzione del titolo iodometrico, il che attesta un'evidente ossidazione operata dall'ossido d'azoto stesso.

Chiudendo, citiamo il risultato di una nostra esperienza finale: *il nitrosotiosolfato di nichel descritto si forma anche partendo da nitrito alcalino*, acidificando con acido acetico una soluzione contenente acetato di nichel, tiosolfato e nitrito potassico. Si verifica cioè la reazione corrispondente a



Questa nuova sintesi avvalorata quanto abbiamo esposto sulla costituzione del nitrosocomplesso.

Concludiamo che il sale ottenuto per azione dell' NO, o dell'acido nitroso, sul tiosolfato complesso di nichel e di potassio contiene residui iponitrosi (NO)', e probabilmente secondo lo schema



Notiamo infine che l'ossidazione dei gruppi (NO)' del nitrososale a nitrito, che si nota in parte per azione dell'iodo, richiama le ossidazioni osservate da F. Raschig per l'acido iponitroso propriamente detto ⁽²⁾. Ci riserviamo di ritornare sul comportamento con gli ossidanti dei diversi aggruppamenti (NO)' ⁽³⁾.

(1) Ricordiamo che W. Manchot dosa l'azoto soltanto col metodo della riduzione con la lega di Devarda, non distingue cioè le diverse forme di (NO)' che possono essere presenti in soluzione.

(2) F. RASCHIG, SCHWEFEL e STICKSTOFF, « Studien », Berlino (1924), 101.

(3) Il dettaglio delle esperienze riguardanti questa Nota viene omissso dati i limiti di spazio concessi in questi « Rendiconti » e verrà riportato in altro periodico.

Chimica fisica. — *La simmetria negli elettroni.* Nota ⁽¹⁾ del
Corrisp. P. VINASSA.

Continuando lo studio dei numeri molecolari ed estendendo le ricerche anche ai composti artificiali, organici ed inorganici, ho potuto constatare che sopra 3830 corpi da me considerati, più che 3700 hanno numero molecolare pari.

Pertanto la regola geologica, espressa nella mia Nota ⁽²⁾, non si limita ai soli componenti minerali della crosta terrestre, ma deve considerarsi una vera e propria legge chimica, che può esprimersi così:

Tutti i corpi noti, naturali o artificiali, organici ed inorganici, hanno, di regola, numero molecolare pari.

Lo studio poi dei numeri elettronici ⁽³⁾, il cui risultato sarà più ampiamente esposto in una Nota di prossima pubblicazione, mi ha reso possibile di stabilire alcune regole fondamentali, che ritengo siano di un certo interesse.

Chiamo « elettronile » l'entità atomica, attiva per effetto del numero di elettroni in più o in meno della carica nucleare in essi esistente. Il concetto di elettronile si soprammette, ma solo in parte, a quello di jone. Poichè questo termine si usa in modo speciale per le dissociazioni elettrolitiche e si hanno poi anche joni complessi, così ad evitare confusioni ho creduto utile adottare il nuovo termine.

Indico gli elettronili con un esponente in numeri romani (come nelle valenze) posto a sinistra del simbolo se si tratta di elettronile negativo (metalloide) e a destra se si tratta di elettronile positivo (metallo).

Aggiungendo il valore di questo esponente al numero atomico, se si trova a sinistra, o togliendolo dal numero atomico se si trova a destra, si ha il numero elettronico. Così ad esempio: K^I , indica l'elettronile del potassio monovalente con 18 elettroni ($19 - 1$); ^{II}O , indica invece l'elettronile dell'ossigeno, metalloide bivalente, con 10 elettroni ($8 + 2$) ecc.

Disponendo in una tavola tutti gli elettronili noti (in altri termini tutte le valenze note) escludendone però le terre rare, si rileva per prima cosa, come già accennai nella mia seconda Nota ⁽⁴⁾, che alcuni numeri sono riccamente rappresentati mentre altri mancano assolutamente.

(1) Presentata nella seduta del 4 dicembre 1927.

(2) *I costituenti degli involucri terrestri ed il numero molecolare*, « Rend. R. Accad. Lincei », serie 6^a, vol. IV, febbraio 1927, p. 234.

(3) *Il numero elettronico ed i costituenti terrestri*, ibid., fasc. 12, giugno 1927, p. 940.

(4) Op. cit., p. 942.

La costruzione di una tavola di elettronili è abbastanza facile. Riporto qui, come esempio, la tavola di due gruppi: uno di otto termini ed uno di dieci e cioè il gruppo compreso tra 10 e 18 e quello compreso tra 36 e 46.

Elettronili compresi tra 10 e 18.

10	IVC	IIIN	IIO	IF	Ne	NaI	MgII	AlIII	SiIV	PV	SVI	ClVII
11												
12							(SiII)	PIII	SIV	ClV		
13								(SIII)	(ClIV)			
14						(PI)	SII	ClIII				
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
16						ClI						
17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	IVSi	IIIP	IIIS	ICl	Ar	KI	CaII	ScIII	TiIV	VaV	CrVI	MnVII

Elettronili compresi fra 36 e 46.

36		IIIAs	IISe	IBr	Kr	RbI	SrII	YIII	ZrIV	NbV	MoVI	43VII	RuVIII
37									(NbIV)	MoV	43VI	RuVII	
38								(NbIII)	MoIV		RuVI		
39							(NbII)	MoIII	43IV				
40							(MoII)	43III	RuIV				
41							43II	RuIII	(RhIV)				
42							(RuII)	RhIII	(PdIV)				
43							RhII						
44							PdII						
45		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
46					[Pd]	AgI	CdII	InIII	SnIV	SbV	TeVI	IVII	

N. B. — Gli elettronili chiusi tra parentesi indicano le valenze che si presentano solo in via eccezionale.

Questa nuova classificazione degli elettronili differisce dalla classificazione periodica di Mendelèjew-Moseley per il fatto che questa tiene conto dei nuclei atomici positivi, mentre la classificazione degli elettronili si basa invece sulla carica periferica.

Dallo studio della tavola e da altri fatti che, come ho detto, saranno più esplicitamente dichiarati nella Nota in corso di pubblicazione, ho potuto stabilire quanto segue:

1. *Il numero degli elettronili rappresentati negli stadi di equilibrio principale (2, 10, 18 ecc.) è sempre 8 o 12. Obbedisce cioè all'espressione: $n 2^2$.*

2. *Mancano sempre tutti quanti i numeri elettronici corrispondenti ad aggruppamenti di 5 o 7 elettroni⁽¹⁾.*

La mancanza del numero elettronico 45 (ed in generale la mancanza dei numeri elettronici che nei periodi di dieci termini precedono lo stato di equilibrio) è dovuta al fatto che, in questi periodi, oltre allo stadio di equilibrio principale sussiste uno stadio di equilibrio secondario, dato dalla presenza di un quartetto. E da questo equilibrio secondario ricomincia l'aggruppamento, con esclusione del 5. Pertanto il 45 deve intendersi come (36.4).5.

A spiegazione di questo fatto non saprei introdurre altra ipotesi se non quella di una disposizione simmetrica⁽²⁾ degli elettroni. L'elettronile sarebbe quindi un'entità a tipo cristallino simmetrico nella quale pertanto non è possibile un aggruppamento di 5 o 7 elettroni.

Negli elettronili può esistere anche un solo elettrone periferico. Questo stadio è analogo al tipo asimmetrico del sistema triclino. Si potrebbe indicare questo stadio col nome di monoelettronico⁽³⁾.

Considerando pertanto come obbedienti alle leggi della simmetria cristallina gli aggruppamenti degli elettroni negli elettronili risulta che:

3. *Le più comuni simmetrie sono quelle pari. Tra queste predomina la binaria. Tra gli aggruppamenti dispari predomina quello monoelettronico.*

4. *Le combinazioni di elettroni, di regola, tra elettroni a simmetria pari. Le combinazioni di elettroni pari con elettroni dispari sono rare.*

5. *Combinazioni tra elettroni a tipo dispari sono ignote.*

6. *Combinazioni di numero molecolare pari possono esser date anche da elettroni di tipo dispari: ma in tal caso gli elettroni dispari si uniscono in gruppi pari; per lo più bielettronilici.*

Da ciò la maggior frequenza, se non pure la quasi esclusività, del numero molecolare pari.

Da queste constatazioni si può dedurre in generale: Tutti i composti a numero molecolare pari sono costituiti da elettroni di simmetria pari o da gruppi di elettroni a tipo dispari, che però in tal caso si uniscono in

(1) Nei tre primi periodi solamente manca altresì l'aggruppamento con un solo elettrone periferico e cioè: 1, 11 e 19.

(2) Intendo sempre parlare della simmetria analoga a quella dei corpi cristallini. Per le leggi di tale simmetria, connessa alla razionalità dei parametri, non può sussistere nemmeno l'aggruppamento 8. E difatti gli studi di fisica atomica hanno stabilito che l'equilibrio finale 8 è appunto dato da due coppie e da un quartetto cioè 2. 2. 4; o, secondo altri, da 2. 6.

(3) Intendendosi però sempre di riferirsi all'elettrone unico nella zona esterna di valenza dell'elettronile.

gruppi elettronilici, che assumono simmetria pari. I pochissimi composti a numero molecolare dispari sono costituiti da elettronili di simmetria pari misti ad elettronili a tipo dispari.

Applicando questo concetto di simmetria anche ai numeri atomici è risultato altresì, che:

7. *La molecola monoatomica è incompatibile per quegli elementi che hanno numero atomico corrispondente ad uno stadio asimmetrico (5 o 7).*

Infatti vediamo che mancano nella tavola degli elettronili, i numeri: 7 (N), 15 (P), 33 (As), 51 (Sb) e 83 (Bi); poi 9 (F), 17 (Cl), 35 (Br), 53 (I) e l'ignoto 85 e finalmente 27, 45 e 77. Ora appunto, salvo che per il Bi (83) e pei secondi membri delle triadi e cioè Co (25), Rh (45) e Ir (77) di cui ignoriamo la molecola, tutti gli altri numeri, che corrispondono alla serie dell'azoto ed agli aloidi, hanno molecola per lo meno biatomica. Per altre considerazioni che saranno svolte nella Nota rientrano in questo tipo anche V, Nb e Ta.

L'introduzione del concetto di simmetria nella disposizione degli elettroni porta a conseguenze che ritengo possano assumere una certa importanza negli studi di fisica atomica. Basterà difatti considerare che la velocità e le traiettorie degli elettroni dovranno essere sempre tali da non alterare la loro posizione simmetrica.

Lo studio dei numeri elettronici ha altresì permesso di giungere a due conclusioni circa la valenza. Basta dare uno sguardo alla tavola per poter stabilire che:

8. *La valenza massima di un metallo è data dalla differenza tra il suo numero atomico e lo stadio di equilibrio immediatamente soprastante.*

Così ad esempio Na ha la massima valenza di 1: ($11 - 10 = 1$); V ha la massima valenza di 5: ($23 - 18 = 5$) e via dicendo.

Non tutte le valenze però dalla monovalenza alla massima, stabilita secondo la legge suddetta, possono sussistere. A limitarle interviene, tra altro, la simmetria. Difatti risulta logicamente da quanto è stato detto, che:

9. *Non sussistono valenze corrispondenti ad un aggruppamento asimmetrico (5 o 7) di elettroni.*

Così non si ha un Cr^{I} , monovalente, poichè esso corrisponde ad un $(18) \cdot 5$, nè un Cl^{II} , cioè un Cl metallico bivalente, poichè esso corrisponde ad un aggruppamento $(10) \cdot 5$ e via di seguito.

Ciò è confermato anche dal fatto che quando si abbiano valenze che darebbero aggruppamenti asimmetrici interviene un raddoppiamento. Così ad esempio nel bromuro di zolfo il S è monovalente, e corrisponderebbe ad un aggruppamento $(10) \cdot 5$ asimmetrico. Ma la densità di vapore ci dice che la molecola non è SBr , ma è raddoppiata: S_2Br_2 . Si formano così dei gruppi bieletronilici simmetrici.

Dalla legge della massima valenza si deduce che nei periodi comprendenti otto termini non si può mai avere valenza superiore a 7. Il numero atomico dell'ultimo corpo di ciascuno di questi periodi differisce infatti di 7 dallo stadio di equilibrio precedente. Così: F ($9 - 2 = 7$); Cl ($17 - 10 = 7$); Br ($35 - 28 = 7$); I ($53 - 46 = 7$).

La valenza massima 8 non può dunque sussistere se non nei periodi composti di dieci termini.

Dallo studio di tali periodi sembra risultare che la disposizione degli elettroni cambia di livello nei vari elementi. Ad es. pel periodo 36-46 nella triade risulterebbero occupate tutte e cinque le orbite di M. Mentre i primi sei termini hanno libere M_{IV} ed M_V e gli elettroni periferici si trovano nel livello N.

Una prosecuzione nell'occupazione di questo livello dovrebbe sussistere sino ad Ag^I , nel quale lo stadio 46 sarebbe dato non dall'equilibrio 36.4.6, ma da 36 del Kr e da 10 elettroni, tutti nel livello N. Da ciò la instabilità dell' Ag^I , nel quale i 10 elettroni tendono a discendere nelle due orbite M_{IV} ed M_V per arrivare all'equilibrio ternario 4. 6. orbite che risultano effettivamente occupate nell'Ag. metallico. Una ionizzazione di questo instabile complesso Ag^I farebbe spostare verso M gli elettroni, sino allora disposti invece in N. Quanto si dice per Ag^I si ripete altresì per Cu^I ed Au^I . Questa ipotesi, che ha notevole base nei fatti sino ad oggi conosciuti, spiegherebbe taluni fenomeni fisici tuttora oscuri, come la fluorescenza e più che altro la fotografia.

Come ho ripetutamente detto tutti questi nuovi dati sono ampiamente illustrati e giustificati nella Nota in corso di pubblicazione. Qui li presento, sia per prender data, sia perchè mi sono necessari per ritornare su di un argomento relativo alle triadi, e di cui avrò occasione di occuparmi in una prossima Nota.

Geologia. — *I terreni dal Priaboniano al Norico nei dintorni di Albenga.* Nota del Corrisp. S. FRANCHI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Azione della Chinina, Eserina, Pilocarpina, Digitonina, Sparteina e Atropina sui centri nervosi.* Nota del Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Dottrina fisiologica dell'azione dei veleni eccitanti i centri nervosi.* Nota del Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Ecologia agraria. — *La Ecologia agraria e la Conferenza Internazionale del grano.* Nota ⁽¹⁾ del Socio P. R. PIROTTA.

Ben credo di potere, in occasione della chiusura dei lavori della Sezione di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, trarre motivo per il mio dire dai recenti sviluppi della Ecologia agraria, definita da me, per la prima volta, sette anni or sono il 4 giugno 1920 nella relazione presentata all'Accademia sui lavori del dott. Gerolamo Azzi e dopo che S. E. il compianto on. Luigi Luzzatti aveva saputo impostare magistralmente il nuovo argomento con un discorso letto il 9 maggio dello stesso anno a Sezioni riunite.

È noto che sotto gli auspici dell'Accademia l'iniziativa poté rapidamente affermarsi in grazia specialmente del Ministero dell'Agricoltura che volle disporre la istituzione di un centro di insegnamento, di sperimentazione e di organizzazione presso l'Istituto Superiore Agrario di Perugia.

Per l'attività del Direttore e dei suoi giovani e valorosi allievi la nuova Cattedra ha saputo in breve volger di tempo attirare su di sè l'attenzione degli studiosi d'Italia e di fuori.

Nel 1924, in occasione dell'Assemblea generale dell'Istituto internazionale di Agricoltura, veniva unanimemente riconosciuta l'opportunità di inviare a Perugia agronomi dei vari paesi per formarli nell'ordine dei nuovi studi.

Nel 1926, distintosi oramai nettamente il campo della Meteorologia applicata all'agricoltura, che è compito dei fisici, da quello della Ecologia agraria, che è compito del biologo, il Comitato scientifico dell'Istituto internazionale di Agricoltura costituiva una Commissione internazionale di Ecologia agraria e di Meteorologia applicata alla Agricoltura, divisa in due Sezioni.

Il concetto di rendimento è il principio fondamentale della Ecologia agraria: « Rendimento è valore non assoluto, ma risultato di una relazione tra la capacità di produrre e la resistenza alle avversità ambientali ».

L'imperfetta valutazione del clima da parte degli agronomi ed in particolare modo dei genetisti e dei selezionatori, è tuttora causa di gravi inconvenienti che si verificano ogni qual volta si procede alla diffusione di un nuovo tipo o ad uno spostamento di una varietà dal luogo di origine in altre regioni.

La causa di tali errori va ricercata in ciò appunto che fino ad ora si è confuso o voluto confondere rendimento con produttività, mirando, nei lavori di selezione e di ibridazione, costantemente a quest'ultima e senza

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1927.

pensare che elevata capacità di produzione diviene, in zone ambientalmente non troppo favorite, causa di basso rendimento

Gli studi ecologici passano attraverso le tre successive seguenti fasi:

1° Determinazione empirica del grado di produttività e del grado di resistenza alle avversità ambientali, onde procedere, caso per caso, ed in rapporto alle condizioni e disponibilità ambientali, alla scelta o creazione del tipo che riunisce produttività e resistenza nelle migliori proporzioni ai fini del massimo rendimento.

2° Determinazione delle caratteristiche morfologiche e fisiologiche, da cui dipendono i diversi gradi di produttività e resistenza.

3° Determinazione dei fattori genetici che le suddette caratteristiche comandano.

In rapporto a questa ultima fase si delinea quell'interessante contatto fra la Ecologia e la Genetica, che dominò, come motivo fondamentale, i lavori della Sezione di Genetica e di Ecologia durante la Conferenza internazionale del grano.

I tre punti o fasi, di cui sopra è detto, rappresentano nel loro insieme lo schema per la soluzione del problema del migliore adattamento delle colture all'ambiente fisico.

Lo schema però ha il valore di un modello che non può essere utilizzato senza aver preso prima le misure, senza avere raccolto in campo gli elementi che ci permettono di impostare il problema.

Ed è in base a questa considerazione, che, per cura e ad iniziativa della Cattedra di Ecologia dell'Istituto superiore agrario di Perugia, si procede nei Comuni di Perugia e di Imola ad un accurato rilievo della situazione ambientale in rapporto alla coltura del frumento con indagine estesa alle singole unità poderali, nessuna esclusa, per un'ampiezza di battuta superiore ai 600 kmq.

I materiali così raccolti ed opportunamente elaborati portano a:

1° Divisione in zone fisiografiche: in ognuna delle quali il problema si prospetta con i medesimi caratteri per ciò che riguarda la natura e la intensità dei fenomeni avversi.

2° Classificazione dei frumenti coltivati o provati nella zona, in categorie che si distinguono per diverse gradazioni di produttività e di resistenza, classificazione che facilita la razionale distribuzione dei frumenti stessi nelle varie zone.

3° Si offre finalmente la base seria per le così dette prove di orientamento, le quali hanno un ben scarso significato, quando vengono eseguite in un punto, senza poter poi stabilire su quale area debbano venire applicati i risultati in tal modo raggiunti.

Nè voglio ora insistere su questo interessante aspetto, che sembra andare oltre il campo di una disciplina sola, per rientrare nel quadro di

quelle riforme, rese oramai necessarie, per dare sviluppo a quelle scienze applicative, che non possono nè debbono venir confuse con la pratica.

In occasione del Congresso internazionale del grano, di cui sopra è cenno, il Capo del Governo italiano volle con le seguenti parole mettere all'ordine del giorno gli studi della Ecologia agraria: « L'Istituto Internazionale di Agricoltura già da tempo aveva iniziato una vasta inchiesta sul clima del grano, inchiesta affidata ad uno dei suoi antichi funzionari (il prof. G. Azzi) ed i cui risultati sono esposti nella monografia che costituisce il rapporto sul primo punto dell'ordine del giorno della Conferenza.

« L'idea direttiva di questa grande inchiesta, pur conservando una linea rigorosamente scientifica, si addimostra egualmente feconda di pratiche applicazioni. Si tratta del principio fondamentale della Ecologia agraria, secondo il quale il rendimento di una pianta è valore non assoluto, ma la risultante di un rapporto tra la capacità produttiva di questa pianta e la resistenza ai fenomeni avversi dell'ambiente fisico.

« Il quesito fu sottoposto per il grano a 80 paesi e 80 paesi hanno fornito materiali che vertono a soluzioni concrete.

« Voi disponete dunque delle basi per questa azione internazionale che si vorrebbe allontanare dal dominio della tecnica agraria come una chimera, e che si presenta invece coi risultati suggestivi di prove, il cui valore scientifico è innegabile e la certezza assoluta.

« Ecco dunque sancita la possibilità di procedere al coordinamento di tutte queste ricerche per mezzo di una vasta rete di osservatori di Ecologia agraria che potrebbero, centrando all'Istituto internazionale di Agricoltura, cooperare alla realizzazione degli scopi che la Conferenza saprà additare ». *(Dal discorso di S. E. l'on. Benito Mussolini, 25 aprile 1927).*

Ho l'onore di presentare a questa Accademia l'omaggio dell'opera del prof. Azzi, *Il Clima del Grano nel Mondo* (le basi ecologiche per la cultura mondiale del frumento), nella quale sono appunto raccolti ed elaborati i dati ottenuti mediante inchiesta internazionale.

Questo lavoro corrisponde in pieno allo scopo dell'autore: riunire, cioè, e coordinare, seguendo i principi fondamentali della Ecologia agraria, gli elementi che permettono di valutare tutti i gradi di intensità per ogni singolo fenomeno ambientale avverso e di valutare il grado di resistenza alle singole avversità di tutte le varietà di frumento coltivate nel mondo.

Si vengono così a mettere a disposizione degli studiosi e dei tecnici gli elementi per ottenere in ogni caso la migliore combinazione dei caratteri ai fini del massimo rendimento, nel mentre si fornisce una base sicura di collaborazione internazionale e si abbozza, con il riconoscimento di un principio direttivo fondamentale, una solida struttura gerarchica per il vasto ed importante movimento.

Dopo l'autorevole ed unanime approvazione dell'intero congresso, espressa anche in particolare e nei termini i più lusinghieri da personalità

come il Baur, lo Tchermak, Vavilov, Nilsson Ehle, Zalewski, Botto, Newman, credo inutile dilungarmi. Basterà dare lettura delle decisioni e voti relativi, consacrati nella seduta plenaria del 30 aprile 1927:

1° stabilire nelle singole regioni fisiografiche sulla base del principio della Ecologia agraria una rete di stazioni di osservazione con lo scopo di determinare i diversi gradi di produttività e di resistenza per le principali varietà di frumento;

2° eseguire, valendosi di questa rete, uno studio biologico del clima, basato sul comportamento di un numero limitato di varietà indici, il cui elenco sarà definito dal prof. Azzi in collaborazione con gli specialisti dei diversi paesi;

3° la Conferenza considera l'opera del prof. Azzi, *Il Clima del Grano nel Mondo*, pubblicata dall'Istituto internazionale di Agricoltura, come la base per gli studi del grano dal punto di vista internazionale. Un tale lavoro è importantissimo per la mutua comprensione e per il progresso internazionale.

La via percorsa dal 4 giugno 1920 sino ad oggi ci permette dunque di formulare le migliori previsioni per l'avvenire e l'Accademia Nazionale dei Lincei, sotto il cui auspicio il nuovo ordine di studi poté affermarsi, formula l'augurio di vedere al più presto realizzata l'opera grande cui il Capo del Governo ha voluto additare nella prolusione ai lavori della Conferenza del grano e che si concreta in una affermazione culturale italiana oltre i confini nazionali.

E questo è nello spirito e nella lettera del Fascismo!

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul calcolo approssimato di una funzione armonica in tre variabili, e delle sue successive derivate.* Nota di F. SBRANA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Il prof. Picone ha dimostrato come certe proprietà di media delle derivate successive di una funzione armonica u in due variabili conducano a calcolare, con errore maggiorabile, la funzione stessa, ed ogni sua derivata parziale, quando sia stato stabilito per la u un calcolo di approssimazione convergente in media ⁽²⁾. In questa Nota ci permettiamo di accennare alla possibilità di estendere il risultato del prof. Picone al caso di una funzione armonica in tre variabili. Naturalmente, i calcoli relativi a questo caso

(1) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

(2) M. PICONE, *Teoremi di media caratteristici per le soluzioni di talune equazioni alle derivate parziali*, « Rend. del Circ. Matem. di Palermo », tomo LI, 1927, pp. 25-38.

si rendono più complicati, venendo a mancare il potente ausilio del riferimento alle funzioni di variabile complessa.

2. Sia u una funzione (reale), armonica, delle tre coordinate x, y, z di un punto P interno a un dominio T (a tre dimensioni). Indicheremo con T_ρ il campo di T tale che ogni sfera col centro in P , e di raggio ρ , sia interna a T . Rappresenteremo ancora con $\sigma(P, \rho)$ la superficie di tale sfera. Se $A(x_0, y_0, z_0)$ è un punto interno a $\sigma(P, \rho)$ si ha

$$(1) \quad 4\pi u(x_0, y_0, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{r^n}{\rho^n} \iint_{\sigma(P, \rho)} u(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) P_n(\cos \gamma) d\sigma(P, \rho),$$

essendo r la distanza di A da P , ξ, η, ζ le coordinate dell'elemento di superficie $d\sigma(P, \rho)$, $P_n(\zeta)$ la funzione sferica di prima specie e di ordine n in ζ , e γ l'angolo formato dalla retta \overrightarrow{PA} con la direzione che va da P all'elemento $d\sigma(P, \rho)$ ⁽¹⁾.

Introducendo coordinate sferiche, col polo in P , si riconosce subito che il coefficiente di r^n , nel secondo membro della (1), risulta indipendente da r . Si ha quindi

$$(2) \quad \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n u(A)}{\partial r^n} \right]_{A=P} = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{1}{\rho^n} \iint_{\sigma(P, \rho)} u(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) P_n(\cos \gamma) d\sigma(P, \rho),$$

ovvero, indicando con λ, μ, ν , i coseni direttori della retta \overrightarrow{PA} , con λ', μ', ν' quelli relativi alla direzione che va da P a $d\sigma(P, \rho)$, e con Q il punto della sfera, di coordinate $x+\lambda'\rho, y+\mu'\rho, z+\nu'\rho$,

$$(3) \quad \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right)^{(n)} = \frac{n!(2n+1)}{4\pi \rho^n} \iint_{\sigma(P, \rho)} u(Q) P_n(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu') d\sigma(P, \rho),$$

dove s'intenda che le derivate di u sono valutate nel punto P .

La (3) permette di valutare tutte le derivate di ordine n della u in P , in funzione dei valori assunti da u su $\sigma(P, \rho)$. Basta per questo aver presente che in essa λ, μ e ν sono numeri reali qualunque, soggetti alla sola condizione che la somma dei loro quadrati sia uguale ad uno. Così per $n=0$, si ritrova il classico teorema di media di Gauss per le funzioni armoniche. Per $n=1$, essendo $P_1(t)=t$, se si pone $\lambda=1$, (e $\mu=\nu=0$), si ottiene, sostituendo per brevità σ a $\sigma(P, \rho)$,

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3}{4\pi\rho} \iint_{\sigma} u(Q) \lambda' d\sigma;$$

(1) Cfr., p. es., RIEMANN-WEBER, *Part. diff.-gleich. der math. Physik*, Bd. I, (1919), p. 278 (3). In questa formula è però supposto $\rho=1$.

formule analoghe sussistono per $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial \chi}$. Per $n = 2$, essendo

$$P_2(t) = \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2},$$

risulta

$$(5) \quad \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial \chi} \right)^{(2)} = \frac{5}{4\pi\rho^2} \iint_{\sigma} u(Q) [3(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')^2 - 1] d\sigma,$$

e quindi, facendo $\lambda = 1, (\mu = \nu = 0)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{5}{4\pi\rho^2} \iint_{\sigma} u(Q) [3\lambda'^2 - 1] d\sigma.$$

Due formule simili sussistono per $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, e $\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2}$. Di qui segue

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} = \frac{5}{4\pi\rho^2} \iint_{\sigma} u(Q) [3\lambda^2 \lambda'^2 + \mu^2 \mu'^2 + \nu^2 \nu'^2 - 1] d\sigma,$$

e sottraendo dalla (5),

$$\lambda\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial \chi} + \nu\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial \chi \partial x} = \frac{15}{4\pi\rho^2} \iint_{\sigma} u(Q) (\lambda\mu\lambda'\mu' + \mu\nu\mu'\nu' + \nu\lambda\nu'\lambda') d\sigma.$$

Posto in quest'ultima $\nu = 0$, si ha subito

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{15}{4\pi\rho^2} \iint_{\sigma} u(Q) \lambda'\mu' d\sigma;$$

e così via.

3. Sia P un punto di T_R ; moltiplicando la (3) (nella quale riteniamo fissi λ, μ, ν), per

$$\frac{4\pi}{n!(2n+1)} \rho^{n+2} d\rho,$$

ed integrando, tra zero ed R, otteniamo

$$(6) \quad \iint_{\xi(P,R)} u(Q) P_n(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu') dS(P,R) = \frac{4\pi R^{n+3}}{n!(2n+1)(n+3)} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial \chi} \right)^{(n)},$$

dove $S(P,R)$ rappresenti la porzione di T limitata da $\sigma(P,R)$.

Supponiamo ora che le funzioni

$$u_1(Q), u_2(Q), \dots, u_k(Q), \dots,$$

di quadrato sommabile in T , convergono in media verso la funzione armonica $u(Q)$, per modo che si abbia

$$\iint_T [u(Q) - u_k(Q)]^2 dT \leq \eta_k, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = 0,$$

essendo $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \dots$ quantità note. Procedendo come il prof. Picone ha mostrato nella Memoria citata, per il caso delle funzioni armoniche in due variabili, dalla (6) si trae

$$\left\{ \begin{aligned} & \left| \frac{4\pi R^{n+3}}{n!(2n+1)n+3} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right)^{(n)} - \iint_{S(P,R)} u_k(Q) P_n(\lambda \lambda' + \mu \mu' + \nu \nu') dS(P,R) \right|^2 = \\ (7) \quad & \left| \iint_{S(P,R)} [u(Q) - u_k(Q)] P_n(\lambda \lambda' + \mu \mu' + \nu \nu') dS(P,R) \right|^2 \leq \\ & \leq \iint_{S(P,R)} [u(Q) - u_k(Q)]^2 dS(P,R) \leq \eta_k \end{aligned} \right.$$

Basta per questo aver presente che $P_n(t)$ resta sempre compresa tra -1 ed 1 .

Facendo nella (7) $n=0$, otteniamo,

$$(8) \quad \left| u(P) - \frac{3}{4\pi R^3} \iint_S u_k(Q) dS \right| \leq \frac{3\sqrt{\eta_k}}{4\pi R^3},$$

dove, per brevità, si è posto S in luogo di $S(P, R)$. Facendo invece $n=1$, e $\lambda=1$, ($\mu=\nu=0$), si ha

$$(9) \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{3}{\pi R^4} \iint_S u_k(Q) \lambda' dS \right| \leq \frac{3\sqrt{\eta_k}}{\pi R^4};$$

limitazioni simili valgono per $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial z}$. Per $n=2$, e $\lambda=1$, resta

$$(10) \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{5^2}{4\pi R^5} \iint_S u_k(Q) (3\lambda'^2 - 1) dS \right| \leq \frac{5^2 \sqrt{\eta_k}}{2\pi R^5};$$

limitazioni simili si trovano per $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (permutando circolarmente le lettere λ', μ', ν').

Di qui segue

$$\left| \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{5^2}{4\pi R^5} \iint_S u_k(Q) [3(\lambda^2 \lambda'^2 + \mu^2 \mu'^2 + \nu^2 \nu'^2) - 1] dS \right| \leq \frac{5^2 \sqrt{\eta_k}}{2\pi R^5};$$

per conseguenza risulta, valendosi ancora della (7), (ove sia fatto $n = 2$),

$$\begin{aligned} & \left| \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \frac{5^2}{2 \pi R^5} \iiint_S u_k(Q) P_2(\lambda \lambda' + \mu \mu' + \nu \nu') dS - \right. \\ & \left. - \left\{ \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{5^2}{4 \pi R^5} \iiint_S u_k(Q) [3(\lambda^2 \lambda'^2 + \mu^2 \mu'^2 + \nu^2 \nu'^2) - 1] dS \right\} \right| = \\ & = 2 \left| \lambda \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \nu \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \right. \\ & \left. - \frac{5^2}{4 \pi R^5} \iiint_S u_k(Q) (\lambda \mu \lambda' \mu' + \mu \nu \mu' \nu' + \nu \lambda \nu' \lambda') dS \right| \leq \frac{5^2 V_{\eta_k}}{\pi r^5}. \end{aligned}$$

Facendo in questa $\lambda = \mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$, si trova

$$(11) \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{5^2}{4 \pi R^5} \iiint_S u_k(Q) \lambda' \mu' dS \right| \leq \frac{5^2 V_{\eta_k}}{\pi r^5};$$

e formule analoghe si hanno per le altre derivate seconde miste di u .

Per le derivate di ordine superiore della u , il calcolo si rende alquanto complicato.

Una limitazione molto semplice si ha però per le derivate *pure* di qualunque ordine della u . Infatti, facendo, p. es., $\lambda = 1$ ($\mu = \nu = 0$), nella (7), si ha senz'altro

$$(12) \quad \left| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} - \frac{n! (2n+1)(n+3)}{4 \pi R^{n+3}} \iiint_S u_k(Q) P_n(\lambda') dS \right| \leq \frac{n! (2n+1)(n+3) V_{\eta_k}}{4 \pi R^{n+3}}.$$

Comunque, le formule dalla (9) alla (12) mostrano come dalla conoscenza delle funzioni u_k , sia possibile trarre, per la funzione armonica u , o per una sua prefissata derivata parziale, con una semplice integrazione, una funzione che al divergere di k converge uniformemente verso la u , o verso la indicata derivata. Le formule citate danno anche il limite superiore dell'errore delle funzioni di approssimazione così ottenute, espresso per mezzo dell'errore quadratico η_k relativo alle funzioni u_k .

Matematica. — *Sulla riduzione dei sistemi ortogonali di equazioni differenziali lineari.* Nota di V. HLAVATÝ, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In questa Nota noi studieremo il sistema lineare ordinario d'ordine n

$$(I) \quad \frac{d\zeta_i}{dt} + \sum_j^n \zeta_j p_{ji} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

in cui i coefficienti p_{ji} si suppongono funzioni (reali) note della variabile indipendente t , derivabili quante volte occorre.

Siano $g_{ij}(t) = g_{ji}(t) \frac{n(n+1)}{2}$ funzioni assegnate di t che rendano definita (positiva) la forma

$$\sum_{i,j}^n g_{ij} \zeta_i \zeta_j$$

e quindi in particolare il determinante $\|g_{ij}\| > 0$. Se il sistema (I) ammette l'integrale quadratico

$$I \equiv \sum_{i,j}^n g_{ij} \zeta_i \zeta_j = \text{cost}$$

sussiste il seguente teorema:

Tale sistema è sempre riducibile (con operazioni reali in termini finiti) alla forma « canonica »

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\eta_1}{dt} = q_1 \eta_2, \\ \frac{d\eta_2}{dt} = -q_1 \eta_1 + q_2 \eta_3, \\ \frac{d\eta_i}{dt} = -q_{i-1} \eta_{i-1} + q_i \eta_{i+1}, \\ \frac{d\eta_{n-1}}{dt} = -q_{n-2} \eta_{n-2} + q_{n-1} \eta_n, \\ \frac{d\eta_n}{dt} = -q_{n-1} \eta_{n-1}, \end{array} \right.$$

(1) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

le q essendo calcolabili per ricorrenza a partire dai dati della questione oppure, in forma più compendiosa, a

$$(II)^* \quad \eta'_i + q_{i-1} \eta_{i-1} - q_i \eta_{i+1} = 0 \quad (i = 1, \dots, n; q_0 = q_n = 0).$$

Qui, per comodità, abbiamo posto η'_i per $\frac{d\eta_i}{dt}$.

Per la dimostrazione ricordiamo anzitutto⁽¹⁾ che ogni sistema (I) dotato di integrale quadratico definito I è sempre riducibile (senza quadrature) alla forma emisimmetrica a determinante gobbo

$$(III) \quad y'_i + \sum_j y_j r_{ji} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

caratterizzata dalle relazioni

$$(I) \quad r_{ij} + r_{ji} = 0,$$

mentre l'integrale quadratico assume la forma

$$\sum_i (y_i)^2 = \text{cost} > 0.$$

In quanto, attesa l'omogeneità del sistema, non costituisce sostanziale restrizione l'attribuire il valore 1 alla costante (positiva), riterremo addirittura

$$J \equiv \sum_i (y_i)^2 = 1.$$

2. Per comodità di esposizione giova ricorrere a rappresentazioni e locuzioni geometriche di uso corrente. Facciamo all'uopo intervenire come ausiliario un generico spazio euclideo a n dimensioni (se n è l'ordine del dato sistema differenziale), e immaginiamo assegnato in questo spazio un ordinario sistema di assi di riferimento (cartesiani ortogonali) X_1, X_2, \dots, X_n . n numeri v_1, \dots, v_n si possono allora interpretare sia come coordinate di un punto di detto spazio, sia — ed è questa immagine che conviene al nostro scopo — come componenti di un vettore \mathbf{v} . Eseguendo una sostituzione ortogonale sul sistema di riferimento

$$(2) \quad X_i = \sum_j \alpha_{ij} X_j^* \quad \text{risp.} \quad X_j^* = \sum_i \alpha_{ij} X_i$$

le componenti v_i^* del vettore \mathbf{v} rispetto al nuovo sistema di riferimento sono legate alle componenti v_i dalle equazioni

$$(2)^* \quad v_i = \sum_j \alpha_{ij} v_j^* \quad \text{risp.} \quad v_j^* = \sum_i \alpha_{ij} v_i.$$

(1) Ciò segue subito dall'osservazione fatta dal DARBOUX per $n = 3$. (Vedi *Leçons*, t. 1, p. 20).

Dunque, essendo \mathbf{v} e \mathbf{p} due vettori arbitrari, la somma

$$\sum_i^n v_i p_i = \sum_i^n v_i^* p_i^*$$

è invariante rispetto alla sostituzione ortogonale (2). Questa somma si denota con $\mathbf{v} \times \mathbf{p}$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{p} = \mathbf{p} \times \mathbf{v} = \sum_i^n v_i p_i$$

e dicesi *prodotto scalare*. Se $\mathbf{v} \times \mathbf{p} = 0$ i vettori sono chiamati vettori *ortogonali*. La lunghezza v di un vettore \mathbf{v} è definita come invariante

$$v = \left| \sqrt{\mathbf{v} \times \mathbf{v}} \right| = \left| \sqrt{\sum_i^n (v_i)^2} \right|.$$

Se $v = 1$, il vettore si chiamerà più specificamente *versore* e le componenti v_i si identificheranno con i suoi coseni di direzione. Se φ è una funzione qualunque e se \mathbf{v} è un vettore qualunque, con $\varphi \mathbf{v}$ si denota il vettore le cui componenti sono $\varphi v_1, \dots, \varphi v_n$ ⁽¹⁾.

Sia Ω un'ennupla ortogonale, cioè costituita da versori fra loro mutuamente ortogonali $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ e Ψ un'altra ennupla ortogonale $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.

Ogni vettore \mathbf{v} , definito per mezzo dell'ennupla Ω risp. Ψ può scriversi

$$\mathbf{v} = \sum_i^n v_i \mathbf{e}_i = \sum_i^n w_i \mathbf{u}_i,$$

essendo v_i le componenti di \mathbf{v} rispetto a Ω , e w_i le componenti di \mathbf{v} rispetto a Ψ . Se i versori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ sono legati ai versori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ dalle equazioni

$$(3) \quad \mathbf{u}_i = \sum_j^n u_{ij} \mathbf{e}_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

in cui i coefficienti u_{ij} , in causa della ortogonalità, costituiscono una matrice ortogonale, sussistono naturalmente, accanto alle (3), le

$$(3)^* \quad \mathbf{e}_j = \sum_i^n u_{ij} \mathbf{u}_i$$

e ne segue ovviamente

$$(3)^{**} \quad w_i = \sum_j^n u_{ij} v_j \quad v_j = \sum_i^n u_{ij} w_i.$$

(1) Per esposizione completa di calcolo vettoriale nello spazio euclideo vedi per es. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*.

3. Premesse queste considerazioni ritorniamo al sistema III, avvalendoci della struttura dei suoi primi membri per dedurre da un assegnato vettore \mathbf{v} un nuovo vettore $D\mathbf{v}$

$$(4) \quad D\mathbf{v} = \sum_i^n (Dv)_i \mathbf{e}_i.$$

Ne definiremo le componenti $(Dv)_i$ mediante le posizioni

$$(4)^* \quad (Dv)_i \equiv v'_i + \sum_j^n v_j r_{ji}.$$

Importa rilevare che il vettore $D\mathbf{v}$ così definito ha carattere invariante rispetto a trasformazioni ortogonali (3) (i cui coefficienti u_{ij} siano funzioni quali si vogliono di t). Infatti, ove si eseguisca la trasformazione (3)** sulle componenti $(Dv)_i$ del vettore $D\mathbf{v}$ e se si ponga

$$(5) \quad \omega_{ij} = \sum_k^n u_{ik} u_{jk} r_{kk} + \sum_k^n u'_{ik} u_{jk} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

le nuove componenti $(Dw)_i$ assumono, in base alle (3)** , (4)*, i valori

$$(6) \quad (Dw)_i \equiv w'_i + \sum_j^n w_j \omega_{ji} = \sum_j^n u_{ij} (Dv)_j,$$

ciò che prova l'asserto, purchè si convenga, che — di fronte a sostituzioni ortogonali (3) (variabili o no con t) — la legge di trasformazione dei coefficienti r_{ij} , i quali figurano nell'operatore D , sia fornita dalle (5).

Noi chiameremo $D\mathbf{v}$ la derivata gobba vettoriale.

Se, in particolare, \mathbf{y} è il versore, le cui componenti y_1, \dots, y_n (rispetto ad Ω) soddisfano il sistema (III), tale sistema può scriversi simbolicamente $D\mathbf{y} = 0$.

Essendo η_1, \dots, η_n le componenti di \mathbf{y} rispetto ad Ψ , si ha in virtù delle (6), (4)

$$D\mathbf{y} = \sum_i^n (Dy)_i \mathbf{e}_i = \sum_i^n (D\eta)_i \mathbf{u}_i = 0.$$

Come si vede, le trasformate delle (III) assumono la forma

$$(7) \quad (D\eta)_i \equiv \eta'_i + \sum_j^n \eta_j \omega_{ji} = 0$$

dove le ω_{ij} sono legate alle r_{ij} dalle equazioni (5). Queste, moltiplicandone entrambi i membri per u_{jk} e sommando rispetto a j , possono essere poste sotto la forma equivalente

$$\sum_j^n \omega_{ij} u_{jk} = u'_{ik} + \sum_j^n u_{ij} r_{jk} \equiv (Du)_k,$$

ed anche, in virtù delle (3), (4)*, compendiate nelle n relazioni vettoriali

$$(8) \quad D\mathbf{u}_i = \sum_k^n (Du_i)_k \mathbf{e}_k = \sum_j^n \omega_{ij} \mathbf{u}_j$$

in cui si ravvisa la generalizzazione delle formole del Poisson⁽¹⁾.

Noi profitteremo dell'arbitrarietà dell'ennupla Ψ per attribuire alle equazioni (7) che sono equivalenti al sistema (III) la forma più semplice (II).

Dalle equazioni (1), (5) e (8) segue

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k \times D\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i \times D\mathbf{u}_k &= \mathbf{u}_k \times \sum_j^n \omega_{ij} \mathbf{u}_j + \mathbf{u}_i \times \sum_j^n \omega_{kj} \mathbf{u}_j \\ &= (\omega_{ik} + \omega_{ki}) = \sum_j^n (\omega'_{ij} u_{kj} + \omega'_{kj} u_{ij}) = 0 \quad (i, k = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

da cui, in particolare, per $i = k$, il corollario:

c) *L'operatore D applicato ad un versore dà luogo ad un vettore ortogonale (o nullo).*

4. Sia \mathbf{u}_i un versore qualsiasi che non sia integrale (particolare) del sistema (III), cioè $D\mathbf{u}_i \neq 0$. Ponendo

$$(9) \quad q_1 = |\sqrt{(D\mathbf{u}_1) \times (D\mathbf{u}_1)}| > 0$$

e tenendo conto di c), possiamo, nel caso $n > 1$, fissare \mathbf{u}_2 come versore di $D\mathbf{u}_1$ cioè porre

$$(10) \quad D\mathbf{u}_1 = q_1 \mathbf{u}_2.$$

I versori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ sono così già noti. Ne segue che possiamo calcolare $D\mathbf{u}_2$. Se $n = 2$ il teorema è dimostrato, come risulterà da una considerazione generale che istituiremo più innanzi⁽²⁾. Se $n > 2$ possiamo ulteriormente riferirci al caso generale⁽³⁾ in cui $D\mathbf{u}_2$ non è combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, ossia individua con questi una ben determinata giacitura a tre dimensioni. Designando con \mathbf{u}_3 il versore di questa giacitura, ortogonale ad $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, sarà $D\mathbf{u}_2$ combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ anzi, avuto riguardo a c), soltanto di \mathbf{u}_1 ed \mathbf{u}_3 . Esprimendolo analiticamente, si ha un'equazione del tipo

$$(11) \quad D\mathbf{u}_2 = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + q_2 \mathbf{u}_3$$

coi coefficienti α_1 e q_2 ($\neq 0$ nel caso generale, a cui abbiamo convenuto di riferirci) che occorre valutare. La moltiplicazione scalare per \mathbf{u}_1 , risp. $D\mathbf{u}_2$, dà

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \times D\mathbf{u}_2 &= -\mathbf{u}_2 \times D\mathbf{u}_1 = -q_1 \mathbf{u}_1, \\ (D\mathbf{u}_2) \times (D\mathbf{u}_2) &= q_1^2 + q_2^2. \end{aligned}$$

(1) T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, p. 177.

(2) Vedi n. 6.

(3) Noi ci occuperemo dei casi speciali in un'altra Nota.

La (11) può così essere scritta

$$(11)^* \quad D\mathbf{u}_2 = -q_1 \mathbf{u}_1 + q_2 \mathbf{u}_3,$$

dove q_1 è, come si è detto, definito dalla (9) e

$$(12) \quad q_2 = |\sqrt{(D\mathbf{u}_2) \times (D\mathbf{u}_2) - q_1^2}| > 0.$$

Le (11)* e (12) definiscono anche il verso del vettore \mathbf{u}_3 (caratterizzato prima concettualmente *a meno del verso*, attraverso la giacitura $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, D\mathbf{u}_2$ e condizioni di ortogonalità) mediante elementi già calcolati in precedenza. Se $n = 3$, il teorema può ritenersi dimostrato nel senso già accennato per il caso $n = 2$.

Se $n > 3$, si procede in modo analogo a quello testè esposto, ponendosi nel caso generale⁽¹⁾ in cui $D\mathbf{u}_3$ non è combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Si introduce così \mathbf{u}_4 , e posto

$$(13) \quad q_3 = |\sqrt{(D\mathbf{u}_3) \times (D\mathbf{u}_3) - q_2^2}| > 0$$

si trova

$$(14) \quad D\mathbf{u}_3 = -q_2 \mathbf{u}_2 + q_3 \mathbf{u}_4.$$

5. Proseguendo in tale maniera, possiamo con procedimento induttivo supporre di essere giunti a individuare per un certo $m \leq n$ m versori mutuamente ortogonali

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_m$$

nonchè $m - 1$ numeri positivi

$$q_1, q_2, \dots, q_{m-2}, q_{m-1} \neq 0$$

tali che sia

$$(15) \quad D\mathbf{u}_a = -q_{a-1} \mathbf{u}_{a-1} + q_a \mathbf{u}_{a+1}$$

$$(16) \quad q_a = |\sqrt{(D\mathbf{u}_a) \times (D\mathbf{u}_a) - q_{a-1}^2}| > 0 \quad \left(\begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, m-1 \\ q_0 = 0 \end{array} \right)$$

Ciò posto prendiamo in considerazione il vettore $D\mathbf{u}_m$. Se $m = n$

$$D\mathbf{u}_m = D\mathbf{u}_n$$

risulta necessariamente combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1}$. Possiamo dunque porre

$$D\mathbf{u}_n = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}$$

e determinare le β in base alla (15) e (16). Risulta così

$$(17) \quad D\mathbf{u}_n = -q_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}$$

(1) Noi ci occuperemo dei casi particolari in un'altra Nota.

e gli n versori u_1, \dots, u_n costituiscono precisamente l'ennupla ortogonale Ψ che come vedremo al numero seguente, porge senz'altro la dimostrazione del teorema enunciato.

Se invece $m < n$, allora conviene, come già negli stadi precedenti, riferirci al caso generale⁽¹⁾, in cui Du_m non è combinazione lineare di u_1, \dots, u_m , e per conseguenza individua con questi una ben determinata giacitura a $m + 1$ dimensioni. Designando con u_{m+1} il versore di questa giacitura, ortogonale ad u_1, \dots, u_m (il quale versore è così definito a meno del verso), sarà Du_m combinazione lineare di u_1, \dots, u_m, u_{m+1} , anzi, avuto riguardo a c) soltanto di $u_1, \dots, u_{m-1}, u_{m+1}$. Esprimendolo analiticamente, si ha un'equazione del tipo

$$(18) \quad Du_m = \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_{m-1} u_{m-1} + q_m u_{m+1}$$

coi coefficienti γ_1, q_m che occorre valutare. La moltiplicazione scalare per u_1, \dots, u_{m-1} , risp. Du_m dà in virtù delle (15) e (16),

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{m-1} = 0,$$

$$\gamma_{m-1} = u_{m-1} \times Du_m = -u_m \times Du_{m-1} = -q_{m-1}$$

$$(Du_m) \times (Du_m) = q_{m-1}^2 + q_m^2.$$

La (18) può così essere scritta

$$(18)^* \quad Du_m = -q_{m-1} u_{m-1} + q_m u_{m+1},$$

dove q_{m-1} è definito dalla (16) e

$$(19) \quad q_m = |\sqrt{(Du_m) \times (Du_m) - q_{m-1}^2}| > 0.$$

(18)* con (19) definiscono anche il verso del versore u_{m+1} . Le equazioni (18)* e (19) confrontate con le (15) e (16), consentono di sostituire in queste ultime m ad $m-1$. Il procedimento di induzione è così esaurito; e da esso risulta che valgono fino ad $a = n-1$ le suddette formule (15) e (16), mentre per $a = n$ sussiste la (17)⁽²⁾.

6. Le (15) e (17) rappresentano così una forma ridotta dalle (8) in cui

$$\omega_{b+b+1} = -\omega_{b+1b} = q_b, \quad \omega_{b+b+s} = -\omega_{b+s b} = 0 \quad \left(\begin{matrix} b = 1, 2, \dots, n-1 \\ s \neq 1 \end{matrix} \right).$$

Dunque, le equazioni (7) danno la formula

$$\begin{aligned} \eta'_i + \sum_{j=1}^n \eta_j \omega_{ji} &= \eta'_i + \eta_{i-1} \omega_{i-1 i} + \eta_{i+1} \omega_{i+1 i} = \\ &= \eta'_i + q_{i-1} \eta_{i-1} - q_i \eta_{i+1} = 0 \quad \left(\begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ q_0 = q_n = 0 \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

(1) Vedi nota 1 nella pagina precedente.

(2) Vede anche D. J. STRUIK, *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie...* (Berlin 1922), p. 76.

che occorre dimostrare. Ne segue il teorema già accennato in principio, che giova specificare sotto la forma seguente:

Essendo dato il sistema (I) che ammette l'integrale I, possiamo ridurlo al sistema III coll' integrale J. Essendo $u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n}$ un sistema qualsiasi di n funzioni di t per cui

$$\sum_1^n (u_{1i})^2 = 1 \quad , \quad u'_{1i} + \sum_1^n u_{1j} r_{ji} \neq 0$$

la sostituzione ortogonale

$$y_j = \sum_1^n u_{ij} \eta_i$$

con

$$u_{fj} = \frac{1}{q_{f-1}} \left(u_{f-2j} q_{f-2} + u'_{f-1j} + \sum_1^n u_{f-1k} r_{kj} \right) \quad \left(\begin{matrix} f = 2, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{matrix} \right)$$

$$q_0 = 0$$

$$q_b = \left| \sqrt{\sum_1^n \left(u'_{bi} + \sum_1^n u_{bj} r_{ji} \right)^2} - q_{b-1}^2 \right| > 0 \quad \left(\begin{matrix} b = 1, \dots, n-1 \\ i, j = 1, \dots, n \end{matrix} \right)$$

riduce il sistema (III) alla forma canonica (II) se tutte le funzioni q_1, \dots, q_{n-1} risultano $\neq 0$ ⁽¹⁾.

Meccanica. — *Sur la stabilité trigonométrique de l'équilibre dans la Dynamique.* Nota di G. VRANCEANU, presentata ⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Les équations canoniques de la Dynamique (c'est-à-dire les équations des systèmes holonomes conservatifs), possèdent l'importante propriété suivante, démontrée par Poincaré ⁽³⁾ (en supposant que la fonction Hamiltonienne est développable en série convergente suivant les puissances d'un paramètre μ): Les solutions initialement voisines à un point d'équilibre stable de ces équations, peuvent être développées, au moins formellement, en séries trigonométriques, quand aucune relation de commensurabilité n'existe pas entre les périodes.

Dans un important mémoire, récemment paru ⁽⁴⁾, M. Birkhoff a donné une démonstration directe et a pris cette propriété comme une définition

(1) Mi propongo di indicare in una prossima Nota alcune applicazioni concernenti le equazioni del parallelismo (secondo LEVI-CIVITA).

(2) Nella seduta del 6 novembre 1927.

(3) Cfr. *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, vol. II, p. 17.

(4) *Stability and the equations of Dynamics*, « American Journal of Mathematics », vol. XLIX, n. 1, January, 1927.

d'une nouvelle stabilité, appelée « stabilité trigonométrique », en faisant voir que cette stabilité est plus complète que la « stabilité des perturbations ». M. Birkhoff a donné encore une forme normale à laquelle doivent se réduire, par une série des transformations, tous les systèmes différentiels ayant cette propriété et pour lesquels l'équation caractéristique a au plus une racine nulle.

Je me suis posé alors la question, si les systèmes non holonomes conservatifs, possèdent ou non la stabilité trigonométrique et je suis arrivé à résoudre ce problème dans la manière générale que voici :

Les solutions initialement voisines à un point d'équilibre des équations de la Dynamique des systèmes à liaisons indépendantes du temps (holonomes ou non holonomes, conservatifs ou non conservatifs), peuvent être développées, au moins formellement, en séries trigonométriques, en supposant que l'équation caractéristique (en dehors d'un nombre de racines nulles égal au nombre des relations non holonomes du système), a seulement des racines pures imaginaires, non commensurables entre elles. La méthode que j'ai suivie dans la démonstration, permet encore de mettre en évidence une forme très générale des équations, qui possèdent la même propriété.

Dans cette Note, je vais indiquer la démonstration pour le cas d'un système non holonome conservatif et pour simplifier, je considère en premier lieu le système non holonome le plus simple, c'est-à-dire du V^{me} ordre.

Soit x_1, x_2, x_3 , les trois coordonnées qui déterminent la position de notre système, liées par la relation non intégrable

$$(1) \quad \lambda_{3/1} dx_1 + \lambda_{3/2} dx_2 + \lambda_{3/3} dx_3 = 0.$$

On peut toujours considérer les $\lambda_{3/1}, \lambda_{3/2}, \lambda_{3/3}$, comme les moments d'une congruence (λ_3) dans l'espace métrique V_3 défini par

$$(2) \quad ds^2 = 2 T dt^2 = \sum_{i,j} a_{ij} dx_i dx_j,$$

où T est la force vive du système. En indiquant par $\lambda_i^i, \lambda_2^i (i = 1, 2, 3)$, les paramètres des deux congruences (λ_1), (λ_2) dans V_3 , orthogonales entre elles et à la congruence (λ_3), les 5 équations du premier ordre de notre système peuvent s'écrire (1)

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \lambda_1^i u_1 + \lambda_2^i u_2, & (i = 1, 2, 3) \\ \frac{du_h}{dt} = \sum_j \frac{dU}{dx_j} \lambda_h^j + \sum_{kl} \lambda_{hkl} u_k u_l, & (h = 1, 2) \end{cases}$$

(1) Voir ma Note, *Sopra le equazioni del moto di un sistema anolonomo*, « Rendiconti dell'Acc. dei Lincei », vol. IV, serie 6^a, 2^o sem., 1926, pp. 508-511.

où les u_i, u_2 sont les caractéristiques cinétiques du mouvement, les γ_{hkl} (coefficients de Ricci) sont des fonctions des x et U c'est le potentiel des forces.

On peut supposer que dans le point d'équilibre, choisi pour origine, la direction de l'axe x_3 soit tangente à la congruence (λ_3) . Les coordonnées x_1, x_2 peuvent être prises de façon que les termes du second ordre de la force vive T et du potentiel U reçoivent la forme normale⁽¹⁾ dans ces variables

$$(4) \quad \begin{cases} T = \frac{1}{2} \left[x_1'^2 + x_2'^2 + x_3' \sum_1^3 a_i x_i' \right] + \dots, \\ U = \frac{1}{2} \left[a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + x_3 \sum_1^3 c_i x_i \right] + \dots, \end{cases}$$

les termes non écrits étant au moins du troisième ordre. En supposant que les congruences $(\lambda_1), (\lambda_2)$ sont tangentes à l'origine aux axes x_1, x_2 , les équations (3) s'écrivent

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = u_i + \dots, & \frac{du_i}{dt} = a_i x_i + c_i x_3 + \dots, \quad (i = 1, 2) \\ \frac{dx_3}{dt} = 0 + \dots, \end{cases}$$

en mettant en évidence seulement les termes du premier ordre.

On trouve facilement que les racines de l'équation caractéristique sont: $0, \pm \sqrt{a_1}, \pm \sqrt{a_2}$. Dans le cas de l'équilibre stable, que nous avons en vue, les a_1, a_2 doivent être négatifs, c'est-à-dire de la forme $a_1 = -r_1^2, a_2 = -r_2^2$, et les racines de l'équation caractéristique seront

$$(6) \quad 0, \pm \sqrt{-1} r_1, \pm \sqrt{-1} r_2.$$

Il importe maintenant de changer les couples réels $(x_1 u_1), (x_2 u_2)$, dans les couples imaginaires conjugués $(\bar{x}_1 \bar{u}_1), (\bar{x}_2 \bar{u}_2)$, par les transformations linéaires

$$(7) \quad x_i = \bar{x}_i + u_i + \frac{c_i}{r_i^2} x_3, \quad u_i = \sqrt{-1} r_i (\bar{x}_i - \bar{u}_i), \quad (i = 1, 2).$$

de façon que les équations (5) reçoivent la forme

$$(5') \quad \frac{d\bar{x}_i}{dt} = \sqrt{-1} r_i \bar{x}_i, \quad \frac{d\bar{u}_i}{dt} = -\sqrt{-1} r_i \bar{u}_i, \quad \frac{dx_3}{dt} = 0.$$

En vertu de transformations (7), les seconds membres des équations (3), deviennent des fonctions de $\bar{x}_1, \bar{u}_1, \bar{x}_2, \bar{u}_2, \bar{x}_3$, avec les propriétés suivantes:

(1) Voir T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. II, parte I, pp. 453-456.

a) Les dérivées $\frac{dx_i}{dt}$ ($i = 1, 2, 3$) étant des fonctions impaires en u_1, u_2 auront seulement des coefficients imaginaires purs, parceque la dernière formule (7) seule introduit des imaginaires.

b) Les dérivées $\frac{du_i}{dt}$ ($i = 1, 2$) étant des fonctions paires en u_1, u_2 , auront seulement des coefficients réels.

Considérons maintenant les transformations inverses des (7)

$$(8) \quad \begin{cases} 2 \bar{x}_i = x_i - \frac{c_i}{r_i^2} x_3 - \frac{\sqrt{-1}}{r_i} u_i \\ 2 \bar{u}_i = x_i - \frac{c_i}{r_i^2} x_3 + \frac{\sqrt{-1}}{r_i} u_i \end{cases} \quad (i = 1, 2).$$

En dérivant ces relations par rapport à t et en tenant compte des propriétés a) et b), il résulte que:

I) Les dérivées $\frac{d\bar{x}_i}{dt}, \frac{d\bar{u}_i}{dt}$ ($i = 1, 2$) exprimées en fonction des $\bar{x}_1, \bar{u}_1, \bar{x}_2, \bar{u}_2, \bar{x}_3$, auront seulement des coefficients imaginaires.

II) La dérivée $\frac{dx_3}{dt}$ ne peut pas avoir des termes de la forme

$$(9) \quad A (\bar{x}_1 \bar{u}_1)^\alpha (\bar{x}_2 \bar{u}_2)^\beta x_3^\gamma,$$

quelque soit α, β, γ . En effet par la propriété a), A doit être pure imaginaire et en même temps il ne doit pas changer quand on change $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, c'est-à-dire $A = 0$.

Il est tout-à-fait évident que les propriétés I) et II) ne changent pas par des transformations de la forme

$$(10) \quad \bar{x}_i = y_i + F_i, \quad \bar{u}_i = v_i + G_i, \quad x_3 = y_3 + H, \quad (i = 1, 2)$$

où les F, G, H sont des fonctions des y_1, v_1, y_2, v_2, y_3 à coefficients réels, au moins du second degré et de plus F_i et G_i sont conjugués, c'est-à-dire se changent une dans l'autre par le changement de $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, où, ce qui est le même, quand y_i se permute avec v_i ($i = 1, 2$).

En effectuant une série des transformations de la forme (10), où les F, G, H sont des fonctions homogènes du second degré, puis du troisième degré, etc., on peut, dans le cas où les racines r_1, r_2 ne sont pas commensurables entre elles, se servir des coefficients indéterminés de ces transformations, de façon à éliminer dans les équations resultantes, tous les termes

du second degré, puis du troisième degré, etc., sauf les termes de la forme

$$(10') \quad A y_i (y_1 v_1)^{\alpha} (y_2 v_2)^{\beta} y_3^{\gamma} \quad , \quad B v_i (y_1 v_1)^{\alpha'} (y_2 v_2)^{\beta'} y_3^{\gamma'} ,$$

dans les dérivées $\frac{dy_i}{dt}$, $\frac{dv_i}{dt}$ respectivement (1).

En même temps, on ne peut pas éliminer de la dérivée $\frac{dy_3}{dt}$ les termes de la forme (9), mais dans notre cas nous avons vu qu'ils n'existent pas (pr. II). Par conséquent les équations (3) sont équivalentes au point de vue formel (c'est-à-dire que nous ne savons rien sur la convergence des séries employées), à un système d'équations de la forme

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = M_i y_i & , & \frac{dv_i}{dt} = N_i v_i , & (i = 1, 2) \\ \frac{dx_3}{dt} = 0 , \end{cases}$$

où M_i et N_i sont fonctions seulement des couples $(y_1 v_1)$, $(y_2 v_2)$ et de y_3 . De plus, dans notre cas, M_i et N_i étant en même temps conjugués et à coefficients purement imaginaires, il faut avoir $N_i = -M_i$ et les équations (11) prennent la forme

$$(12) \quad \frac{dy_i}{dt} = M_i y_i \quad , \quad \frac{dv_i}{dt} = -M_i v_i \quad , \quad \frac{dx_3}{dt} = 0 , \quad (i = 1, 2)$$

qui est précisément la forme demandée par M. Birkhoff pour la stabilité trigonométrique complète. En effet, on voit facilement que les équations (12) ont les intégrales formelles

$$(12') \quad y_1 v_1 = y_1^0 v_1^0 \quad , \quad y_2 v_2 = y_2^0 v_2^0 \quad , \quad y_3 = y_3^0 ,$$

$y_1^0, y_2^0, v_1^0, v_2^0, y_3^0$ étant des constantes et les quantités $(y_1^0 v_1^0), (y_2^0 v_2^0), y_3^0$ étant réelles. En vertu de ces intégrales les M_i deviennent des constantes purement imaginaires et le système (12) s'intègre par des expressions trigonométriques de la forme

$$(13) \quad \begin{cases} y_i = y_i^0 e^{M_i^{(0)}(t-t_0)} & , & v_i = v_i^0 e^{-M_i^{(0)}(t-t_0)} , & (i = 1, 2) \\ y_3 = y_3^0 . \end{cases}$$

En introduisant les valeurs (13) dans les séries qui expriment les x_i, u_i en fonction de y_i, v_i , on trouve les intégrales générales des équations

(1) Pour la légitimité de ces affirmations voir G. BIRKHOFF, mémoire déjà cité, pp. 16-28.

tions (3) comme fonctions trigonométriques du temps, avec les constants d'intégration $y_1^0, v_1^0, y_2^0, v_2^0, y_3^0$.

Passons maintenant au cas général. Soit un système conservatif quelconque défini par les n variables x_1, x_2, \dots, x_n , qui sont liées par les $n - m$ relations non complètement intégrables

$$(14) \quad \sum_i^n \lambda_{ki} dx_i = 0 \quad (k = m + 1, \dots, n).$$

On peut toujours considérer les λ_{ki} ($i = 1, 2, \dots, n$) comme les moments d'une certaine congruence (λ_k) , dans l'espace métrique v_n défini par

$$(14') \quad ds^2 = 2 T dt^2 = \sum_{ij}^n a_{ij} dx_i dx_j,$$

où T est la force vive du système. On peut supposer de plus que les congruences (λ_k) ($k = m + 1, \dots, n$) sont orthogonales entre elles. Les équations du mouvement de notre système ont la forme⁽¹⁾

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \sum_b^m \lambda_b^i u_b & (i = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{du_b}{dt} = \sum_j^n \frac{dU}{dx_i} \lambda_b^i + \sum_{kl}^m \gamma_{bkl} u_k u_l, & (b = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

où les u_1, u_2, \dots, u_m sont les caractéristiques cinétiques du mouvement, les λ_b^i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont les paramètres des m congruences (λ_b) ($b = 1, 2, \dots, m$) dans V_n , orthogonales entre elles, et aux congruences (λ_k) considérées plus haut, les γ_{bkl} sont les coefficients de Ricci relatifs aux (λ_b) et U c'est le potentiel des forces.

On peut toujours s'arranger de manière que dans le point d'équilibre, choisi pour origine, les axes des $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, soient tangentes aux congruences (λ_k) ($k = m + 1, \dots, n$). Les axes x_i ($i \leq m$) peuvent être pris comme des coordonnées normales dans l'origine et les congruences (λ_i) ($i \leq m$) tangentes à ces coordonnées normales. En supposant encore que l'équilibre est stable (en première approximation) le potentiel aura la forme

$$(16) \quad U = -\frac{1}{2} \sum_i^m r_i^2 x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_i^n x_i \sum_{m+1}^n c_{ij} x_j + \dots$$

et les équations (15) s'écrivent, en mettant en évidence seulement les termes du premier ordre

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = u_i + \dots, & \frac{du_i}{dt} = -r_i^2 x_i + \sum_{m+1}^n c_{ij} x_j + \dots, & (i = 1, 2, \dots, m) \\ \frac{dx_j}{dt} = 0 + \dots, & & (j = m + 1, \dots, n). \end{cases}$$

(1) Cfr. ma Note déjà citée.

L'équation caractéristique aura $n - m$ racines nulles et $2m$ racines de la forme $\pm \sqrt{-1} r_i (i = 1, 2, \dots, m)$.

Le changement de variables $x_i, u_i (i = 1, 2, \dots, m)$ dans les variables conjuguées \bar{x}_i, \bar{u}_i , se fait par des transformations de la forme (7) avec la seule différence qu'au lieu du terme $\frac{c_i}{r_i^2} x_i$ nous aurons la somme

$$(17') \quad \sum_{m+1}^n \frac{c_{ij}}{r_i^2} x_j.$$

Par conséquent avec les mêmes raisonnements que nous avons fait dans le cas du 5^{me} ordre, on peut considérer notre système, au bout d'une infinité de transformations, équivalant au système suivant

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = M_i y_i, & \frac{dv_i}{dt} = -M_i y_i, & (i = 1, 2, \dots, m) \\ \frac{dy_j}{dt} = 0, & & (j = m+1, \dots, n) \end{cases}$$

où M_i c'est une fonction des couples $(y_i v_i) (i = 1, 2, \dots, m)$ et des y_{m+1}, \dots, y_n , avec des coefficients purement imaginaires.

L'intégration de ce système par des séries trigonométriques est immédiate et par conséquent on peut dire la même chose pour le système (15).

Je veux remarquer que la possibilité de transformer les équations (15) dans la forme (18), provient du seul fait essentiel, que les dérivées $\frac{dx_i}{dt} (i \leq n)$ sont des fonctions impaires et les $\frac{dv_b}{dt} (b \leq m \leq n)$ sont des fonctions paires dans les variables n . Mais pour un système général ayant cette propriété, en particulier pour un système mécanique non conservatif, les transformations (7) ne sont pas aussi simples, parce que les couples ne sont plus séparés.

Il faut remarquer encore, que par le fait que la stabilité trigonométrique complète contient aussi la stabilité complète des perturbations, il résulte qu'une condition suffisante pour la dernière stabilité, est que le potentiel [formule (16)] soit maximum dans les variables $x_i (i \leq m)$ seulement. On peut se rendre compte directement de ce fait, en remarquant que les $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ (en vertu des relations non holonomes du système), sont autour de l'origine, au moins du second ordre⁽¹⁾, en comparaison avec les $x_i (i \leq m)$, c'est-à-dire que la seconde somme du potentiel [formule (16)], est au moins du troisième ordre, et par conséquent elle n'a pas aucune influence sur le signe du potentiel au voisinage de l'origine et le théorème de Dirichlet est applicable.

(1) Cfr. pour ce genre de raisonnement T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (raccolte dal dott. Enrico Persico), Roma, Stock, p. 215.

Idromeccanica. — *Moti lenti stazionari di veli liquidi viscosi.*
Nota di B. FINZI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

Consideriamo un velo liquido viscoso, adagiato su di una data superficie σ : vogliamo studiare quei moti stazionari del liquido stesso che si dicono « lenti »: quei moti — cioè — per cui si ritengono trascurabili i prodotti della velocità v per le sue derivate.

§ 1. — EQUAZIONI INDEFINITE.

Data la superficie σ su cui s'adagia il velo liquido, sia

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k$$

il quadrato del suo elemento lineare. Il vettore v è tangente a σ , e definito soltanto nei punti di σ . Esso è dunque un vettore superficiale, e, come tale, sarà definito dalle sue componenti covarianti $v_i(x_1, x_2)$ ($i = 1, 2$) ⁽²⁾.

Ricordiamo l'equazione vettoriale indefinita, relativa al moto lento stazionario di un fluido viscoso, di densità ρ , soggetto ad una rorza unitaria di massa F :

$$(2) \quad \rho F = \text{grad } \beta.$$

L'omografia β , nel caso di un liquido, è ⁽³⁾:

$$\beta = p - 2\mu \frac{dv}{dP} + \mu \text{rot } v \wedge,$$

dove p è la pressione, e μ il prodotto del coefficiente di viscosità per la densità, che (per un liquido) è costante. Con ciò la (2) diviene:

$$(2') \quad \rho F = \text{grad } p + \mu \text{rot}^2 v \quad (4).$$

Essendo nel nostro caso v vettore superficiale, potremo dedurre dalla (2') le equazioni indefinite del velo viscoso.

(1) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

(2) T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma, 1925, p. 113.

(3) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale*, II, Pavia, 1913, p. 29 e p. 62.

(4) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, loc. cit.: cfr. form. (8) a p. 63, e I, form. (2) p. 98.

Il rotore del vettore superficiale v sarà un vettore normale a σ , e di modulo uguale al valore assoluto di ω , essendo

$$(3) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)_{(1)}.$$

Il rotore del vettore (non superficiale) $\text{rot } v$ avrà per componenti covarianti nella metrica (I) ⁽²⁾:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(a_{11} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - a_{12} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right), \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(a_{12} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - a_{22} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right).$$

Ricordiamo che le componenti covarianti di grad p sono $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2$): la (2') sarà allora equivalente alle seguenti due equazioni indefinite:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu}{\sqrt{a}} \left(a_{11} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - a_{12} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right) = \rho F_1, \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\mu}{\sqrt{a}} \left(a_{12} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - a_{22} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right) = \rho F_2. \end{cases}$$

Per procedere oltre, è opportuno porre il ds^2 , definito dalla (I), sotto forma isoterma. Se $l^2 = \frac{1}{\Delta_1 x_1} = \frac{1}{\Delta_1 x_2}$, sarà ⁽³⁾:

$$(5) \quad ds^2 = l^2 (dx_1^2 + dx_2^2).$$

In tal caso la (3) diverrà:

$$(3') \quad \omega = \frac{1}{l^2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right);$$

e le (4) assumeranno la seguente forma semplice:

$$(4') \quad \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \rho F_1, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} - \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \rho F_2.$$

Ricordiamo che il velo è liquido, e quindi $\text{div } v = 0$, cioè ⁽⁴⁾

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{a} v^i) = 0.$$

(1) T. LEVI-CIVITA, loc. cit.: cfr. le ultime formule di § 9 a p. 183 e § 22 a p. 141.

(2) T. LEVI-CIVITA, loc. cit., ultima formula di § 9 a p. 183, ricordando il § 5 a p. III.

(3) L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, III ed., vol. I, p. 124.

(4) T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 176, form. 17''.

Riferendoci alla metrica (5), avremo:

$$(6) \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0.$$

Tenendo allora presente la (6), e ricordando la (3'), potremo dare alle (4') la seguente forma:

$$(4'') \quad \begin{cases} \mu \Delta_2 v_1 = \frac{\partial p}{\partial x_1} - \mu \omega \frac{\partial}{\partial x_2} \log l^2 - \rho F_1, \\ \mu \Delta_2 v_2 = \frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \omega \frac{\partial}{\partial x_1} \log l^2 - \rho F_2^{(1)}. \end{cases}$$

Le (4''), quando $l = 1$, coincidono con le equazioni di Stokes relative ai moti lenti piani⁽²⁾. Le (4'') possono dunque considerarsi la generalizzazione delle equazioni di Stokes nello studio di un moto lento su di una superficie qualunque.

§ 2. — FUNZIONE DI CORRENTE.

La (6) è certamente soddisfatta se si introduce una funzione ausiliaria ψ , tale che:

$$(7) \quad v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$$

In virtù della (3') sarà allora

$$(8) \quad \Delta_2 \psi = 0.$$

Dalle (7) si deducono alcune notevoli proprietà della funzione ψ .

Sia γ una linea di flusso: se \mathbf{n} è un vettore unitario tangente a σ e normale a γ , sarà, nei punti di γ , $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0$. Ricordiamo ora che le proiezioni ortogonali di \mathbf{v} sulle linee x_1 e x_2 sono (nella metrica (5)) $\frac{v_1}{l}$ e $\frac{v_2}{l}$. In più, se $d\gamma$ è l'elemento d'arco della linea di flusso γ , i coseni direttori di \mathbf{n} saranno $l \frac{dx_2}{d\gamma}$, $-l \frac{dx_1}{d\gamma}$. La condizione $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0$ si scriverà allora $v_1 \frac{dx_2}{d\gamma} - v_2 \frac{dx_1}{d\gamma} = 0$, ossia, ricordando le (7): $\frac{d\psi}{d\gamma} = 0$. Lungo una linea di flusso è dunque $\psi = \text{cost.}$ Questa proprietà giustifica il nome di funzione di corrente data alla ψ .

Consideriamo ora due linee di flusso γ' e γ'' . Sia ψ' il valore di ψ su γ' , ψ'' il valore di ψ su γ'' . Consideriamo una linea u di σ , che in-

(1) Si ricordi che, nella metrica (5), $\Delta_2 = \frac{1}{l^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)$.

(2) Cfr. ad es. C. W. OSEEN, *Hydrodynamik*, Leipzig, 1927, p. 21 e p. 29.

contra γ' in un punto A' , γ'' in A'' . Se \mathbf{n} rappresenta un vettore unitario tangente a σ e normale alla linea u , sarà

$$\int_{A' A''} \mathbf{v} \times \mathbf{n} du = - \int_{A' A''} \frac{d\psi}{du} du = \psi' - \psi''.$$

Il valore dell'integrale considerato non dipende dunque dal cammino percorso: esso, moltiplicato per la densità ρ , ci darà la portata q tra le due linee di flusso γ' e γ'' : sarà dunque $q = \rho(\psi' - \psi'')$.

Sia γ linea di flusso, e v il valore della velocità in un punto P di γ . Sarà (nella metrica (5))

$$v = \left| \frac{v_1}{l} \frac{dx_1}{d\gamma} + \frac{v_2}{l} \frac{dx_2}{d\gamma} \right|;$$

o anche, se dn è l'elemento di una linea di σ normale a γ in P :

$$v = \left| -v_1 \frac{dx_1}{dn} + v_2 \frac{dx_2}{dn} \right|.$$

Ricordando allora le (7), su γ sarà $v = \left| \frac{d\psi}{dn} \right|$. Le proprietà che furono constatate per la funzione ψ sono dunque identiche a quelle note nel caso piano. Il che non era manifesto *a priori*.

§ 3. - VELO VISCOSO PARZIALMENTE ADERENTE AD UNA SUPERFICIE RIGIDA.

Applichiamo le considerazioni ora svolte allo studio del moto di un velo liquido viscoso su di una superficie rigida, che consideriamo immobile. Se l'aderenza tra superficie e liquido è completa, il velo resterà immobile; se l'aderenza è parziale, il velo potrà scorrere sulla superficie, ma la superficie eserciterà sull'elemento $d\sigma$ una forza tangenziale $-knd\sigma$ (1). Se nessuna forza attiva agisce sul velo, la forza unitaria di massa \mathbf{F} avrà componenti tangenziali a σ coincidenti con quelle della forza $-\frac{k}{\rho} \mathbf{v}$. Le (4') diverranno allora, nel caso in esame

$$\frac{\partial x_1}{\partial p} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = -kv_1, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} - \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = -kv_2.$$

Ed introducendo la funzione di corrente, definita dalle (7), si avrà:

$$(9) \quad \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial}{\partial x_2} (\omega - k\psi) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} - \mu \frac{\partial}{\partial x_1} (\omega - k\psi) = 0.$$

Le (9) ci assicurano che $-p + i\mu(\omega - k\psi)$ è funzione di $x_1 + ix_2$, cioè funzione di variabile complessa su σ . Sarà allora p funzione armo-

(1) M. BRILLOUIN, *Leçons sur la viscosité*, 1^{ère} partie, Paris, 1907, n. 32, p. 43.

nica associata di $-\mu(\omega - k\psi)$, o, se si vuole (in virtù della (8)), di $-\mu(\Delta_2\psi - k\psi)$. Dunque $\Delta_2(\omega - k\psi) = 0$, $\Delta_2 p = 0$. La prima di queste relazioni può anche scriversi, per la (8), così:

$$\Delta_2 \omega = k\omega;$$

oppure, se $\Delta_4 = \Delta_2 \Delta_2$,

$$(10) \quad \Delta_4 \psi = k\Delta_2 \psi.$$

Indicando con $\bar{\Delta}_2$ l'operatore $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, la (10) si scriverà:

$$\bar{\Delta}_2 \frac{1}{\bar{\Delta}_2} \bar{\Delta}_2 \psi = k \bar{\Delta}_2 \psi.$$

Essa è dunque un'equazione differenziale, lineare del quarto ordine, e, manifestamente, di tipo totalmente ellittico ⁽¹⁾. Dall'integrazione di questa equazione dipende dunque la soluzione del nostro problema.

§ 4. - VELO VISCOSO NON ADERENTE ALLA SUPERFICIE RIGIDA.

Consideriamo il caso particolare $k = 0$: in tal caso il velo scorre sulla superficie rigida senza alcuna aderenza alla superficie stessa.

Allora $-p + i\mu\omega$ è funzione di variabile complessa su σ , e quindi p è armonica associata di $-\mu\omega$. Sarà dunque

$$\Delta_2 p = 0, \Delta_2 \omega = 0; \quad \text{ossia} \quad \Delta_4 \psi = 0.$$

La funzione ausiliaria ψ è dunque biarmonica sulla superficie ⁽²⁾. Nota questa funzione sarà noto (in virtù delle (7)) il moto del velo, e la pressione p , armonica associata (in virtù della (8)) di $-\mu\Delta_2\psi$.

§ 5. - CONDIZIONI AL CONTORNO.

Il contorno del velo liquido sarà formato da linee di flusso, su ciascuna delle quali, dunque, $\psi = \text{cost}$. In più se si suppone completa l'adesione al contorno, sarà noto al contorno v , e quindi $\frac{d\psi}{dn}$ ⁽³⁾. Nel caso elementare

(1) Cfr. E. E. LEVI, *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, «Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)», serie 3^a, t. XVI.

(2) B. FINZI, *Funzioni biarmoniche sopra una superficie*, questi «Rend.», vol. VI, 2° sem. 1927. È opportuno il raffronto tra il problema in esame ed il problema della deformazione di un velo elastico (B. FINZI, *Sui veli elastici*, Memoria di prossima pubblicazione negli «Annali di Matematica pura ed applicata»).

(3) Non si incontrerebbe nessuna difficoltà tenendo conto di una aderenza parziale al contorno (cfr. M. BRILLOUIN, loc. cit., p. 43 e p. 44).

$k = 0$, la funzione ψ , biarmonica sulla superficie, risulta univocamente determinata⁽¹⁾, e la sua costruzione effettiva dipende dalla conoscenza di una funzione biarmonica, che ha la stessa definizione, e compie, nel problema in esame, lo stesso ufficio della seconda funzione di Green relativa al piano⁽²⁾.

Nel caso generale $k \neq 0$, noti al contorno ψ e $\frac{d\psi}{dn}$, saranno note al contorno le derivate parziali prime di ψ rispetto ad x_1 e x_2 . Unica sarà quindi la soluzione della (10)⁽³⁾.

Si supponga ora di conoscere al contorno p , in luogo di v . Poichè p è funzione armonica, sarà ovunque noto p , e quindi la sua armonica associata $-\mu(\Delta_2\psi - k\psi)$. Nel caso elementare ($k = 0$) sarà allora noto ovunque $\Delta_2\psi$. Il problema è quindi ricondotto alla determinazione della biarmonica ψ , conoscendo al contorno ψ e ovunque $\Delta_2\psi$ ⁽⁴⁾. Nel caso generale ($k \neq 0$), sarà ovunque noto $\Delta_2\psi - k\psi$, e ancora quindi la conoscenza di ψ al contorno determinerà univocamente ψ ⁽⁵⁾.

§ 6. - SFORZI.

È noto che l'omografia β degli sforzi, in seno ad un fluido viscoso, è uguale alla pressione p più l'omografia degli sforzi elastici, purchè si sostituisca in questa al vettore spostamento elastico il vettore v . Ma Ricci determinò il tensore che caratterizza gli sforzi elastici, ed io ne feci applicazione al caso in cui lo spostamento elastico è un vettore superficiale, e la metrica è definita dalla (5)⁽⁶⁾. Ricordando allora che nel caso in esame $\text{div } v = 0$, il tensore che caratterizza gli sforzi in un velo liquido viscoso avrà, nella metrica (5), la seguente espressione:

$$(11) \quad \begin{cases} \Gamma_{11} = l^2 p - 2\mu v_{11}, & \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = -\mu(v_{12} + v_{21}), \\ \Gamma_{22} = l^2 p - 2\mu v_{22}, & \end{cases}$$

In queste formule v_{ik} rappresenta la derivata covariante di v_i .

Noto Γ_{ik} ($i, k = 1, 2$), potremo calcolare la reazione normale opposta dal vincolo. Il prof. CALDONAZZO⁽⁷⁾ determinò la componente normale, σ ,

(1) B. FINZI, loc. primo cit.,

(2) B. FINZI, loc. primo cit.

(3) E. E. LEVI, loc. cit.

(4) Cfr. B. FINZI, loc. primo cit.

(5) Nel caso in esame sono noti i valori al contorno di una funzione ψ , soluzione dell'equazione lineare, a derivate parziali, di secondo ordine:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = A(x_1, x_2)\psi + B(x_1, x_2).$$

(6) B. FINZI, loc. secondo cit., § 3.

(7) B. CALDONAZZO, *Sulla meccanica della superficie*, « *Monitore Tecnico* », n. 1, 2 (1920).

della forza unitaria che si esercita su di un velo flessibile qualsiasi. Se R_1 e R_2 sono i raggi di curvatura normali delle linee coordinate, se $\frac{1}{\tau}$ è la torsione, e T_{ik} le caratteristiche di tensione, risulta ⁽¹⁾:

$$-\mathcal{S} = \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} + 2 \frac{T_{12}}{\tau}.$$

Ma $\Gamma_{ik} = \rho T_{ik}$. Se quindi

$$\sum_{i,k} c_{ik} dx_i dx_k$$

è la seconda forma differenziale quadratica, relativa alla superficie σ , sarà ⁽²⁾

$$(12) \quad \mathcal{S} = \frac{1}{l^2} \sum_{i,k} \Gamma_{ik} c_{ik}.$$

Questa formula risolve il problema proposto. In particolare, affinché un velo liquido viscoso sia libero sarà necessario che $\mathcal{S} = 0$, ossia

$$(13) \quad \sum_{i,k} \Gamma_{ik} c_{ik} = 0.$$

La (13) è identicamente soddisfatta se il velo è piano. In generale essa stabilisce un legame tra gli sforzi che si esercitano in seno al velo liquido libero, e gli elementi geometrici relativi alla superficie secondo cui s'atteggia il velo stesso.

Dalle considerazioni fino ad ora svolte si deduce che il moto lento, stazionario di un velo liquido viscoso dipende soltanto dalle condizioni al contorno e dalla prima forma differenziale quadratica, che definisce la metrica del velo ⁽³⁾. A parità di condizioni al contorno, il moto di un velo sarà dunque lo stesso su due superficie applicabili l'una su l'altra. In particolare, il moto di un velo viscoso su di una sviluppabile sarà identico al moto di un velo piano ⁽⁴⁾, che ubbidisca — ben si intende — alle stesse condizioni al contorno.

(1) B. CALDONAZZO, loc. cit., form. (9). Si ricordi che nel moto lento stazionario, l'accelerazione $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ deve essere trascurata.

(2) Cfr. L. BIANCHI, loc. cit., cap. VI, form. (29).

(3) Soltanto la reazione normale opposta dal vincolo dipende dalla seconda forma differenziale quadratica, non il moto del velo, e neppure gli sforzi che si esercitano in seno al velo.

(4) Nel caso elementare ($k=0$) il moto di un velo piano coincide con un moto piano, in assenza di forze di massa (cfr. ad es. C. W. OSGOOD, loc. cit.). Nel caso generale ($k \neq 0$) la determinazione del moto dipende dall'integrazione delle equazioni differenziali a derivate parziali (10): di un'equazione cioè lineare del quarto ordine, con, nel caso particolare, a coefficienti costanti.

Meccanica. — *Dipendenza funzionale dal contorno del tensore di Green-Somigliana per le equazioni dell'elasticità.* Nota di G. KRALL, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. — Premessa l'esistenza, fondata sulle ricerche di Somigliana, Lauricella e Fredholm ⁽²⁾, d'un certo tensore di cui l'ufficio per le equazioni dell'elasticità corrisponda a quello dell'ordinaria funzione di Green per le equazioni differenziali scalari, qui miriamo a caratterizzare, sia pur nello stretto ambito delle variazioni infinitesime, la dipendenza funzionale che intercede tra detto tensore ed il contorno del campo cui esso corrisponde.

Sia S tale campo, σ il suo contorno a *curvature finite*, Λ un triedro di assi cartesiani x_i , ($i = 1, 2, 3$). Con riferimento ad esso, indichi $u^i = u^i(P)$ lo spostamento in un generico punto P di S :

$$e^{ik} = e^{ki} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_k} + \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \right) \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

la deformazione in detto punto. Ad essa colleghiamo lo sforzo $\Phi_{ik} = \Phi_{ik}(P)$ pel tramite della forma quadratica *definita e negativa* nelle e^{ik} ,

$$(1) \quad W = \frac{1}{2} \sum_{ik,rs} c_{ik,rs} e^{ik} e^{rs}, \quad (c_{ik,rs} = c_{rs,ik} = \text{cost. d'elasticità})$$

secondo la relazione ben nota, $\Phi_{ik} = \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}$.

Per tali specificazioni, se con ρF_i (ρ = densità specifica) si denotano le forze che cimentano il sistema, le equazioni dell'equilibrio assumono la forma

$$(2) \quad \sum_k \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial x_k} = \rho F_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

con le condizioni al contorno

$$(3a) \quad \Phi_{ijn} = \sum_k \Phi_{ik} \cos(n x_k) = \varphi_i \quad \text{oppure} \quad (3b) \quad u_i = U_i$$

a seconda che, in superficie, sono assegnati (*Problema a*) gli sforzi φ_i agenti sui singoli elementi superficiali o (*Problema b*) gli spostamenti U_i dei medesimi.

(1) Nella seduta del 6 novembre 1927.

(2) A. E. H. LOVE, *Treatise on mathematical theory of elasticity* [4^a ed., Cambridge University Press, 1927]. Cap. X, art. 163.

Per risolvere il *problema a)*, considerati due punti generici P_1 e P_2 di S , si applichi in P_2 una forza agente nella direzione di x_j . Indi, dopo averla equilibrata con una forza eguale ad opposta applicata in un punto ausiliario A di S e con una coppia opposta a quella formata dalle due forze, sfruttiamo per la ricerca degli spostamenti gli integrali particolari di Somigliana e Fredholm. Sieno $s^{ij} = s^{ij}(P_1, P_2)$ detti spostamenti in P_1 , $\varphi_{i,n}^j = \varphi_{i,n}^j(P_1, P_2)$ gli sforzi in superficie. Poi, si immaginino applicati in superficie sforzi eguali e contrari a quelli ora definiti e, sia $s_2^{ij} = s_2^{ij}(P_1, P_2)$ lo spostamento che, in condizioni di equilibrio, essi determinano in P_1 .

Una ovvia applicazione del teorema di Betti ai carichi e spostamenti sopranominati, attesa s'intende l'equilibratezza del sistema cimentante, dà, ove con adeguata e lecita sovrapposizione d'uno spostamento rigido si annulli lo spostamento in A e si ponga $S^{ij} = s_1^{ij} + s_2^{ij}$,

$$(4) \quad u^i(P_1) = \sum_j \int_S S^{ij}(P_1, P_2) \rho(P_2) F_j(P_2) dS_2 + \sum_j \int_S S^{ij}(P_1, P_2) \varphi_j(P_2) d\sigma_2.$$

Com'è facile riconoscere, un siffatto tensore soddisfa; α) eccezione fatta per le coincidenze $P_1 = P_2$, $P_1 = A$, alle equazioni

$$(5) \quad \sum_k \frac{\partial \Phi_{ik}^j}{\partial x_k} = 0, \quad (i = 1, 2, 3);$$

nelle quali, posto con significato ovvio

$$(6) \quad e^{ik/lj} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S^{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial S^{kj}}{\partial x_i} \right),$$

si à $\Phi_{ik}^j = \frac{\partial W^{lj}}{\partial e^{ik/lj}}$, essendo la funzione W^{lj} ricavata per $i = l$ dalla forma

$$(7) \quad W^{lj} = \frac{1}{2} \sum_{ik,rs} \epsilon_{ik,rs} e^{ik/lj} e^{rs/l}.$$

β) Dà luogo a sforzi $\Phi_{i,n}^j$ nulli in superficie e, γ) soddisfa infine alle condizioni di simmetria

$$(8) \quad S^{ij}(P_1, P_2) = S^{ji}(P_2, P_1), \quad S^{ii}(P_1, P_2) = S^{ii}(P_2, P_1).$$

Per quanto concerne il *problema b)*, criteri algoritmici analoghi portano per lo spostamento $u^i = u^i(P_1)$ all'espressione

$$(9) \quad u^i(P_1) = \sum_j \int_S S^{ij}(P_1, P_2) \rho(P_2) F_j(P_2) dS_2 - \sum_j \int_S \Phi_{i,n}^j(P_1, P_2) U_j(P_2) d\sigma_2,$$

nella quale, il tensore $S^{ij} = S^{ij}(P_1, P_2)$ soddisfa pur esso, salvo nella coincidenza $P_1 = P_2$ (dove possiede quella singolarità che spetta ad una solleci-

tazione puntuale) alle equazioni (5); da luogo a *spostamenti nulli* in superficie ed è simmetrico come il tensore dianzi definito.

§ 2. - Ciò posto, consideriamo, vicinissimo a σ , un contorno $\bar{\sigma}$ di cui l'equazione vettoriale per un generico punto \bar{P} scriviamo nella forma

$$(10) \quad \bar{P} = P + \zeta(P) \mathbf{n},$$

$\zeta = \zeta(P)$ essendo una funzione — *infinitesima con le prime derivate* — dei punti P di σ .

Riferendoci al *problema a)*, indichiamo con $\bar{S}^{ij} = \bar{S}^{ij}(P_1, P_2)$ il corrispondente tensore e, onde pervenire alla sua valutazione sfruttando la nozione del tensore S^{ij} relativo a σ , consideriamo unitamente ai punti P_1 e P_2 un terzo punto P di S . Indi, considerati i tensori

$$\bar{S}^{ii} = \bar{S}^{ii}(P_2, P) \quad , \quad S^{ii} = S^{ii}(P_1, P) \quad (i, j = 1, 2, 3;)$$

applichiamo il teorema di Betti a questi spostamenti ed ai carichi cui, per le definizioni date, essi corrispondono.

Ove si osservi che, ammesso per un momento $\bar{\sigma}$ tutto interno a σ , valgono le (5) per \bar{S}^{ii} come per S^{ii} ; tenuto debito atto delle specificazioni β) e γ) e ritenuto infine il divario $\delta S^{ij}(P_2, P_1) = \bar{S}^{ij}(P_2, P_1) - S^{ij}(P_2, P_1)$ piccolo dell'ordine di ζ (*postulato di continuità*), annullando lo spostamento di A con la sovrapposizione d'uno spostamento rigido del corpo, otteniamo, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore ad uno (che indichiamo con \dots),

$$(11) \quad \delta S^{ij}(P_2, P_1) = - \sum_i \int_{\bar{\sigma}} S^{ii}(P_2, P) \Phi_{i/n}^j(P_1, \bar{P}) d\sigma + \dots$$

§ 3. - Per valutare lo sforzo $\Phi_{i/n}^j(P_1, \bar{P})$ dobbiamo premettere il calcolo dei coseni direttori della normale interna \mathbf{n} . All'uopo consideriamo, steso su σ , un sistema di coordinate curvilinee ξ_1, ξ_2 attribuenti al quadrato dell'elemento lineare della superficie la forma

$$(12) \quad ds^2 = H_1^2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1^2 + H_2^2(\xi_1, \xi_2) d\xi_2^2,$$

le H_1^2, H_2^2 essendo funzioni regolari (cioè continue e derivabili quanto occorre) delle ξ_1, ξ_2 . Indi, da un punto P di σ spicchiamo due vettori unitari $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ tangenti alle linee coordinate (passanti per P) e costituenti quindi assieme con la normale \mathbf{n} un triedro Λ' di cui le coordinate cartesiane saranno indifferentemente indicate con $x_{1'}$ o $x'_{1'}$. Contrassegnando, ove occorra

per maggior evidenza, con x'_α le coordinate contate su t_1 e t_2 ($\alpha = 1, 2$;) avremo

$$t_\alpha = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial P}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial P}{\partial x'_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2;)$$

e quindi in conformità,

$$n = t_1 \wedge t_2 = \left[\text{mod} \left(\frac{\partial P}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial P}{\partial \xi_2} \right) \right]^{-1} \frac{\partial P}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial P}{\partial \xi_2}.$$

Sostituendo poi al punto P il punto \dot{P} della relazione (10), risulta un vettore \dot{n} (la normale a $\dot{\sigma}$) che proiettato su Λ da senz'altro,

$$\cos(\widehat{nx_k}) = \cos(\widehat{n\dot{x}_k}) - \sum_{\alpha} \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_\alpha} \cos(x'_\alpha x_k) + \dots$$

Si ottiene perciò con facilità,

$$\Phi_{i,n}(P_1, \dot{P}) = - \sum_{\alpha} \sum_k \Phi_{ik}^i(P_1, P) \frac{\partial \zeta(P)}{\partial x'_\alpha} \cos(\widehat{x'_\alpha x_k}) + \frac{d\Phi_{i/n}(P_1, P)}{dn} \zeta(P) + \dots$$

e, conseguentemente, omettendo per brevità formale la scrittura dei punti P_1, P_2 e P , al posto della (11),

$$(12) \quad \delta S^i(P_2, P_1) = \sum_{ik} \sum_{\alpha} \int_{\sigma} S^{ik} \Phi_{ik}^i \frac{\partial \zeta}{\partial x'_\alpha} \cos(\widehat{x'_\alpha x_k}) d\sigma - \sum_i \int_{\sigma} S^i \frac{\partial \Phi_{i/n}^i}{\partial x'_i} \zeta d\sigma + \dots$$

Onde ottenere una forma simmetrica [in conformità con le (8)] e più concisa, in cui in primo luogo non compaiano le derivate della ζ , poniamo nel primo integrale I della (12),

$$\Psi_k = \sum_i S^{ik} \Phi_{ik}^i.$$

Avuto riguardo alle eguaglianze $dx'_\alpha = H_\alpha d\xi_\alpha$, $\cos(\widehat{x'_\alpha x_k}) = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_\alpha}$, otteniamo allora

$$(13) \quad I = \sum_{ik} \sum_{\alpha} \int_{\sigma} \Psi_k \cos(\widehat{x'_\alpha x_k}) \frac{\partial \zeta}{\partial x'_\alpha} d\sigma = \sum_{\alpha} \int_{\sigma} H_\alpha^{-2} B_{\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_\alpha} d\sigma$$

essendo

$$B_{\alpha} = \sum_k \Psi_k \frac{\partial x_k}{\partial \xi_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2;).$$

Introducendo poi il tensore contravariante $B^{\beta} = \sum_{\alpha} a^{\alpha\beta} B_{\alpha}$, ($\beta = 1, 2$;) ,

con $a^{\alpha\beta}$ eguale all'elemento reciproco generico del discriminante a del nostro ds^2 , otteniamo subito

$$I = \sum_{\alpha} \int_{\sigma} H_{\alpha}^{-2} B_{\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_{\alpha}} d\sigma = \int_{\sigma} \sum_{\alpha} \sqrt{a}^{-1} B_{\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_{\alpha}} d\xi_1 d\xi_2$$

e quindi, integrando per parti sfruttando il lemma di Green nella forma metrica del Beltrami, tenuto conto che, per esser chiusa la σ , scompaiono i termini al contorno, risulta infine

$$I = - \int_{\sigma} \zeta \sum_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial (V \sqrt{a} B_{\alpha})}{\partial \xi_{\alpha}} d\sigma.$$

Per l'ovvio carattere invariantivo della funzione integranda (la *divergenza* di B^{α}), passando ad esprimerla nell'intorno di P con le coordinate x'_k riferite a Λ' , preso atto che, avendosi (in quest'intorno) $ds^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2$ e quindi $a = 1$, ed è pur legittimo riportare a detto triedro tutti gli indici *saturati*, otteniamo, tenendo presente che $\Phi_{i',k'} = 0$ per $k' = 3$,

$$\delta S^{ij}(P_2, P_1) = - \int_{\sigma} \zeta \sum_{i',k'} \Phi_{i',k'} \frac{\partial S^{i'j'}}{\partial x_{k'}} d\sigma + \int_{\sigma} \zeta \sum_{i'} S^{i'j'} \sum_{k'} \frac{\partial \Phi_{i',k'}}{\partial x_{k'}} d\sigma + \dots$$

Per la nozione dell'invariante annullarsi di *tutte* le componenti di un tensore sarà nullo l'ultimo integrale, mentre il primo, ove si ritorni alle coordinate di Λ e si ricordino le definizioni del § 1, si riduce alla forma espressiva e simmetrica

$$(14) \quad \delta S^{ij}(P_2, P_1) = \delta S^{ji}(P_1, P_2) = - \int_{\sigma} \zeta \sum_{i,k,r,s} c_{ik,rs} e^{ikij}(P_1, P) e^{rsij}(P_2, P) d\sigma + \dots$$

Che tale relazione poi, sia valida, salvo a contare la ζ con segno *negativo*, anche per σ esterno a σ è chiaro. Basta considerare un contorno σ^* involgente σ e σ^* ed esplicitare — indicando con \check{S}^{ij} il tensore corrispondente — (pel tramite di essa) l'identità $\delta S^{ij} = (\check{S}^{ij} - S^{ij}) - (\check{S}^{ji} - S^{ji})$.

Considerando infine il tensore del *problema b)*, procedendo in modo analogo, si trova senza difficoltà una espressione che, salvo il segno mutato, coincide nell'aspetto formale con la (14).

Merita rilevare a titolo conclusivo che, siffatta formola variazionale costituisce la generalizzazione d'una espressione ben nota assegnata da Hadamard per la variazione dell'ordinaria funzione di Green. E, come quella costituisce, per le ricerche di P. Lévy, il punto di partenza d'un algoritmo funzionale per la costruzione della funzione suddetta, la (14) vi può corrispondere negli uffici, nell'ambito dei tensori di Somigliana.

Per quanto concerne più immediate applicazioni in teoria delle oscillazioni, si potrà eventualmente riferire in una prossima Nota.

Geometria. — *Su certi gruppi infiniti del Lie, connessi alla teoria delle algebre ed al calcolo differenziale assoluto.* Nota di G. ANDREOLI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

È ben noto come il Sannia, per la geometria dei reticolati piani, abbia introdotto un « Calcolo differenziale semiassoluto ».

In sostanza, esso è un calcolo differenziale assoluto legato ad un particolare gruppo infinito di Lie.

Preso tale punto di partenza, riesce ovvio l'estendere i processi del calcolo differenziale assoluto ad altri tipi di gruppi infiniti del Lie; ed è ciò che abbiamo fatto in una Memoria di prossima pubblicazione ⁽²⁾.

Tuttavia, non è senza interesse notare che:

I. Ad ogni algebra è legato un gruppo infinito del Lie.

II. Ad ognuno di tali gruppi ⁽³⁾, può collegarsi un calcolo differenziale assoluto, atto a studiare direttamente le proprietà geometriche connesse a tale gruppo (e quindi a tale algebra per via indiretta).

Ed è precisamente questo lo scopo di questa breve Nota; in essa è dato maggior rilievo alla prima che non alla seconda proprietà.

In effetti, tutto lo sviluppo della II, — sol che si abbia presente la I, e la Memoria che svolge i casi particolari già detti — riesce ben agevole.

Ci permettiamo pertanto di richiamare la nostra attenzione proprio sulla prima delle due indicate.

Per breve ricordo, osserviamo che il calcolo semiassoluto del Sannia si riferisce ai gruppi infiniti del tipo

$$x'_1 = \varphi(x_1) \quad , \quad x'_2 = \psi(x_2);$$

mentre quelli da noi svolti nella indicata Memoria, e formanti la base di ogni ulteriore sviluppo in tal senso, si ottengono alternando i due processi relativi ai seguenti gruppi infiniti del Lie:

- I. $x'_{1,1} = \varphi_{1,1}(x_{1,1} \dots x_{1,n}), \dots x'_{1,n} = \varphi_{1,n}(x_{1,1} \dots x_{1,n});$
 $x'_{2,1} = \varphi_{2,1}(x_{2,1} \dots x_{2,r}), \dots x'_{2,r} = \varphi_{2,r}(x_{2,1} \dots x_{2,r}), \dots$
 $\dots \dots \dots$
- II. $x'_1 = \alpha(x_1) \quad ; \quad x'_2 = \beta(x_1, x_2) \quad ; \quad \dots x'_h = \gamma(x_1, x_2 \dots x_h).$

(1) Nella seduta del 20 novembre 1927.

(2) V. G. ANDREOLI, *Sul calcolo differenziale assoluto legato a certe algebre*, di prossima pubblicazione nel « Giorn. Mat. Battaglini », (Napoli).

(3) In essi rientra quello della geometria conforme, come vedremo oltre.

1. Sia assegnata un'algebra A , interpretabile come algebra di matrici di ordine r ; di cui cioè l'elemento generico si possa segnare:

$$A \equiv a_1 M_1 + a_2 M_2 + \dots + a_n M_n$$

ove sia,

$$M_v \equiv \left\| \begin{matrix} m_{11}^{(v)} & \dots & m_{1r}^{(v)} \\ m_{r1}^{(v)} & \dots & m_{rr}^{(v)} \end{matrix} \right\|.$$

Diremo che un complesso di r funzioni $y_1 \dots y_r$ delle x variabili $x_1 \dots x_r$ « appartiene » all'algebra A rispetto all'interpretazione $M^{(1)}$, se scritto l'Jacobiano:

$$\frac{\partial((y))}{\partial((x))} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)}$$

si verifica che esistono n funzioni $a_1 \dots a_n$ delle $x_1 \dots x_n$, tali che

$$\left\| \frac{\partial((y))}{\partial((x))} \right\| = A.$$

Ciò equivale a dire che

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = a_1 m_{ij}^{(1)} + a_2 m_{ij}^{(2)} + \dots + a_n m_{ij}^{(n)}. \quad (i, j = 1, \dots, r)$$

2. Date adesso

$$[z] \equiv [y] \text{ Mod } M$$

e

$$[y] \equiv [x] \text{ Mod } M$$

ne segue subito che vale anche

Teorema fondamentale:

$$[z] \equiv [x] \text{ Mod } M:$$

cioè, « se le z come funzioni delle y ; e le y come funzioni delle x appartengono all'algebra A (secondo l'interpretazione M) lo stesso avverrà per le z considerate come funzioni di x .

In effetti, la

$$[z] \equiv [y] \text{ Mod } M$$

equivale a porre:

$$\left\| \frac{\partial((z))}{\partial((y))} \right\| = a_1 M_1 + a_2 M_2 + \dots + a_n M_n$$

(1) Segneremo

$$[y] \equiv [x] \text{ Mod } M.$$

è similmente

$$[y] \equiv [x] \text{ Mod } M$$

equivale a:

$$\left\| \frac{\partial((y))}{\partial((x))} \right\| = b_1 M_1 + \dots + b_n M_n.$$

Ma, intanto

$$\left\| \frac{\partial((z))}{\partial((x))} \right\| = \left\| \frac{\partial((z))}{\partial((y))} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial((y))}{\partial((x))} \right\|$$

quindi, avremo:

$$\left\| \frac{\partial((z))}{\partial((x))} \right\| = (a_1 M_1 + \dots + a_n M_n) (b_1 M_1 + \dots + b_n M_n).$$

E, siccome le M interpretano l'algebra A sarà

$$\left\| \frac{\partial((z))}{\partial((x))} \right\| = c_1 M_1 + \dots + c_n M_n$$

ove le c si deducono quali combinazioni lineari delle a, b e delle costanti γ di moltiplicazione di A .

Resta quindi dimostrato l'asserto.

3. Pertanto vale il:

II Teorema. *Tutte le r^{ble} funzioni appartenenti ad M formano gruppo infinito del Lie.* (Qui intendiamo alquanto esteso l'ordinario concetto di gruppo, potendo anche mancare la trasformazione inversa di una data).

Reciprocamente vale il

III Teorema. *Assegnata un'interpretazione M dell'algebra A , esiste sempre un gruppo infinito generalizzato del Lie, ad essa appartenente.*

In effetti, le condizioni perchè ciò avvenga si riducono semplicemente a:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = a_1 m_{ij}^{(1)} + \dots + a_n m_{ij}^{(n)}$$

Scrivendo $n + 1$ qualunque di tali relazioni, si deduce che le a si possono eliminare, ponendosi eguale a zero il determinante delle m e delle derivate; ciò implica che le y soddisfanno ad equazioni del tipo:

$$F \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + G \frac{\partial y_b}{\partial x_k} + \dots + H \frac{\partial y_p}{\partial x_q} = 0$$

ove le F, \dots sono certi determinanti di ordine n formati con le m ; e ogni relazione scritta contenga n termini

Pertanto le y si presentano come soluzioni di equazioni a derivate parziali ed a coefficienti costanti.

Che tali soluzioni esistano, si vede subito per poco che alle y si imponga la condizione di essere funzioni lineari intere.

4. Un esempio tipico di tali gruppi del Lie, si presenta subito interpretando l'algebra complessa ordinaria, come matrici di secondo ordine.

In tal caso sarà

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$$

la matrice generica; quindi

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = a \quad ; \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = b \quad ; \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -b \quad ; \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = a .$$

Le equazioni differenziali che si trovano sono quelle ben note

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0 .$$

E quindi il gruppo infinito del Lie è quello delle trasformazioni conformi attaccate alle variabili complesse.

$$y_1 + i y_2 = \varphi(x_1 + x_2) .$$

5. È ovvio che ad ognuno di tali gruppi del Lie siano attaccate particolari «geometrie» (legate ad ipermetriche anzichè a metriche, nel caso generale).

Quindi vi saranno da studiare e fissare proprietà geometriche invarianti rispetto a tali gruppi.

Orbene, ad ognuno di essi, si può adattare uno speciale tipo di calcolo differenziale assoluto, adatto appunto a studiare tali proprietà.

In alcuni casi particolari⁽¹⁾ abbiamo già svolto con molto maggior numero di dettagli tale teoria: che ora accenniamo nel caso generale.

6. *Leggi di covarianza*. Nell'ordinario calcolo differenziale assoluto si parte come legge di covarianza da quella di trasformazione delle derivate di una funzione o da quella del differenziale di una variabile - per un sistema semplice.

Ciò equivale in sostanza ad assumere quale legge di covarianza quella degli elementi dello jacobiano, osservando che sostanzialmente le leggi sono le stesse a qualunque linea si abbia riferimento, e come controvarianza quello dei complementi algebrici di una linea.

Orbene - se teniamo presenti le relazioni intercorrenti fra gli jacobiani relativi al gruppo considerato, può darsi che esistano, sostanzialmente p leggi di covarianza distinte: nel senso che esistono p funzioni di cui il modo di

(1) Cfr. G. ANDREOLI, loc. cit.

trasformarsi delle derivate parziali (tenuto conto delle già dette relazioni) sia essenzialmente diverso. Diremo allora di avere ρ leggi distinte di covarianza.

Nel caso ordinario $\rho = 1$; nel primo caso da noi trattato altrove ρ è eguale al numero di gruppi di variabili separate.

In generale un sistema si dirà covariante *semplice* di I, II, III ... ρ^{esimo} tipo se segue la I, II ... ρ^{esima} legge di covarianza.

Un sistema si dirà covariante m^{plo} di tipo v^{esimo} , se si comporta nelle sue trasformazioni, come il prodotto di m sistemi distinti di tipo v .

Infine un sistema si dirà completo e covariante del tipo $\{m_1, m_2, \dots, m_\rho\}$ ove si comporti, riguardo a cambiamenti di variabile, come il prodotto di un sistema m_1^{plo} di I tipo, di uno m_2^{plo} di II e così via.

Analogamente per la controvarianza, purchè si adotti la definizione attraverso i complementi algebrici.

7. Quindi un sistema completo misto sarà di tipo $\{(m_1, n_1), \dots, (m_\rho, n_\rho)\}$ se si comporta come il prodotto di m_1, \dots, m_ρ sistemi covarianti rispettivamente di I, II ... ρ^{esimo} tipo e di n_1, \dots, n_ρ sistemi controvarianti di I, II ... ρ^{esimo} tipo.

Operazioni fondamentali. Esse restano al solito: I, l'addizione, II, il prodotto, III, la saturazione, IV, la composizione.

Per la prima, dati due sistemi $\{(m_1, n_1), (m_2, n_2), \dots, (m_\rho, n_\rho)\}$ il sistema dello stesso tipo ottenuto sommando le quantità omologhe si dirà *somma* dei due.

Se invece, dati due sistemi

$$\{(m_1, n_1) \dots (m_\rho, n_\rho)\} \quad ; \quad \{(m'_1, n'_1) \dots (m'_\rho, n'_\rho)\}$$

si forma il prodotto di ciascun elemento del primo per ciascuno del secondo, si avrà un sistema $\{(m_1 + m'_1, n_1 + n'_1), \dots, (m_\rho + m'_\rho, n_\rho + n'_\rho)\}$ che si dirà « *prodotto* » dei due.

Riguardo alla saturazione degli indici, si osservi che si possono « saturare » indici relativi alla I, oppure indici relativi alla seconda, ecc., legge di covarianza.

Infine per la composizione essa consta simultaneamente del « prodotto » e della « saturazione ».

8. Derivazione covariante:

Nella derivazione covariante bisogna ricorrere a forme quadratiche ausiliarie.

Precisamente noi distingueremo ρ forme quadratiche ausiliarie; e cioè delle forme

$$F_i = \sum a_{hk}^{(i)} dx_i dx_k \quad (i = 1, \dots, \rho)$$

per le quali i coefficienti $a_{hk}^{(i)}$ formino un sistema doppio covariante rispetto alla i^{esima} legge di covarianza.

La derivazione covariante rispetto alla i -esima legge consisterà precisamente nell'eseguire la derivazione covariante ordinaria rispetto a F_i .

Essa fa passare da un sistema di tipo $\{(m_1, n_1), \dots (m_i, n_i) \dots\}$ ad uno di tipo $\{(m_1, n_1), \dots (m_i + 1, n_i), \dots\}$.

Tralasciamo per ora di indicare quali possano essere le notazioni più opportune. Ci basti solo l'aver delineato tali procedimenti (essi sono sviluppati più ampiamente nei citati casi particolari) i quali permettono trattare in modo diretto quistioni geometriche connesse a proprietà gruppali.

Matematica. — *Complementi al teorema di riduzione dei sistemi differenziali ortogonali.* Nota di V. HLAVATY pres. dal Socio T. LEVI CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geometria. — *Sui minimi e massimi parziali per le funzioni di più variabili.* Nota di G. SCORZA, pres. dal Corrisp. L. TONELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Variazione del campo nelle equazioni del moto elastico.* Nota di G. KRALL, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Su una formola, analoga a quella di Stokes, per la determinazione del Geoide con le deviazioni della verticale.* Nota di C. MINEO, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il Poincaré, in uno scritto⁽²⁾ nel quale insiste sul fatto, già dimostrato dallo Stokes, che le misure gravimetriche bastano da sole, come quelle astronomico-geodetiche, a determinare pienamente il Geoide, stabilisce una formola che dà la parte del potenziale newtoniano terrestre dovuta allo scostamento lineare del Geoide rispetto all'Ellissoide di riferimento. Questa formola è in sostanza quella dello Stokes, perchè l'espressione del predetto potenziale (calcolato su una appropriata sfera) non differisce dall'espressione dello scostamento se non per un fattore costante; ma la smagliante analisi del Poincaré è per se stessa assai pregevole e importante.

(1) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

(2) Vedi POINCARÉ, *Les mesures de gravité et la Géodésie*, « Bulletin astronomique », vol. XVIII, 1901.

Il Callandreau, quasi a dar maggiore risalto all'equivalenza dell'insieme delle deviazioni della verticale e dell'insieme delle anomalie gravimetriche⁽¹⁾, si giova argutamente dell'analisi del Poincaré per mostrar la possibilità di ottenere una formola nella quale le deviazioni della verticale sostituiscano le anomalie gravimetriche, sebbene di essa il Callandreau non dia l'espressione completa⁽²⁾.

Il Viterbi, riprendendo la questione in una importante Nota⁽³⁾, mostra la possibilità di costruire direttamente, senza passare per le formole del Poincaré, prima il potenziale e poi lo scostamento anzidetti.

Ma il problema di dedurre dalla totalità delle deviazioni della verticale lo scostamento lineare del Geoide, che è poi quello che veramente importa conoscere, è problema prettamente geometrico; e qui mi propongo di costruirne l'espressione completa, analoga a quella di Stokes, giovandomi soltanto di considerazioni geometriche. Per brevità, mi limiterò a stabilire la formola nella consueta approssimazione e ammettendo che la superficie di partenza sia una superficie di rotazione poco differente da una sfera, riservandomi in altro luogo una trattazione più generale del problema.

1. Siano r, θ, Φ le coordinate polari d'un generico punto dello spazio e supponiamo che l'equazione della superficie di partenza, poco differente da una sfera di raggio a , sia

$$(1) \quad r = a(1 - \alpha t),$$

dove α è una costante e t una funzione di sola θ .

Sia poi

$$(2) \quad r = a(1 - \alpha t - \beta u),$$

dove β è un'altra costante e u una funzione di θ e Φ , l'equazione del Geoide.

Preso un punto qualunque $M(\theta, \Phi)$ sulla superficie di partenza, chiamiamo h il segmento di normale in M alla (1), compreso tra M e il punto $M'(\theta, \Phi)$ in cui esso segmento incontra il Geoide (2): h è lo *scostamento lineare* del Geoide dalla superficie di partenza.

(1) Equivalenza, s'intende, dal punto di vista pratico, nell'ordine d'approssimazione attuale: dal punto di vista teorico, invece, il problema della determinazione del Geoide mediante le deviazioni della verticale è riducibile a quello ben definito di determinare una superficie data che sia la congruenza delle sue normali; mentre la determinazione d'una incognita superficie d'equilibrio sulla quale sia prefissata la gravità è un problema, che può, in generale, riuscire impossibile e, peggio ancora, indeterminato: l'importante soluzione, datane dallo Stokes, nel caso della Terra, vale soltanto in determinate circostanze e in un certo ordine d'approssimazione.

(2) Vedi CALLANDEAU, *Sur la détermination du géoïde au moyen de l'ensemble des déviations de la verticale*, « Bulletin astronomique », vol. XVIII, 1901.

(3) VITERBI, *Sulla determinazione del potenziale esterno della gravità e dell'equazione del Geoide, mediante le deviazioni della verticale*, « Atti del R. Istituto Veneto », 1906-907.

Ammettendo trascurabili i termini in

$$\alpha\beta, \beta^2, \frac{h^2}{a^2},$$

si conclude facilmente che

$$(3) \quad h(\theta, \Phi) = -a\beta u(\theta, \Phi);$$

cioè h eguaglia, nella predetta approssimazione, l'anomalia del raggio vettore nello stesso punto M (e anche, come si potrebbe dimostrare, il segmento condotto per M normalmente al Geoide).

Siano ora φ e ω rispettivamente la latitudine geografica e la longitudine geografica del punto M ; l, λ gli analoghi elementi per il punto M' ; $\xi = l - \varphi$, $\eta = (\lambda - \omega) \cos \varphi$ sono le così dette componenti della deviazione della verticale secondo il meridiano e secondo il parallelo della superficie di partenza (1). Si trova, sempre nella stessa approssimazione:

$$(4) \quad \xi = l - \varphi = \frac{1}{a} \frac{\partial h}{\partial \theta}, \quad \eta = (\lambda - \omega) \cos \varphi = -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial h}{\partial \Phi}.$$

2. Supponiamo ora che la $h(\theta, \Phi)$ ammetta uno sviluppo in serie di funzioni sferiche

$$(5) \quad h = h_0 + h_1 + \dots + h_n + \dots,$$

assolutamente e uniformemente convergente su tutta la sfera di raggio unitario insieme con quelli delle derivate prime e seconde. La funzione sferica h_n verifica la nota equazione

$$(6) \quad n(n+1)h_n + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial h_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 h_n}{\partial \Phi^2} = 0.$$

Da (5) e (6) segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 h}{\partial \Phi^2} &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial h_n}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \frac{1}{\sin^2 \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 h_n}{\partial \Phi^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)h_n. \end{aligned}$$

(1) Nella stessa approssimazione si scrive

$$dh = -a(\xi d\varphi + \eta \cos \varphi d\omega),$$

che è la nota relazione dalla quale si deduce h , salvo una costante additiva, purchè sia soddisfatta la condizione, segnalata per la prima volta dal VILLARCEAU:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (\eta \cos \varphi).$$

Posto

$$(7) \quad F(\theta, \Phi) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 h}{\partial \Phi^2} = \frac{a}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\xi \sin \theta) - \frac{\partial \eta}{\partial \Phi} \right],$$

la $F(\theta, \Phi)$ è nota per mezzo delle deviazioni della verticale, e si ha d'altra parte:

$$(8) \quad F(\theta, \Phi) = - \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) h_n.$$

Se dunque

$$F(\theta, \Phi) = F_1 + F_2 + \dots + F_n + \dots$$

è lo sviluppo in serie di funzioni sferiche della funzione nota $F(\theta, \Phi)$, si deve avere, per l'unicità dello sviluppo stesso:

$$(9) \quad h_n = - \frac{F_n}{n(n+1)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ora, se Σ è la sfera $r = 1$ e si denota con $d\sigma'$ il suo elemento d'area calcolato nel punto variabile (θ', Φ') , si ha

$$F_n(\theta, \Phi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\Sigma} P_n(\cos \gamma) F(\theta', \Phi') d\sigma',$$

essendo

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\Phi - \Phi')$$

e $P_n(\cos \gamma)$ il polinomio di Legendre $P_n(x)$ di grado n calcolato per $x = \cos \gamma$.

Segue:

$$h = h_0 - \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \int_{\Sigma} P_n(\cos \gamma) F(\theta', \Phi') d\sigma'.$$

Ora si trova⁽¹⁾

$$(10) \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n(\cos \gamma) = 1 + \log \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

(1) Col metodo, p. es., adoperato nella mia Nota: *Sopra alcune serie di polinomi di Legendre*, « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », anno III, ottobre 1924.

e quindi, con giustificabile inversione dei segni \sum e $\int^{(1)}$, si ottiene (tenendo presente che $F_0 = 0$):

$$(11) \quad b = h_0 + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left(\log \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} \right) F(\theta', \Phi') d\sigma',$$

che è la formola cercata.

3. Se si chiama V^* la funzione potenziale newtoniana *esterna*, dovuta allo scostamento b del Geoide dalla superficie di partenza (1), cioè la variazione della detta funzione quando dall'ipotesi (1), circa una superficie d'equilibrio racchiudente tutte le masse terrestri, si passa all'ipotesi (2), allora si ha dalla teoria meccanica di Stokes:

$$(V^*)_{r=a} = \frac{M}{a^2} (b - h_0) = -\frac{M}{4\pi a^2} \int_{\Sigma} \left(\log \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} \right) F(\theta', \Phi') d\sigma',$$

essendo M la massa totale della Terra.

O anche

$$(V^*)_{r=a} = -\frac{M}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{n(n+1)} = \frac{M}{2a^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)F_n}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{n} \right].$$

Il termine $-\frac{M}{2a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{n}$ è quello effettivamente costruito dal Callandreau.

Introducendo la condizione che il centro di massa del pianeta coincida col polo delle coordinate, dev'esser nullo b_1 e quindi F_1 (oltre che F_0). Le deviazioni della verticale devono quindi verificare le condizioni

$$\int_{\Sigma} F(\theta, \Phi) d\sigma = \int_{\Sigma} F(\theta, \Phi) \cos \gamma d\sigma = 0.$$

4. Credo opportuno avvertire che non intendo proporre la formola (11) in vece di quella che dà la b per quadrature: il mio scopo è stato soltanto quello di mostrare che la (11), *d'interesse esclusivamente teorico* (nonostante le considerazioni del Callandreau), si stabilisce in modo diretto e indipendente da considerazioni meccaniche.

(1) Vedi, p. es., la via seguita in un caso analogo dal SIGNORINI nella sua Nota I, *Sulla formola di Stokes che serve a determinare la forma del Geoide*, « Rend. R. Acc. Lincei », vol. XX, 1911.

Fisica. — *Sopra l'intensità delle righe della serie principale del potassio.* Nota di F. RASETTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

Le misure dell'intensità delle diverse righe della serie principale di un metallo alcalino sono state eseguite o determinando il coefficiente massimo d'assorbimento nella riga, o per mezzo della dispersione anomala. Misure del primo tipo sono state fatte da Trumpy ⁽²⁾ per il sodio e il litio; le determinazioni cominciano dal terzo doppietto della serie e sono estese a una decina di righe. Il risultato è che i coefficienti a_{ik} di probabilità del passaggio dagli stati mP allo stato S decrescono come $1/m^3$.

Col metodo della dispersione anomala è stato invece misurato con qualche precisione soltanto il rapporto fra i numeri di elettroni di dispersione (legati da una semplice relazione di coefficienti a_{ik}) per i primi due doppietti del potassio ⁽³⁾, ed è stato trovato il valore 1111. Per conoscere poi i valori assoluti dei numeri di elettroni di dispersione, basta determinare i valori relativi al primo doppietto, per il quale tale numero è di uno per atomo, come è stato determinato recentemente con precisione da Minkowsky ⁽⁴⁾.

Ho creduto utile pertanto di eseguire una determinazione del numero di elettroni di dispersione per le prime righe della serie del potassio, per le quali mancano le misure di assorbimento, e d'altra parte la regola trovata da Trumpy per le righe successive perde la sua validità anche approssimata.

Il metodo adoperato è stato il solito del Puccianti; i particolari si trovano già descritti in precedenti Note ⁽⁵⁾. Soltanto che in questo caso, dovendo lavorare nell'ultravioletto, era necessario che tutto il dispositivo ottico fosse di quarzo. A questo scopo, feci fare appositamente dalla ditta C. Zeiss due lastre di quarzo cristallino di $2 \times 2 \times 4$ cm., da sostituire a quelle di vetro nell'interferometro di Jamin. Poichè, come è ben noto, l'argentatura ordinaria ha nell'ultravioletto, e particolarmente intorno a 3000 \AA , un potere riflettente molto piccolo, mi sono servito, per rendere speculari le facce posteriori delle lastre, del mercurio, con ottimo risultato.

(1) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

(2) B. TRUMPY, « ZS. f. Phys. », 34, 715, 1925; 44, 575, 1927.

(3) W. PROKOFIEW e G. GAMOW, « ZS. f. Phys. » 44, 887, 1927.

(4) R. MINKOWSKY, « ZS. f. Phys. », 36, 839, 1926.

(5) F. RASETTI, « Rend. Lincei », 2° sem. 1927, p. 54; E. FERMI e F. RASETTI, *ibid.*, 1° sem., 1927, p. 466.

La birifrangenza e il potere rotatorio del quarzo non dettero luogo ad alcun inconveniente.

Le frange ottenute con questo interferometro erano proiettate sulla fenditura di un grosso spettrografo di Hilger a quarzo, del tipo ad auto-collimazione.

Una modificazione introdotta con notevole vantaggio nella misura della dispersione anomala, è stata quella di usare come sorgente luminosa un arco a ferro, invece del cratere positivo dell'arco a carbone. Così gli spostamenti delle frange venivano misurati per lunghezze d'onda note con grande esattezza, con vantaggio sia della precisione che della rapidità delle misure. Per ciascun doppietto del potassio, si leggevano col micrometro gli spostamenti delle frange per diverse righe del ferro; si calcolava il coefficiente di dispersione anomala D (legato, secondo la teoria classica, alla densità N degli elettroni di dispersione e alla lunghezza l dello strato di vapore dalla relazione $Nl = 4\pi mc^2 D / e^2 \lambda^2$) da ciascuna lettura, e poi si faceva la media. Per il rapporto delle intensità delle due righe di ciascun doppietto ho preso il valore 2 ⁽¹⁾; una riprova dell'esattezza di questo valore è data dalla concordanza dei diversi valori trovati per D , per una data riga del potassio, basandosi sugli spostamenti delle frange per diverse righe del ferro. Diamo come esempio D per la riga del potassio λ 3446.49, calcolato per mezzo di cinque righe del ferro:

λ	D
3465.87	0.52
3452.10	0.50
3450.32	0.49
3443.89	0.51
3440.75	0.51

Le misure per ciascun doppietto sono state fatte sopra diverse fotografie, con risultati perfettamente concordanti. I doppietti λ 3217.27, 3217.76 e 3102.15, 3102.37 sono stati considerati come una riga sola, e il coefficiente trovato è la somma di quelli delle due righe; per ridurre i dati degli altri due doppietti λ 3446.49, 3447.49 e λ 4044.29, 4047.62 confrontabili con i primi, ho pertanto sommato i due coefficienti. La dispersione anomala per la riga λ 3034.94 e successive era troppo piccola per esser misurata con qualche precisione, anche alla pressione di vapore di circa un centimetro, che di poco si può superare per il manifestarsi di vari inconvenienti più volte citati.

I valori assoluti n dei numeri di elettroni di dispersione per atomo si possono ottenere osservando che per il primo doppietto della serie si ha praticamente $n = 1$ (somma delle due righe) e che il rapporto fra il primo

(1) F. RASETTI, « N. C. », gen. 1924.

e il secondo doppietto è III; da questi dati, e dai risultati delle mie misure si ha allora la seguente tabella:

riga, $4^2S - m^2P$	n
$4^2S - 4^2P$	1
$4^2S - 5^2P$	$9.0 \cdot 10^{-3}$
$4^2S - 6^2P$	$7.8 \cdot 10^{-4}$
$4^2S - 7^2P$	$2.0 \cdot 10^{-4}$
$4^2S - 8^2P$	$1.3 \cdot 10^{-4}$

Come si vede, per questi primi termini della serie la legge della proporzionalità inversa ad m^3 , valida per i termini elevati, è ben lontana dall'esser verificata.

Dalla concordanza fra le varie misure, questi valori possono ritenersi esatti fino al 5 %, salvo forse l'ultimo, per il quale la precisione è alquanto minore che per gli altri.

Fisica. — *Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell'atomo.* Nota di E. FERMI, presentata dal Socio M. O. CORBINO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica-fisica. — *Analisi coi raggi X e struttura cristallina delle leghe cadmio-argento.* II. Nota ⁽¹⁾ di G. NATTA e M. FRERI, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

Nella prima Nota su questo argomento avevamo comunicato i risultati dell'analisi coi raggi X delle fasi α e β e della fase β' che si ottiene dalla β per ricottura sotto i 480°. Descriviamo ora i risultati ottenuti nell'esame della rimanente parte del sistema.

Fase β' . — Già dall'analisi termica Petrenko e Fedorow ⁽³⁾ avevano osservato che la fase β subisce per raffreddamento lento sotto i 200° una seconda trasformazione, di cui però non avevano potuto accertare la natura. Noi abbiamo esaminato con il metodo di Debye un gran numero di leghe ricotte lungamente a 180°.

Per la lega al 48 % di cadmio (47.0 % atomico) si è osservato dopo ricottura un notevole cambiamento nell'aspetto dei fotogrammi. Le nume-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 20 novembre 1927.

(3) «Zeitschr. anorg. Chem.», 70 161 (1911).

rose linee presenti, non ordinabili per un sol tipo di struttura, si possono dividere in due classi (v. tab. IV). Alcune coincidono con le linee più intense presenti nei fotogrammi delle soluzioni solide limiti, tipo argento, le altre coincidono con quelle più intense della fase γ . Viene così dimostrato che nella ricottura sotto i 200° la fase β' si scinde in una miscela di cristalli delle fasi α e γ . Tale fenomeno non è stato osservato in nessuna lega contenente più del 50 % di cadmio. Si dedurrebbe da ciò che la trasformazione a 200° avviene soltanto per le soluzioni solide di argento nel composto AgCd , ma non per quelle di cadmio nello stesso, nè per le leghe a percentuale di cadmio ancora maggiore.

TABELLA IV.

47.0 % atomico di Cd					Linee corrisp. della fase γ	
$\theta/2$	I	Struttura tipo Ag		I per l' Ag	$\theta/2$	I
		h k l	a			
19.10	m	111	4.081	ff	—	—
19.75	m	—	—	—	22.00	f
22.20	md	002	4.079	mf	—	—
28.15	d	—	—	—	28.50	m
32.02	f	220	4.108	f	—	—
34.05	dd	—	—	—	34.00	dd
35.05	f	—	—	—	35.45	ff
38.15	ff	113	4.141	ff	—	—
40.15	m	222	4.146	md	—	—
41.45	mf	—	—	—	41.80	mf
47.50	mf	—	—	—	47.70	mf
53.90	ff	331	4.154	ff	—	—
55.95	ff	240	4.159	ff	56.50	d
60.25	f	—	—	—	60.60	f

Fase γ . — Fotogrammi simili tra loro e diversi da quelli delle altre fasi sinora studiate presentano le leghe dal 55 % (54.0 % at.) al 65 % (64.1 % at.) di cadmio. Solo alcune linee dei fotogrammi, le più intense, si presentano in posizione molto vicina a quella delle linee della fase β e si possono ordinare per una struttura cubica, corpo centrato. Molte linee si potrebbero pure ordinare per una struttura cubica di lato $a = 4.60 \text{ \AA}$, con una cella elementare contenente una molecola Ag_2Cd_2 . Da un esame più

attento si rivelano però delle anomalie di intensità, inspiegabili con le precedenti supposizioni, e numerose linee deboli, che non si possono ordinare per una struttura cubica se non assumendo una cella elementare di dimensioni molto grandi. La posizione delle linee fa, ciò non di meno, ritenere come indubbia una simmetria dei cristalli cubica o strettamente pseudo-cubica.

Non avendo potuto applicare il metodo di Laue o quello del cristallo rotante, molto più sensibili di quello delle polveri, perchè non abbiamo potuto isolare dei cristalli singoli, indeformati, avremmo incontrato difficoltà non lievi per giungere ad una struttura probabile per la fase γ , se non ci avesse indirizzato l'analogia profonda che abbiamo riscontrato tra tutte le fasi corrispondenti dei due sistemi Cd-Ag e Cu-Zn. Westgren e Phragmén⁽¹⁾, in base all'esame dei fotogrammi di Laue descrissero, per la fase γ degli ottoni, una struttura molto complessa con una cella elementare cubica, contenente 52 atomi. Per poter rendere confrontabili i fotogrammi delle polveri della lega cadmio-argento con quelli ottenuti da Westgren e Phragmén per gli ottoni, abbiamo moltiplicato i seni degli angoli di riflessione, indicati da detti autori, per il rapporto:

$$\frac{s_{\text{Ag}} + s_{\text{Cd}}}{s_{\text{Cu}} + s_{\text{Zn}}} \times \frac{\lambda_{\text{Fe}}}{\lambda_{\text{Cu}}} = \frac{(1.44 + 1.49) 1.93}{(1.27 + 1.33) 1.54} = 0.707$$

per tener conto delle diverse costanti reticolari, dovute al diverso diametro degli atomi componenti, e delle diverse lunghezze d'onda usate per i fotogrammi.

Nella tabella V sono appunto paragonati i $\sin \Theta/2$, dati da Westgren e Phragmén per la fase γ degli ottoni e moltiplicati per il fattore 0.707, con i $\sin \Theta/2$, osservati da noi sperimentalmente per la fase γ delle leghe Cd-Ag.

L'accordo perfetto dimostra la profonda analogia strutturale tra le fasi γ dei due sistemi. Anche le numerose linee, presenti nei nostri fotogrammi, e non negli ottoni perchè dovute a facce ad indici molto alti, furono tutte facilmente ordinate per la stessa ipotesi di struttura data da Westgren e Phragmén.

Si calcola così per la fase γ delle leghe Cd-Ag una cella elementare cubica di lato $a = 9.99 \text{ \AA}$, contenente 52 atomi. La densità calcolata per la lega al 65 % (64.1 at.) di cadmio risulta 9.59.

Se si volesse dare una formula al composto chimico ipotetico, che costituisce la fase γ , si dovrebbe ritenere che la cella elementare contenga quattro molecole Ag_5Cd_8 .

Dallo spostamento delle linee con la composizione risulta che la fase γ è costituita da una serie continua di soluzioni solide. Invece di indicare l'esi-

(1) «Philosophical Mag.» (1925), Vol. I, 311.

TABELLA V.

Fase γ Cd-Ag			h k l	Fase γ Cu-Zn	
sen $\theta/2$	a	I oss.		sen $\theta/2 \cdot 0.707$	I oss.
0.333	9.80	f	(411), (330)	0.331	f
—	—	—	(420)	0.338	dd
0.358	—	d	(332)	0.363	m
—	—	—	(422)	0.389	d
—	—	—	(510)	0.393	d
—	—	—	(422), (600) K β	0.421	d
0.467	9.87	m	(422), (600)	0.463	f
—	—	—	(532), (611)	0.475	d
—	—	—	(444) K β	0.486	dd
0.515	—	dd	(633), (721) K β	0.515	d
0.525	9.92	dd	(631)	0.522	d
0.534	9.92	d	(444)	0.534	m
0.550	9.88	dd	(550)	0.546	d
0.570	9.92	ff	(633), (721)	0.571	f
—	—	—	(642)	0.578	dd
—	—	—	(822), (660) K β	0.594	dd
0.614	9.89	mf	(651), (732)	0.608	d
0.629	9.94	f	(544)?, (741), (811)?	0.627	f
—	—	—	(644)?, (820)	0.637	d
—	—	—	(653)	0.645	dd
0.658	9.94	m	(822), (660)	0.655	f
—	—	—	(750), (831)	0.664	d
0.675	9.94	m	(662)	0.673	d
—	—	—	(752)	0.682	d
0.734	9.96	md	(745), (851), (903)	—	—
0.745	9.98	md	(923)	—	—
0.766	9.98	f	(770), (853), (941)	—	—
0.780	9.97	d	(861), (942), (10.0.1)	—	—
0.788	9.96	d	(862), (10.0.2)	—	—
0.803	9.98	d	(666), (10.2.2)	—	—
0.811	9.97	d	(756), (952), (10.1.3)	—	—
0.824	9.98	f	(774), (871)	—	—
0.867	9.98	f	(963), (10.1.5), (10.3.4)	—	—
0.886	9.99	d	(882), (10.4.4)	—	—
0.894	9.98	d	(776), (972), (10.5.2)	—	—

stenza di un composto chimico Ag_5Cd_8 , per il quale non si può supporre nessuna ragione chimica di esistenza, noi preferiamo immaginare che le soluzioni solide della fase γ siano rappresentate da una formula non chimica ma geometrica, che permetta di ottenere fasi omogenee di composizione variabile mediante l'associazione di un certo numero di atomi di argento con un numero da 1.2 a 1.9 volte maggiore di atomi di cadmio. Vogliamo dire che non sono delle leggi di affinità chimica, ma invece delle leggi meccaniche che portano, in molti sistemi metallici, a strutture geometriche, caratterizzate, come i composti chimici, da densità massime.

Nel nostro caso, partendo dal composto AgCd si osserva che questo non è capace di tenere disciolte allo stato solido che piccole percentuali di cadmio, perchè questo per il suo maggiore diametro atomico produrrebbe delle deformazioni interne troppo forti. Ma se non è possibile sostituire oltre un certo limite univocamente atomi di argento con atomi di cadmio, è invece geometricamente possibile, senza deformare troppo le dimensioni reticolari complessive, sostituire ad un numero n di atomi di argento un numero $n - 1$ di atomi di cadmio. La forma, probabilmente elissoidica, degli atomi di cadmio permette che questa sostituzione avvenga preferibilmente tra atomi situati in uno stesso piano reticolare.

Se consideriamo un cubo nel composto AgCd avente un lato tre volte maggiore della cella elementare, veniamo a considerare $2 \times 3^3 = 54$ atomi. La sostituzione di altri atomi di argento con cadmio non è possibile oltre un certo limite. Le dimensioni atomiche del cadmio ci permettono però in alcuni dei piani reticolari paralleli alla (001), distanti tra di loro di $a/2$, di sostituire ai nove atomi di soluzione solida, otto atomi di cadmio. Compiendo questa sostituzione in due piani, il cubo di lato $3a$ verrebbe a contenere 52 atomi invece di 54. Variando il lato del cubo da $3a = 9.96$ della fase β a 9.99 \AA , si ottiene la cella elementare della fase γ .

Fase δ e ϵ . — Le leghe dal 67 % di cadmio sin oltre il 90 %, presentano tutte fotogrammi di aspetto molto simile. Le linee si ordinano facilmente per una struttura molto semplice, esagonale compatta, con un rapporto assiale $c/a = 1.58$. Per la lega, ad es., al 75 % di cadmio (74.26 % at.) si calcola per la cella elementare un lato di 3.06 \AA . La cella contiene due atomi e si calcola per la densità 9.43. Gli angoli di riflessione, gli indici Bravais-Miller ed il valore calcolato per a secondo la nota formula:

$$a = \frac{\lambda}{2 \sin \Theta/2} \sqrt{1.333 (h^2 + k^2 + hk) + \frac{l^2}{c^2/a^2}}$$

sono riuniti nella tabella VI.

TABELLA VI. - Fase ϵ .

66.1 $\theta/2$	69.2 $\theta/2$	74.2 $\theta/2$	79.3 $\theta/2$	89.6 $\theta/2$	h k l	74.2 % Cd		
						a	I oss.	nS ²
19.5	19.4	19.0	19.0	18.8	002	2.973	mf	18
20.2	20.1	19.9	19.9	19.6	101	2.981	f	41
26.4	26.3	26.1	26.0	25.7	102	3.001	m	18
31.0	30.9	30.6	30.5	30.0	110	3.020	f	36
35.0	34.9	34.6	34.5	34.1	103	3.014	f	41
37.5	37.4	37.0	36.9	36.4	112	3.028	ff	72
38.0	38.0	37.5	37.4	36.9	201	3.029	f	41
39.6	39.4	—	—	—	—	—	(dd)	—
40.5	40.3	40.0	40.0	39.7	004	3.039	d	18
41.5	41.4	—	—	—	—	—	(dd)	—
42.6	42.5	42.0	—	41.15	202	3.032	m	18
45.4	45.4	45.0	44.8	44.5	104	3.034	md	18
46.3	46.3	—	—	—	—	—	(dd)	—
49.8	49.6	49.0	49.0	48.7	203	3.046	mf	41
52.9	52.7	52.0	51.7	51.3	121	3.046	f	82
55.3	55.2	54.6	54.5	54.4	114	3.047	ff	72
—	57.2	56.5	—	56.4	122	3.051	d	18
59.0	58.9	58.4	58.4	58.2	105	3.047	f	41

Nei fotogrammi dal 67 % al 70 % (66.1 e 69.2 at.) si osservano oltre alle linee del fotogramma al 75 % di cadmio (at. 74.26 %) anche alcune altre linee debolissime non ordinabili. Leggere differenze si denotano pure nelle intensità relative. Attribuiamo queste anomalie ad una distribuzione regolare degli atomi delle soluzioni solide della fase δ , a maggior percentuale di Ag, che porta alla formazione di una cella elementare di dimensioni multiple di quelle osservate per la soluzione solida ideale.

Il lato della cella elementare varia regolarmente con la composizione da un minimo di 3.04 Å per la lega al 67 % (66.1 at.) sino ad un massimo di 3.09 Å per la lega al 90 % (89.63 at.) di cadmio.

Fase η . — La lega al 95 % di cadmio presenta un fotogramma quasi identico a quello del cadmio puro. Non si hanno deformazioni notevoli

nelle dimensioni della cella elementare, di lato 2.95 \AA , e del rapporto assiale, che si mantiene vicino a 1.89. Anche le intensità relative delle linee concordano con quelle del cadmio puro (vedi tab. VII).

TABELLA VII.

100 % Cd		95 % Cd				
$\theta/2$	I oss.	$\theta/2$	I oss.	d	h k l	a
33.9	mf	33.4	d	2.678	002	2.83
36.8	md	36.3	d	2.474	100	2.85
40.7	f	39.5	mf	2.281	101	2.89
43.8	dd	42.6	dd	2.122	—	—
50.0	m	49.6	md	1.337	102	2.88
56.8	dd	56.5	dd	1.628	—	—
63.8	f	63.0	mf	1.475	103	2.89
63.0	d	—	—	—	—	—
69.4	d	69.0	mf	1.360	004	2.88
74.3	f	73.1	f	1.294	112	2.93
76.2	dd	—	—	—	200	—
78.3	m	77	f	1.238	201	2.93
80.0	dd	79.0	dd	1.211	104	2.92
85.0	dd	83.6	d	1.153	202	2.93
95.7	mf	94.6	m	1.042	203	2.92
99.3	m	—	—	—	—	—
105.0	mf	100.0	m	1.006	114	2.93
108.0	dd	107.3	m	0.957	120	2.92
109.3	d	109.7	d	0.941	121	2.92
116.8	d	116.3	dd	0.906	122	2.93

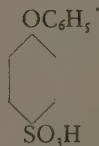
Viene così dimostrato che la fase η ha la stessa struttura cristallina del cadmio e consiste di soluzioni solide di argento nel reticolo del cadmio.

Nessuna delle fasi del sistema, escluse la β e β' , lasciano osservare, dall'esame coi raggi X delle leghe ricotte, alcuna trasformazione.

In una prossima Nota discuteremo i risultati dell'analisi röntgenografica in relazione ai dati forniti dagli altri metodi di indagine e particolarmente dall'analisi termica.

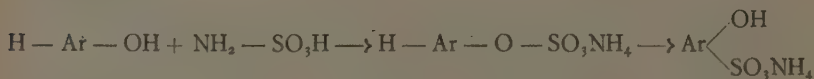
Chimica organica. — *Solfonazione di eteri fenolici con acido amminosolfonico.* Nota di A. QUILICO ⁽¹⁾ presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

Hofmann e Biesalsky, studiando l'azione dell'acido di Raschig, $\text{NH}_2 - \text{SO}_3\text{H}$, sui fenoli monovalenti ⁽³⁾, trovarono, tra l'altro, che un etere fenolico, l'anisolo, si comporta come i fenoli dando quantitativamente il p. anisolsolfonato di ammonio. Sperimentando con altri eteri fenolici, e cioè con il fenetolo e l'ossido di fenile, ho potuto ottenere con ottima resa i sali di ammonio dell'acido p. fenetolsolfonico e di un acido fenossibenzen-solfonico, sconosciuto nella letteratura del quale ho determinato la costituzione:



Questo mi assicura della generalità della reazione, la quale sembra anzi aver luogo con maggior facilità che per i fenoli.

E noto il meccanismo della reazione per i fenoli: si forma in un primo tempo il sale di ammonio di un acido arilsolfonico che si trasforma a temperatura più elevata in sale di ammonio di un acido fenolsolfonico, secondo lo schema:



che in un precedente lavoro ho dimostrato essere valido anche per i fenoli bivalenti ⁽⁴⁾.

La stessa interpretazione non si può dare alla solfonazione dell'anisolo, pel quale, essendo la funzione ossidrilica bloccata, non è possibile la formazione intermedia di un etere solforico, a meno di non ammettere la for-

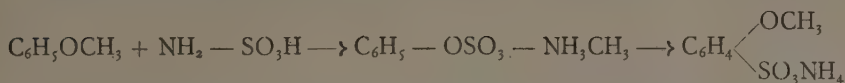
(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 20 novembre 1927.

(3) « Ber. », 45, 1394 (1912).

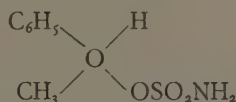
(4) « Gazz. », 57, (1927).

mazione del sale di metilammina dell'acido fenolsolforico e successiva trasposizione di questo:



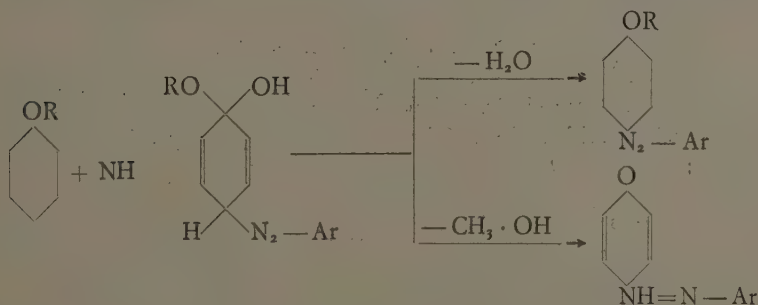
ciò che l'esperienza mi permettere di escludere.

Più verosimile sembra *a priori* la formazione di un sale di ossonio:



e la successiva trasposizione di questo, ma i risultati ottenuti con un etere fenolico non saturo, l'anelto, del quale riferirò in una prossima Nota, rendono molto più probabile l'interpretazione che qui esporrò.

Esiste una reazione degli eteri fenolici che presenta strette analogie con quella studiata, ed è la loro copulazione con i diazocomposti. Il Kurt Meyer ha trovato ⁽¹⁾, ed altri autori dopo di lui hanno confermato ⁽²⁾, che gli eteri fenolici possono copulare con i diazocomposti senza eliminazione dell'alchile per dare un etere ossiazoico. In pratica ha luogo una parziale eliminazione dell'alchile per cui si forma una miscela di ossiazo e di etere ossiazoico. Egli spiega questa reazione con la formazione di composti intermedi di addizione che in alcuni casi è riuscito ad isolare, dai quali, per eliminazione di acqua o di alcool si formano rispettivamente l'ossiazo e l'etere ossiazoico:



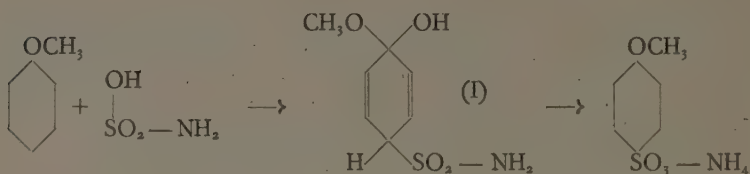
In modo analogo questo autore spiega la bromurazione dell'anisolo.

Un altro esempio di questo comportamento degli eteri fenolici mi sembra dato dalla solfonazione con acido amminosolfonico: si forma in un

(1) «Lieb. Ann.», 398, 74 (1913).

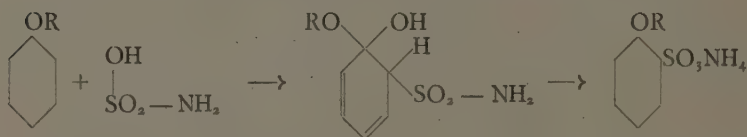
(2) AUWERS e MICHAELIS, «Ber.», 47, 1275 (1914); «Ber.», 48, 1716 (1915).

primo tempo la solfammina (I), la quale elimina con grande facilità una molecola d'acqua che saponifica a caldo la solfammina a sale di ammonio:

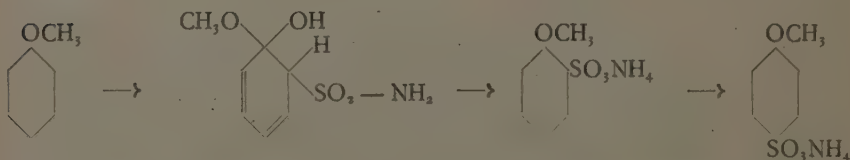


Non sono riuscito in nessun caso ad isolare il prodotto intermedio della reazione, il quale contenendo due ossidrilici, di cui uno solo eterificato uniti allo stesso atomo di carbonio, deve essere estremamente instabile alla temperatura alla quale è necessario operare (140°-170°), trasponendosi immediatamente in sale di ammonio.

Con lo stesso meccanismo la solfonazione potrebbe effettuarsi in orto, l'eliminazione di acqua rendendosi ancora più facile:



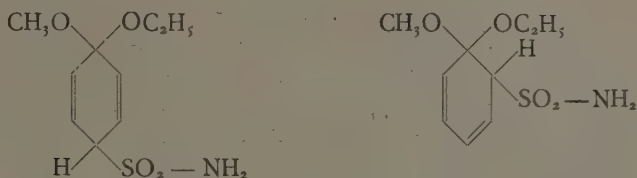
ed infatti Hofmann e Biesalsky ottennero nella reazione tra anisolo ed acido di Raschig, piccole quantità di o. anisolsolfonato di ammonio, probabilmente per avere operato a temperatura più bassa. È noto, d'altra parte, che ha luogo molto facilmente l'insomerizzazione da orto a para: l'ac. o. fenetolsolfonico riscaldato a 100°, si trasforma quantitativamente nell'isomero para⁽¹⁾. È quindi molto probabile che si passi attraverso il composto orto, per cui la solfonazione dell'anisolo con $\text{NH}_2 - \text{SO}_3\text{H}$ si può rappresentare con lo schema:



Non è possibile invece la formazione di derivati solfonati in meta, d'accordo con i risultati dell'esperienza. È probabile che impiegando gli eteri

(1) G. T. MOODY, «Proc. Chem. Soc.», 1892-93, 214.

dell'acido amminosolfonico, ad es. $\text{NH}_2 - \text{SO}_2 - \text{C}_2\text{H}_5$, che è liquido a temperatura ordinaria ⁽¹⁾ ed operando a temperature più basse, si riesca ad isolare i prodotti intermedi di addizione:



che per la loro costituzione analoga a quella degli acetali, dovrebbero essere più stabili, o quanto meno identificare i prodotti di decomposizione, alcool e solfammide $\text{CH}_3\text{OC}_6\text{H}_4\text{SO}_2\text{NH}_2$. A questo scopo ho in corso delle ricerche. Per l'identificazione degli acidi anisol e fenetolsolfonici, sono ricorso alla formazione dei cloruri e delle ammidi, già descritte nella letteratura: dall'ac. anisolsolfonico ho ottenuto un cloruro $\text{CH}_3\text{OC}_6\text{H}_4\text{SO}_2\text{Cl}$ p. f. 41° e una ammidi $\text{CH}_3\text{OC}_6\text{H}_4\text{SO}_2\text{NH}_2$ p. f. 116° , identici al cloruro e all'ammide dell'ac. p. anisolsolfonico preparati da Gattermann ⁽²⁾, dimostrando per l'acido ottenuto nella reazione tra ac. amminosolfonico e anisolo la costituzione data da Hofmann e Biesalsky. Dall'ac. fenetolsolfonico ho preparato un cloruro $\text{C}_2\text{H}_5\text{OC}_6\text{H}_4\text{SO}_2\text{Cl}$ p. f. 36° e un'ammide $\text{C}_2\text{H}_5\text{OC}_6\text{H}_4\text{SO}_2\text{NH}_2$ p. f. 149° , identici a quelli dell'ac. p. fenetolsolfonico ottenuto da G. Lagai ⁽³⁾.

Per l'ossido di fenile non era noto nessun derivato solfonico eccettuato un acido disolfonico di costituzione ignota, che si forma, secondo Hoffmeister ⁽⁴⁾, per solfonazione diretta dell'etere fenilico, e che dà un sale di Ba facilmente solubile in acqua. L'acido monosolfonico da me ottenuto è un liquido sciropposo che cristallizza per permanenza in essiccatore in aghi raggiati p. f. 80° . Il sale di bario $(\text{C}_6\text{H}_5\text{OC}_6\text{H}_4\text{SO}_3)_2\text{Ba} \cdot \text{H}_2\text{O}$, è difficilmente solubile in acqua fredda. Per azione del PCl_5 sul sale di sodio secco, si ottiene il cloruro $\text{C}_6\text{H}_5\text{OC}_6\text{H}_4\text{SO}_2\text{Cl}$, sotto forma di un olio bianchiccio, dal quale, per ebollizione con ammoniacca alcoolica si forma l'ammide $\text{C}_6\text{H}_5\text{OC}_6\text{H}_4 - \text{SO}_2\text{NH}_2$, che cristallizza in aghetti poco solubili in alcool freddo, p. f. 125° .

Per riscaldamento del cloruro con PCl_5 in tubo chiuso a 200° si forma una miscela di clorobenzolo e di p. diclorobenzolo, che fu identificato attraverso il suo nitroderivato, $\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}_2\text{NO}_2$ p. f. 54° .

(1) C. PAAL e F. KRETSCHMER, «Ber.», 27, 1243 (1894).

(2) «Ber.», 32, 1154 (1899).

(3) «Ber.», 25, 1836 (1892).

(4) «Ber.», 3, 747 (1870).

PARTE SPERIMENTALE.

Acido p. anisolsolfonico. $C_6H_4 \begin{cases} OCH_3 [1] \\ SO_3H [4] \end{cases}$. — Si riscaldano alla temperatura di ebollizione dell'anisolo, gr. 5 di acido amminosolfonico finamente polverizzato e gr. 10 di anisolo. Si ottiene una massa cristallina che va aumentando col tempo. Dopo 4 o 5 ore di riscaldamento, si estrae con etere l'anisolo eccedente, e si ricristallizza dall'acqua il sale di ammonio grezzo. Resa gr. 8.5, teorico gr. 10.5. Il sale cristallizza anidro in corti prismi quadrati trasparenti, e fonde abbastanza nettamente a 285°.

Analisi: gr. 0.2051

trovato: 8.46 % NH₃

calcolato per $CH_3OC_6H_4SO_3NH_4$: 8.29 %

Il sale di potassio cristallizza in aghi lucenti.

Il cloruro dell'acido, $CH_3OC_6H_4SO_2Cl$, si ottiene dal sale di potassio riscaldandolo per mezz'ora a 100° con una gr. mol. di PCl_5 ; cristallizza dall'etere in begli aghi incolori che fondono a 41°. L'ammide, ottenuta con ammoniaca alcoolica, cristallizza in aghi madreperlacei dall'alcool, in ciuffi raggiati dall'acqua, e fonde a 116°. Per il cloruro e l'ammide dell'ac. p. anisolsolfonico, Gattermann dà 40°.5 e 116°.

Acido p. fenetolsolfonico. $C_6H_4 \begin{cases} OC_2H_5 [1] \\ SO_3H [4] \end{cases}$. — Da gr. 10 di acido amminosolfonico, e gr. 25 di fenetolo, si ottengono, per riscaldamento di 4 o 5 ore alla temperatura di ebollizione del fenetolo, gr. 19 (teorico gr. 22.5) di sale di ammonio grezzo lavato con etere. Per ripetute cristallizzazioni dall'acqua, si ottiene il sale puro in larghe lamine quadrate che fondono con decomposizione intorno ai 250°. Il sale è molto solubile in acqua, poco in alcool.

Analisi: gr. 0.3882

trovato: 7.67 % NH₃

calcolato per $C_2H_5OC_6H_4SO_3NH_4$: 7.76 %

Evaporando una soluzione acquosa del sale ammonico e di $BaCl_2$ nei rapporti molecolari, si ottiene il sale di bario, $(C_2H_5OC_6H_4SO_3)_2Ba \cdot 4H_2O$ in scaglie madreperlacee facilmente solubili in acqua calda.

Analisi del sale seccato a 150°:

gr. 0.3418

$BaSO_4$ gr. 0.1471

trovato 25.33 % Ba

calcolato per $(C_2H_5OC_6H_4SO_3)_2Ba$: 25.45 %

Il sale di potassio cristallizza dall'acqua in aghi scintillanti.

Per azione del PCl_5 si ottiene il cloruro $\text{C}_6\text{H}_5\text{OC}_6\text{H}_4\text{SO}_2\text{Cl}$ che cristallizza dall'etere in lamine trasparenti che fondono a 36° . L'ammido corrispondente $\text{C}_6\text{H}_5\text{OC}_6\text{H}_4\text{SO}_2\text{NH}_2$, cristallizza dall'alcool in aghetti bianchi p. f. 149° .

Acido *p. fenossibenzensolfonico*. $\text{C}_6\text{H}_4 \begin{cases} \text{OC}_6\text{H}_4 [1] \\ \text{SO}_3\text{H} [4] \end{cases}$. — Si riscaldano per

4 o 5 ore a 160° – 170° gr. 10 di acido amminosolfonico con gr. 25 di ossido di fenile. Si lava ripetutamente con etere la massa cristallina formata, e si ricristallizza da poca acqua calda. Si ottengono così gr. 25 di sale di ammonio (teorico gr. 28), che per lenta cristallizzazione dall'acqua si ottiene in belle lamine quadrate di oltre un centimetro di lato.

Analisi del sale seccato a 150° :

gr. 0.2283

trovato 6.12 % NH_3

calcolato per $\text{C}_6\text{H}_5\text{OC}_6\text{H}_4\text{SO}_3\text{NH}_4$ 6.32 %

Evaporando una soluzione acquosa del sale di ammonio e di BaCl_2 , nei rapporti molecolari, si ottiene il sale di bario $(\text{C}_6\text{H}_5\text{OC}_6\text{H}_4\text{SO}_3)_2\text{Ba} \cdot \text{H}_2\text{O}$, in scaglie madreperlacee poco solubili in acqua fredda, facilmente in acqua bollente. Analisi:

gr. 0.2710 hanno dato per riscaldamento a 160° gr. 0.0073 H_2O

trovato 2.69 % H_2O

calcolato per $(\text{C}_6\text{H}_5\text{OC}_6\text{H}_4\text{SO}_3)_2\text{Ba} \cdot \text{H}_2\text{O}$ 2.76 %

Il sale anidro dà:

gr. 0.2637

BaSO_4 gr. 0.0966

trovato 21.56 % Ba

calcolato per $(\text{C}_6\text{H}_5\text{OC}_6\text{H}_4\text{SO}_3)_2\text{Ba}$: 21.60 %

Il sale di sodio è anch'esso poco solubile in acqua fredda, a differenza del sale di potassio.

Dal sale di sodio ben secco con un equivalente di PCl_5 , si ottiene il cloruro $\text{C}_6\text{H}_5\text{OC}_6\text{H}_4\text{SO}_2\text{Cl}$, sotto forma di un olio bianco, difficilmente saponificabile. Per ebollizione con ammoniacca alcoolica si forma l'ammido $\text{C}_6\text{H}_5\text{OC}_6\text{H}_4\text{SO}_2\text{NH}_2$, in aghetti bianchi p. f. 88° , poco solubili in acqua e in alcool freddo. Microanalisi:

gr. 0.008726 N corr. cm., 0.4459 a 20°

740 mm. trovato 5.78 % N

calcolato per $\text{C}_6\text{H}_5\text{OC}_6\text{H}_4\text{SO}_2\text{NH}_2$: 5.62 %

Riscaldando per 7 o 8 ore il cloruro con PCl_5 in tubo chiuso a 200° , si ottiene un liquido omogeneo, che sottoposto a distillazione dà una miscela di monoclorobenzene e p. diclorobenzene, identificabile attraverso il suo nitro composto $\text{C}_6\text{H}_3\text{Cl}_2\text{NO}_2$ p. f. 54° .

Chimica. — *I sistemi:* $\text{Cd}(\text{NO}_3)_2 - \text{HNO}_3 - \text{H}_2\text{O}$; $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2 - \text{HNO}_3 - \text{H}_2\text{O}$; $\text{Mg}(\text{NO}_2)_2 - \text{HNO}_3 - \text{H}_2\text{O}$ a 20°. Nota di G. MALQUORI, pres. dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Dissociazione termica del nitrato di cadmio.* Nota di G. MALQUORI, pres. dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *I sistemi:* $\text{Ph}(\text{NO}_3)_2 - \text{LiNO}_3 - \text{H}_2\text{O}$ e $\text{Ph}(\text{NO}_3)_2 - \text{CsNO}_3 - \text{H}_2\text{O}$ a 25°. Nota di G. MALQUORI, pres. dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Petrografia. — *Di alcune rocce rinvenute nelle perforazioni di Ripi (Lazio).* Nota di G. CUMIN, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. MILLOSEVICH.

Tra i vari assaggi eseguiti per le ricerche petrolifere nei dintorni di Ripi, in località « Le Petrolie », quello che ha permesso di fare alcune interessanti constatazioni è contrassegnato col n. 8. I terreni attraversati da questa perforazione constano nella parte alta di argille e sabbie di tipo lacustre, che contengono pure un letto lignitifero di due metri di spessore, successivamente a cominciare da una profondità di 37 metri, s'iniziano dei depositi vulcanici contenenti anche ciottoli di calcare ed arenaria, ciò che dimostra il persistere di un ambiente lacustre.

Insieme a questi materiali si sono pure rinvenute rocce eruttive e cioè alle profondità tra i 126-133 m., 163-165 m. e dai 180 ai 184 m. Le rocce raccolte in queste zone formano oggetto della presente Nota.

Devesi notare, che nella prima e nell'ultima zona, le rocce erano frammentate ad altro materiale sì che si tratta evidentemente di frammenti isolati, la zona intermedia invece sembra, per il suo spessore e per il fatto di aver dato solo lava (coperta in alto da pozzolana) essere una colata.

I campioni provenienti dalla zona superiore sono di colore grigio-scuoro, compatti e mostrano soltanto pochi cristalli pirossenici macroscopici.

(1) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

Il microscopio svela una massa fondamentale costituita da un aggregato feltriforme di granuli e microliti pirossenici e feldspatici, inoltre si osservano granuli di magnetite che normalmente non sono molto frequenti, ma che talvolta si infittiscono in alcune plaghe. In qualche altro punto si osserva un maggior sviluppo di microliti feldspatici che danno alla massa fondamentale una struttura intersertale. Negli spazi tra i microliti appare allora un vetro brunastro.

Tra i minerali ferro-magnesiaci, appaiono pirosseni, biotite, olivina e magnetite.

I *pirosseni*, che sono tutti riferibili alla *augite*, si trovano più spesso sotto forma di granuli rotondeggianti che in cristalli idiomorfi. Gli individui più grossi sono percorsi da numerose fratture nelle quali si insinuò il magma, cristallizzando in un secondo tempo. Sono rari i cristalli ben idiomorfi e le forme che si osservano sono (100) (010) (110) e (111), la forma dei singoli individui appare allungata secondo *c*.

I geminati sono frequenti, più comuni quelli per compenetrazione, rari invece quelli a croce secondo (101), alle volte si osserva pure un accrescimento parallelo di individui secondo (110).

Nei fenocristalli le tracce di sfaldatura sono ben visibili in tutte e due le direzioni caratteristiche, esse mancano invece negli individui più piccoli o sono rappresentate soltanto da tracce irregolari grossolanamente parallele fra di loro.

Le inclusioni non sono troppo frequenti, consistono per lo più in piccoli cristalli pirossenici e granuli di magnetite, in un solo fenocristallo osservai delle inclusioni vetrose rotondeggianti di colore giallastro.

Il colore dell'*augite* è verde bottiglia pallido, rare volte più cupo, la struttura zonare non è troppo frequente, di solito si limita ad un nucleo più scuro, in rari casi si notano tre zone che si fanno, verso l'esterno, via via più chiare. Il pleocroismo è raro ed è di solito presente soltanto negli individui zonati esso è:

$$\begin{aligned} a &= c = \text{verde-chiaro} \\ b &= \text{verde-scuro} \end{aligned}$$

L'estinzione rispetto a *c* varia tra i 45 ed i 50 gradi, ciò che conferma appunto trattarsi di *augite*.

Segregazioni *augitiche* sono rare, esse sono costituite da aggregati di cristalli arrotondati e tra gli spazi lasciati liberi si notano plaghe di vetro brunastro.

L'*olivina* è scarsa, appare per lo più in granuli, molto di rado si osserva qualche sezione idiomorfa, solitamente tozza e con le forme (001) (101) (100), l'*olivina* è sempre di primo tempo.

La *magnetite* si trova di solito in granuli sparsa nella massa fondamentale, altre volte appare inclusa nella *augite*. Raramente si notano con-

centrazioni più abbondanti del minerale che allora si mostra, per lo più, leggermente alterato, in modo da intorbidare anche le zone finitime.

La *biotite*, sempre pleocroica, è rara in piccole lamelle a forma irregolare sempre del primo tempo.

I *feldspati*, tutti calco-sodici, sono con l'augite i componenti principali della roccia, si notano di tutti e due i tempi di cristallizzazione, però quelli del primo sono più scarsi di quelli augitici.

I fenocristalli sono di solito geminati secondo la legge dell'albite e molto raramente secondo quella di Carlsbad, i primi contengono di solito un sistema di poche lamine larghe, alternate con altre sottili ma che di solito non attraversano tutto il cristallo.

I microliti invece, di forma allungata, sono in maggioranza semplici, non mancano però alcuni geminati secondo Carlsbad.

Le misure di estinzione, nei diversi cristalli hanno dato i risultati sotto-notati.

Negli individui del primo tempo, estinzione nella zona simmetrica:

+ 35°	An ₆₀	labradorite
+ 40°	An ₇₀	»
+ 43°	An ₇₃	»
+ 50°	An ₇₆	bytownite

su (001)

— 10°	An ₆₄	labradorite
— 23°	An ₈₀	bytownite
— 30°	An ₈₈	»

I microliti hanno dato:

su (001)

— 28°	An ₈₆	bytownite
— 32°	An ₉₂	anortite
— 36°	An ₉₅	»

e su (010)

— 24°	An ₆₃	labradorite
— 26°	An ₆₅	»
— 33°	An ₇₅	bytownite
— 36°	An ₈₅	»

Si tratta, come si vede, di termini basici che aumentano tale tendenza nelle microliti.

Infine quale minerale accessorio si nota l'*apatite* in piccoli aggetti.

La roccia incontrata alla profondità di 163 metri, presentava uno spessore di 5 metri, essa è di colore grigio scuro, ed al contrario della precedente, è bollosa.

Al microscopio mostra una massa fondamentale vetrosa, gialliccia, con numerosi trichiti e scarsi prodotti devitrificati con azione incerta a Nicols incrociati. Nella massa fondamentale si trovano sparsi fenocristalli e pochi microliti di augite e feldspati calco-sodici, tutti e due questi minerali presentano le caratteristiche già accennate per la roccia precedente.

I feldspati però mostrano di essere più acidi, la loro estinzione su (010) oscilla tra i — 12 ed i — 20 gradi, ciò che dimostra trattarsi di *andesina* e di *labradorite*.

La *magnetite* è scarsa, come pure la *biotite*, manca l'*olivina*.

L'ultimo campione proviene da 180 m. di profondità; esso è pure bolloso, di colore grigio e si distingue dal precedente per una maggior ricchezza di prodotti di devitrificazione ed una, seppur non elevata, maggior frequenza della *biotite*. In alcune cavità si notano dei riempimenti di calcite.

Nel complesso tutte e tre le rocce si possono ascrivere alle andesiti augitiche, tendenti a passare, e ciò vale principalmente per la prima con il suo tenore in olivina, a basalti veri e propri, rappresentati nella regione dal basalto anortitico di S. Marco ⁽¹⁾ e da quello rinvenuto nella perforazione in contrada Sabatino ⁽²⁾.

Dal punto di vista geologico è interessante notare il fatto che nella trivellazione si siano trovati depositi vulcanici sino a 183 m. di profondità, ciò che fa giustamente supporre essere state le eruzioni vulcaniche degli Ernici assai più complesse di quello che le manifestazioni superficiali attuali lascino supporre.

Geologia. — *Resti di Mammiferi del Terziario e del Quaternario di Ragusa in Sicilia* ⁽³⁾. Nota di R. FABIANI, presentata ⁽⁴⁾ dal Socio G. DAL PIAZ.

La formazione asfaltifera del Ragusano, importantissima come fonte di materie prime variamente utilizzabili, offre un notevole interesse anche dal lato puramente scientifico per i fossili che in essa si rinvencono.

A parte i resti di Molluschi e di Pesci, sono degni di particolare attenzione gli avanzi, purtroppo rarissimi, di Odontoceti, gruppo che tra i Mammiferi fossili d'Italia occupa finora il primo posto per gli studi filo-

(1) VIOLA C., *I principali tipi di lave dei vulcani Ernici*, in « Boll. R. Com. Geol. d'It. », vol. 33, p. 104, Roma, 1902.

(2) CUMIN G., *Su di una nuova corrente lavica nei vulcani degli Ernici*, in « Boll. Soc. Geol. It. », vol. 38, p. XLIII, Roma, 1919.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto Geologico della R. Università di Palermo.

(4) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

genetici, come risulta dai lavori pubblicati dal prof. G. Dal Piaz sulla svariata e magnifica fauna a Cetodonti del Miocene Bellunese⁽¹⁾.

Fino dal 1902 G. G. Gemmellaro dava notizia di un cranio di Squalodontide rinvenuto nel calcare bituminoso di Ragusa; tale cranio formava, più tardi, oggetto di uno studio di Mariano Gemmellaro, il quale, assimilandolo ad una specie precedentemente descritta e figurata dal prof. Dal Piaz⁽²⁾ e proveniente dal calcare miocenico di Scicli (Ragusa), lo illustrava sotto il nome di *Neosqualodon Assenzae* Forsyth Major⁽³⁾.

I due esemplari accennati erano finora i soli rappresentanti di Odontoceti trovati nel Ragusano⁽⁴⁾. Da quando potei mettermi in relazione con l'egregio ing. I. Noera, direttore degli stabilimenti e delle miniere di Ragusa della Società A. B. C. D. (asfalti, bitumi, catrami, derivati), lo pregai di raccomandare agli operai cavaatori di far raccolta di resti fossili in genere, prestando la massima attenzione a quelli di Delfinidi in modo particolare. Gli rinnovai la preghiera quando durante alcune escursioni fatte nel Ragusano ebbi a visitare sotto la sua guida gentile e competente anche le cave asfaltifere della località Tabuna.

In questi giorni ho avuto la gradita sorpresa di ricevere, assieme ad altri fossili, alcuni resti di un Cetodonte, di cui dirò fra poco, inviati dallo stesso ing. Noera, al quale mi è grato esprimere anche pubblicamente i miei ringraziamenti.

Oltre ai fossili inclusi nei depositi calcarei del Miocene, i lavori praticati nelle cave asfaltifere hanno fornito parecchi avanzi di Mammiferi del Quaternario, giacenti entro le fenditure e le tasche d'erosione che intaccano la superficie della massa calcarea, specie in corrispondenza delle numerose fratture che attraversano la massa stessa.

Ho indicato in altra pubblicazione⁽⁵⁾ la presenza di *Cervus* e di *Elephas* nano; i materiali trovati posteriormente a cura dell'ing. Noera nonchè di Giovan Battista Floridia, mio allievo, provano, come vedremo, l'esistenza di altre specie.

I. — *Resti di Odontoceto*. Gli avanzi trovati, come ho accennato, in questi ultimi giorni, si riducono disgraziatamente a tre soli denti incompleti e ad

(1) DAL PIAZ G., *Gli Odontoceti del Miocene Bellunese*. « Mem. Ist. Geol. R. Univer. di Padova », vol. IV, Padova, 1916.

(2) DAL PIAZ G., *Neosqualodon nuovo genere della Famiglia degli Squalodontidi*. « Mem. Soc. Paléont. Suisse », XXXI (1904).

(3) GEMMELLARO, *Il Neosqualodon Assenzae Forsyth Major sp. del Museo Geologico della R. Università di Palermo*. (Giorn. Sc. Nat. ed Ec. di Palermo », XXXII, Palermo, 1920.

(4) Alcuni denti, ma sempre della stessa specie, vennero ricordati dal prof. G. D'ERASMO (*Nuovi vertebrati del calcare bituminoso di Ragusa in Sicilia*, « Rend. R. Acc. delle Sc. Fis. e Mat. di Napoli », XXXI, 1925). Il D'ERASMO indica anche la presenza a Ragusa di resti di Cervo ed Elefante.

(5) FABIANI R., *Geologia degli Idrocarburi della Sicilia anche in rapporto colla formazione degli zolfi*. « Boll. Ass. Min. Sic. », III, n. 3 (1927), p. 16, nota 2.

una scheggia d'osso. Erano tutti vicini, ma in posizione disordinata, in un unico pezzo di roccia calcarea del Langhiano (livelli asfaltiferi superiori) delle cave di località Tabuna presso Ragusa esercite dalla Società A.B.C.D. Purtroppo, o per effetto dello scoppio di una mina o per disattenzione degli operai che raccolsero il pezzo calcareo, andarono perdute le corone di due denti e rotta parte della radice del terzo. I due primi erano uniradiculati, a radice grossa che indica un dente robusto. Il terzo ha la corona conico-compressa in senso laterale, a rugosità irregolari longitudinali, i due margini carenati, irregolarmente denticulati presso la base della corona. Il margine che, dalla forma del dente e dalle analogie delle quali dirò fra poco, ritengo quello posteriore, presenta più evidenti questi denticoli, in numero di cinque, però assai depressi e ottusi, con maggiore sviluppo del superiore.



Fig. 1.

Squalodon sp. - Premolare superiore destro in gr. nat.,
visto di lato e di coltello. Calcare asfaltifero superiore di Ragusa.

Il tratto distale della carena essendo consumato dall'uso (come pure la punta della corona), non si può dire se esistessero altri dentelli. La radice era duplice, ma coi rami del tutto liberi, solo all'estremità e nel resto saldati mediante una spessa lama. La lunghezza complessiva del dente è di mm. 56; tenuto conto però dell'usura subita dall'apice della corona, si può calcolare che fosse lungo almeno mm. 62. La corona presenta un'altezza (incompleta per l'accennata usura) di mm. 21,5, diametro antero-posteriore alla base 22, trasverso, pure alla base, 11.

Per la forma della corona del dente ora descritto e per le proporzioni più robuste e le maggiori dimensioni di esso e degli altri due, questi denti si distinguono subito da quello del su ricordato *Neosqualodon Assenzae*. Da quanto è dato stabilire pel loro stato di conservazione e in una prima approssimazione, detti resti risultano siano riportabili al genere *Squalodon* s. s.

Il dente provvisto di corona ritengo sia un premolare probabilmente superiore; esso presenta notevoli affinità con quelli dello *Squalodon bariense* Jourd. (Cf. Dal Piaz, loc. cit., Parte II, tav. II, fig. 6).

Uno studio ulteriore, tanto più se sarà possibile recuperare qualche altro pezzo del prezioso esemplare, spero permetterà di precisare la determinazione di questi resti, i quali hanno comunque interesse in quanto indicano presente nel calcare asfaltifero langhiano di Ragusa una forma di Odontoceto del tutto nuova per la Sicilia.

2. — *Resti di Mammiferi Quaternari*. Gli elementi della fauna quaternaria che ha lasciato le sue tracce entro le spaccature e tasche d'erosione che intaccano la superficie della formazione dei calcari bituminiferi sono rappresentati da numerosi avanzi, però più o meno frammentizi, di guisa che non sempre ho potuto fare la determinazione specifica. Oltre ai pezzi raccolti recentemente, ho riscontrato l'esistenza, nelle raccolte del Museo dell'Istituto geologico dell'Università di Palermo, di tre denti d'Orso e di un molare elefantino. Vennero inviati nel 1909 al prof. G. Di Stefano, allora direttore dell'Istituto, e furono raccolti a Ragusa dal cav. E. Puglisi.

Dai materiali da me esaminati risultano dunque presenti nel Quaternario dell'altipiano di Ragusa:

Ursus cfr. *arctos* L. — Un M_1 inf. sinistro, un M_1 e un M_2 superiori di destra.

Cervus, probabilmente *C. elaphus* L. — Frammento di pugnale.

Bos primigenius Bojan. — Epistrofeo.

Hippopotamus amphibius razza *Pentlandi* Meyer. — Frammenti di incisivi e ossa diverse.

Sus scrofa prisca Marc. d. S. — Frammento di mandibola destra d'individuo ♂. L'ultimo mascellare misura mm. 45.5×20.4 .

Elephas antiquus melitensis Falc. — Frammenti di zanna e qualche molare.

I resti d'Orso sono estremamente rari nel Quaternario di Sicilia. Oltre ai pezzi raccolti dal Falconer⁽¹⁾, che devono essere conservati nel Museo Britannico, non mi consta esistano nelle raccolte altro che pochi frammenti che si trovano nel Museo geologico di Palermo e consistono, oltre che in qualche dente staccato, di due frammenti di mascellare superiore destro provenienti rispettivamente dalle grotte di S. Teodoro (Messina) e di Carburanci (Palermo).

Recentemente ho raccolto nella grotta di S. Ciro (Palermo) un'ulna sinistra di Orso, la quale, più che tutto, richiama l'osso omologo dell'*U. horribilis* Ord.

Gli altri elementi della fauna del Quaternario di Ragusa sono fra le specie che con maggiore o minore frequenza figurano nei giacimenti siciliani. La loro presenza a Ragusa viene ad ogni modo ad estendere l'area della loro diffusione nella Trinacria.

(1) FALCONER H., *Paleontological Memoirs and Notes*. Vol. II, p. 548, nota 1, London, 1868.

Geologia. — *Su alcuni lembi del ricoprimento della Dent Blanche (VI) compresi entro le formazioni post-triasiche della Grivola.* Nota ⁽¹⁾ di GIAMBATTISTA DAL PIAZ, presentata dal Socio L. DE MARCHI.

Durante gli anni 1926 e 1927 compii, per consiglio del dott. F. Hermann, un rilevamento geologico di dettaglio nella parte settentrionale del Gran Paradiso, per il tratto che va dal Gran Nomenon al Monte Herbetet. Nel corso delle mie ricerche ebbi la fortuna di scoprire alcuni lembi di terreni triasici e pretriasici compresi entro i calcescisti e le pietre verdi della zona mesozoica della Grivola, che presentano molto interesse dal punto di vista tettonico.

Il più importante di questi lembi è situato sopra il casotto di caccia di La Tour (Valsavarenche q. 2566), pressapoco al limite sud dell'altipiano compreso fra Bocconère di sopra e Leviona inferiore. La località suddetta è dominata da una grande parete di prasiniti leggermente quarzose, associate ad anfiboliti mal definibili e, un po' più verso nord, ad anfiboliti glaucofaniche granatifere. La parte inferiore di questa potente massa simica è laminata in modo incredibile, con formazione di abbondanti serpentine (m^1 della fig.); sotto questo piano di scorrimento affiora un banco di roccia calcarea, bianco-sporco-gialliccia, alquanto fogliettata e resa pulverulenta da evidenti azioni meccaniche (t della fig.). Il materiale in discorso è formato da calcite in assoluta prevalenza, a cui si associano in quantità subordinata: albite (con magnifici geminati polisintetici, tutti contorti e stracciati), muscovite, titanite, epidoto (scarso) e clorite (tracce). Questo banco non può rappresentare altro che un lembo di *Trias neritico* trasportato entro i sedimenti liasici e le intrusioni simiche di età alpina.

Sotto il Trias compaiono dei calcescisti grafitici tormaliniferi, che verso Leviona vanno aumentando considerevolmente d'importanza, mentre invece i calcari si assottigliano e ben presto spariscono. Degne di nota nei primi alcune bellissime pieghe anticlinali, inclinate o rovesciate a nord e dirette in complesso da NE a SO. Alla base dei calcescisti e in parte frammischiate con essi, riappaiono le serpentine, passanti verso l'alto a considerevoli masse talcoscistose (con calcite e forse un po' di sericite). Siamo quindi in presenza di una seconda linea di frizione (m^2 della fig.), ancora più notevole di quella prima ricordata. Le serpentine poggiano alla lor volta sopra un banco di micascisti gneissici potente 3-4 metri, tutto contorto e tormentato, con belle

(1) Presentata nella seduta del 4 dicembre 1927.

pieghe anticlinali del tipo sopradescritto. L'estremità nord di questo affioramento è appunto costituita da una di queste pieghe, la cui gamba superiore continua potente verso Leviona, mentre l'inferiore termina « sfilacciandosi » sul luogo. In varie parti dell'anticlinale e soprattutto nel nucleo, si trovano lembi ed apofisi di un materiale giallastro pulverulento, alquanto simile a quello che si riscontra più in alto, riferito al Trias, e frammischiato nella zona sfilacciata a pietre verdi dinamometamorfiche. Queste pietre verdi fan passaggio, a loro volta, ad una formidabile milonite (*m*³ della fig.) di sima e di rocce calcescitose (?), che continua un buon pezzo lungo la parete in direzione prima SE e poi E, separando i micascisti dalle sottostanti anfiboliti.

All'esame macroscopico il micascisto gneissico risulta nettamente tabulare, qua e là tutto contorto per l'eccezionale azione meccanica che si è fatta sentire sulla zona di La Tour. Esso è formato da quarzo microgranulare (abbondantissimo, con straordinari caratteri cataclastici, estinzione ondulata, ecc.), associato a muscovite, biotite ed epidoto con nuclei di ortite. Tra gli accessori ho notato: apatite, magnetite, granato roseo (qualche granulo) e clorite (tracce). Qua e là un po' di albite. La calcite non è abbondante, ma si trova sparsa in tutta la roccia, fra i granuli di quarzo. Ritengo questo *micascisto gneissico a due miche ed ortite* come una *scaglia pretriasica*, appartenente con ogni evidenza al ricoprimento della Dent Blanche e sperduta entro le formazioni del Mesozoico. Il banco dei micascisti si prolunga notevolmente sulla parete che domina il fianco destro di Val Leviona; poco oltre il casotto di caccia esso subisce una brusca inflessione verso il basso e quivi le serpentine assumono un considerevole sviluppo, mentre l'affioramento pretriasico diventa sempre più irregolare, discontinuo e con probabili « sfilacciamenti ».

Vicino ad un torrentello situato presso il sentiero Leviona-Tignet (q. 1900-2000 c. a., fianco sinistro della valle) esiste un micascisto, simile a quello di La Tour, ma meno quarzoso e assai più ricco di miche. Esso è formato da: quarzo, muscovite, clorite, epidoto ferriero, nuclei di ortite in epidoto, granato, titanite, magnetite e un po' di apatite.

Infine, sulla parte alta della parete est della Grivola, che domina il ghiacciaio del Trayo, ho trovato un micascisto molto ricco di quarzo, associato a numerose lamelle di muscovite con irregolare andamento scistoso. A questi due minerali si accompagnano in quantità subordinata: clorite, calcite ed epidoto e, come accessori, granato, apatite, tormalina e ossidi di ferro. Il banco micascistoso si continua con tutta probabilità anche sulla parete ovest della Grivola e precisamente nella parte scura centrale della fascia sedimentaria superiore.

I diversi parascisti qui descritti non trovano riscontro in nessuna delle numerose forme litologiche che fanno da copertura ai ricoprimenti del Gran S. Bernardo (IV) e del Gran Paradiso (V), mentre si avvicinano piuttosto

alle rocce gneissiche con ortite di alcuni lembi vicini del ricoprimento VI (Vérogne, Leynir, ecc.) scoperti da Hermann. Osservo per incidenza che non sono riuscito finora a trovare alcun nucleo di ortite in epidoto nelle varie rocce pretriasiche del Gran Paradiso.



Fig. A. — La regione di La Tour e la base della parete meridionale della P.ta Bianca, viste da Levione inferiore.

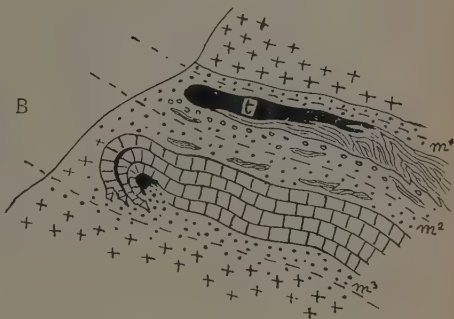


Fig. B. — Dettaglio del disegno A; affioramento triarico e lembo più settentrionale della scaglia sialica pretriasica, nella zona posta sopra il casotto di caccia di La Tour.



Intrusioni simiche di età alpina (prasiniti e anfiboliti glaucotatiche).



Serpentine.



Talcoscisti.



Calcescisti.



Trias neritico.



Micascisti gneissici.



Quaternario.

Tracce dei piani di scorrimento.

m^1 , m^2 , m^3 , zone di frizione.

Quando comunicai i primi risultati delle mie ricerche al dott. Hermann, egli non esitò a considerare il micascisto gneissico di La Tour come « una scaglia pretriasica di facies analoga a VI » e lo rappresentò come tale nei suoi grandi stereogrammi delle Alpi Valdostane Centrali⁽¹⁾. I successivi (1927) fortunati rinvenimenti del Trias di La Tour e del micascisto di Levionatignet, assieme ad uno studio più accurato del micascisto della parte alta della Grivola, hanno convalidato tale opinione in maniera definitiva. Questi

(1) F. HERMANN, *Stereogramma tettonico delle Alpi Valdostane centrali, segmento 2*, « Memorie Istituto Geologico di Padova », vol. VII, 1927.

fatti, già per loro stessi interessanti, assumono un significato molto più vasto se posti in relazione con le scoperte di Hermann e Raguin nell'alta Moriana, a Pied Montet (vallone di Lent, Bonneval) e nella valle di Avèrole. Secondo Hermann i lembi gneissici rinvenuti nelle località succitate sembrano essere la continuazione di quelli di Col Rossetto e di La Tour in Valsavarenche, rappresentando insieme lo « sfilacciamento » del prolungamento del lobo Monte Emilius della falda VI⁽¹⁾. In tale modo tutto o quasi tutto il Mesozoico della regione della Grivola viene a far parte della *nappe des schistes lustrés* di Termier (che Hermann ha dimostrato essere l'involucro frontale, in prevalenza mesozoico, del ricoprimento della Dent Blanche, bibl. 2), la quale nella regione da me studiata presenta una serie di scorrimenti e di complicazioni tettoniche che descriveremo in una prossima nota. La *nappe des schistes lustrés* in Valsavarenche può definirsi come un complesso di calcescisti con qualche nucleo triasico e pretriasico appartenenti al ricoprimento della Dent Blanche e, specie posteriormente, con nuclei apparenti passivi e passivamente intrusivi di pietre verdi.

La scoperta di questi lembi pretriasici e triasici nella zona mesozoica della Grivola viene a corroborare l'opinione già espressa da Hermann⁽²⁾ sul cosiddetto *faisceau vermiculaire* menzionato da Argand⁽³⁾ nelle A. Pennine e a precisarla nel senso che le lame e scaglie di Trias, mica-scisti e gneiss che si trovano qua e là nei calcescisti, non possono appartenere che al ricoprimento della Dent Blanche s. lato, cioè comprendente la *nappe des schistes lustrés*.

Mi è grato porgere pubblicamente i più vivi ringraziamenti al dott. Hermann e al prof. A. Bianchi, che facilitarono in tutti i modi i miei studi, guidandomi l'uno nelle ricerche geotettoniche e l'altro in quelle petrografiche.

(1) F. HERMANN, *La nappe de la Dent Blanche et la nappe des schistes lustrés en Maurienne et Tarentaise*, « Ecl. Geol. Helv. », XX, n. 4, 1927; sommario in « Actes S. H. S. N. », 108^e sess. Bâle, 1927. F. HERMANN, *Conceptions nouvelles sur la tectonique des Alpes Franco-italiennes*, « C. R. A. Sc. T. », 185, Parigi, 1927, p' 1204.

(2) F. HERMANN, *La struttura delle Alpi occidentali*, « Atti Soc. Ital. Sc. Nat. », LXIV, n. 3-4, Milano 1925, p. 245.

(3) E. ARGAND, *Sur l'arc des Alpes Occidentales*, « Eclogae Geologicae Helvetiae », XIV, 1^o luglio 1916.

Biologia. — *Sull'allevamento di termiti senza i protozoi dell'ampolla cecale*⁽¹⁾. Nota di G. MONTALENTI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

La necessità della presenza dei Flagellati (ord. Polymastigina e Hypermastigina) nell'ampolla cecale delle termiti perchè queste possano digerire la cellulosa è stata dimostrata recentemente dal Cleveland⁽³⁾, il quale ha provato pure che questi insetti possono vivere indefinitamente con una dieta di pura cellulosa. Questo A. ha sperimentato privando le termiti della fauna intestinale con opportuni artifici atti ad uccidere i protozoi senza danneggiare l'ospite (incubazione a 36° C per 24 ore, ossigenazione, digiuno) e nutrendole poi con cotone o carta da filtro Whatman. In breve tempo la colonia di termiti « defaunate » deperisce e muore (10 o 20 giorni), mentre termiti non private di flagellati vivono normalmente nelle stesse condizioni di esperimento. Se si infettano poi nuovamente termiti « defaunate » in modo da restituire loro i flagellati intestinali, esse si dimostrano ancora capaci di vivere indefinitamente con la sola dieta di legno o cellulosa. E la vita delle termiti prive di protozoi può pure essere prolungata nutrendole con *humus* o con cellulosa digerita da funghi.

La presenza dei protozoi nell'intestino delle termiti è collegata inoltre al problema del differenziamento delle caste. È noto che lo sviluppo degli organi genitali delle forme neoteniche (sessuati di complemento o di sostituzione) è preceduto dalla scomparsa dei protozoi dall'ampolla cecale. Secondo il Grassi⁽⁴⁾ tale sviluppo sarebbe determinato da una speciale dieta alimentare (nutrizione salivare) cui sono sottoposti alcuni individui della colonia, che si trovano in uno stadio di sviluppo più o meno avanzato. Le ricerche del Jucci⁽⁵⁾, dimostrando l'esistenza di un particolare metabolismo nei neotenici, portarono nuovi argomenti a favore di questa ipotesi, che era stata contraddetta da alcuni AA. (Snyder, Thompson, Bugnion⁽⁶⁾), i quali

(1) Dall'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. Federico Raffaele.

(2) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

(3) « Biol. Bull. », XLVI (1924), pp. 178-227.

(4) « Atti Acc. Gioenia di Catania », voll. VI e VII, ser. 4ª, 1893.

(5) « Mem. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XIV (1923), fasc. IX.

(6) SNYDER, « Un. St. Dep. of Agric. Bull. », 94, 1915; THOMPSON, « Journ. of Morphol. », vol. 30, (1917); « Biol. Bull. », vol. 36 (1919); « Journ. of Morphol. », vol. 36 (1922); SNYDER e THOMPSON, « Biol. Bull. », vol. 36 (1919); « Journ. of Morphol. », vol. 34 (1920); BUGNION, « Bull. Mus. Hist. Nat. », Paris 1914; « C. R. Soc. biol. », t. 72 (1913).

non attribuiscono alle termiti la capacità di formare, quando sia necessario, individui sessuati, sottoponendo ad uno speciale regime alimentare alcune larve, ma ritengono che i sessuati neotenici, detti dal Grassi di complemento e di sostituzione, appartengano a caste determinate fin dall'uovo.

La questione è tuttora discussa e mancano tuttavia prove sperimentali irrefragabili a favore dell'una o dell'altra teoria.

Si potrà forse giungere a qualche conclusione in proposito cercando di mantenere delle termiti in vari stadi di sviluppo in condizioni simili a quelle cui sono soggetti in natura gli individui destinati a diventare sessuati neotenici.

Ora, indipendentemente da qualunque preconconcetto sulla particolare dieta cui possono essere sottomessi i neotenici, è certo che questi, dal momento in cui iniziano il loro sviluppo in tal senso, hanno l'ampolla cecale sgombra di protozoi. Se questi due fatti, scomparsa dei protozoi e maturazione anticipata degli organi sessuali, siano fra loro in rapporto di causa ad effetto o se siano semplicemente fenomeni concomitanti derivati ambedue da una medesima causa, è questione tutt'altro che decisa. Il Grassi afferma che la scomparsa dei protozoi non è di per sè sufficiente a determinare lo sviluppo degli organi sessuali; il Brunelli⁽¹⁾ invece pensa ad una castrazione parasitaria. Crede cioè che la presenza dei protozoi eserciti un'azione inibitrice sullo sviluppo degli organi sessuali, e che la loro scomparsa consenta la normale formazione di questi.

In ogni modo il tenere le termiti ad un regime che consenta loro la vita coll'assenza dei protozoi, può forse portare qualche lume nella questione. Nessuno però dei metodi finora usati per produrre la scomparsa della fauna intestinale poteva considerarsi veramente soddisfacente. L'incubazione, come l'ossigenazione e il digiuno non possono certo paragonarsi alle condizioni normali, che determinano la scomparsa dei flagellati nelle forme neoteniche. E non mi riuscì di mantenere in vita con adatto nutrimento (*humus*, prodotti ternari solubili) le termiti così « defaunate », per un tempo sufficientemente lungo. Un altro metodo mi si dimostrò invece più opportuno: la nutrizione di termiti normali con idrati di carbonio solubili (amido solubile, glucosio, saccarosio, destrina). Con questo regime alimentare le termiti perdono infatti totalmente o in massima parte la loro fauna intestinale.

Dai molti esperimenti fatti con le due specie di termiti che si trovano in Italia, *Calotermes flavicollis* Fabr. e *Reticulitermes lucifugus* Rossi, e con diversi idrati di carbonio ho potuto ottenere risultati sicuri soltanto riguardo al *Calotermes*, che facilmente si può allevare in provette, mentre col *Reticulitermes*, assai più difficile ad allevare, non ho potuto avere che risultati incompleti.

(1) « Rend. Acc. Lincei », ser. 5^a, vol. XV, 1^o sem., p. 56.

Delle varie sostanze con cui ho sperimentato, ho subito dovuto scartare il glucosio e il saccarosio, perchè la igroscopicità di questi prodotti fa sì ch'essi divengano presto una fluida poltiglia in cui le termiti s'invischiano e muoiono. L'amido solubile, da solo e mescolato con glucosio, saccarosio ecc. e opportunamente inumidito si presta invece assai bene allo scopo e in esso ho potuto tenere prospere colonie di *Calotermes* (un centinaio di individui ciascuna) per parecchi mesi. Alcune di queste morirono poi per insufficienza di umidità, il cui grado è tanto più difficile da tenersi costante, in condizioni così diverse dalle normali.

Dopo tre o quattro giorni di questo regime si osserva una notevole diminuzione del numero delle Joenie e delle Mesojoenie dell'ampolla cecale. Di molte di esse si osservano le spoglie, che cadono probabilmente in preda ai succhi digestivi dell'intestino dell'ospite, altre appaiono in cattive condizioni, deformate e quasi immobili: non presentano più che un lento movimento del ciuffo di flagelli. Dopo una decina di giorni sono totalmente scomparse. L'ampolla, di dimensioni notevolmente ridotte, è allora popolata esclusivamente da Monocercomonadi (*Hexamastix termitis* Duboscq et Grassé) e dalle altre piccole forme di flagellati, *Trinitus*, *Janickiella*, *Trichomonas*, che Duboscq e Grassé⁽¹⁾ considerano come stadi di un sol flagellato *Janickiella Grassii* Duboscq et Grassé. Queste forme si conservano a lungo, ma vanno gradatamente diminuendo di numero, mentre l'ampolla si riduce sempre più di volume, finchè scompaiono totalmente o quasi.

Nel *Reticulitermes* sottoposto allo stesso trattamento, si ha pure la rapida scomparsa delle forme più grandi (*Trichonympha*), che vengono in un primo tempo sostituite dalla *Spirotrichonympha* che si moltiplica attivamente. Poi anche la *Spirotrichonympha* scompare e tosto le Dineninfie seguono la stessa sorte, e non rimangono infine che i piccoli flagellati, che si riducono a poco a poco di numero fino a totale scomparsa. In questo caso però i reperti sono meno sicuri perchè i *Reticulitermes* deperiscono con grande facilità nei nidini in provette e quindi altre cause, oltre a quella dell'alimentazione, potrebbero avere influenza sulla vita dei protozoi.

La scomparsa dei protozoi nelle termiti alimentate con prodotti ternari solubili deve forse attribuirsi al fatto che, non essendo più ingeriti dall'ospite prodotti solidi, essi non possono più nutrirsi, mentre l'ospite continua ad avere a sua disposizione gli stessi elementi che formano il suo nutrimento abituale, presso a poco nella stessa forma in cui l'intestino li assorbe in condizioni normali. Si riuscirebbe quindi in tal modo a far digiunare e morire di fame i protozoi senza togliere il nutrimento alle termiti.

Se questa condizione sia, o meno, equivalente a quella che si verifica in natura nell'alimentazione dei neotenici, è difficile poter affermare, certo lo è più che ogni altra finora ottenuta con l'esperimento, e lo studio

(1) «C. R. Soc. Biol.», t. XC (1924), p. 1442.

istologico delle termiti mantenute in queste condizioni potrà forse dare nuovi elementi per la risoluzione della questione della determinazione delle caste, e può riuscire utile anche per conoscere qual'è per le termiti la sorgente dell'azoto proteico. L'esperimento dimostra infatti che questi insetti sono capaci di vivere indefinitamente con un regime esclusivamente cellulosico, purchè siano presenti i protozoi, e per un tempo abbastanza lungo, se non indefinitamente, con un regime alimentare di idrati di carbonio solubili e in assenza di protozoi. Se anche in quest'ultima condizione le termiti si dimostrassero capaci di vivere e di svilupparsi, bisognerebbe concludere col Cleveland che questi insetti possono usufruire dell'azoto atmosferico direttamente o per mezzo dei batteri che ospitano, insieme coi protozoi, nell'ampolla cecale.

Zoologia. — *Ancora sulla organizzazione e le caratteristiche funzionali dell'attività nervosa dei Tunicati. III. Il sistema nervoso viscerale.* Nota di M. FEDELE, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

In due mie precedenti Note, pubblicate negli Atti di questa Accademia ⁽²⁾, ho cercato di dare, in modo molto sintetico, un quadro del sistema nervoso periferico e delle attività riflesse degli *Ascidieace* a complemento di quanto avevo già espresso, in miei precedenti lavori ⁽³⁾, sul sistema nervoso dei *Thaliace* e a prova della unità di piano, da me sostenuta, per la organizzazione nervosa di tutti i Tunicati.

Nelle due Note accennate, oltre a mettere, fra le altre cose, per la prima volta nella sua vera luce il sistema nervoso periferico delle ascidie, mi opponevo alla comune corrente che attribuiva al ganglio di questi animali un valore subordinato per i riflessi, ritenendo come solo indispensabili per tali riflessi reti nervose fibro-cellulari periferiche, in modo che l'organizzazione nervosa di questi animali fosse da considerarsi ancora in parte una forma diffusa primitiva, e dimostravo che reti nervose fibro-cellulari, sotto forma di neuro-epitelio che possano permettere veri riflessi, per la

(1) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

(2) FEDELE MARCO, *Sulla organizzazione e le caratteristiche funzionali dell'attività nervosa dei Tunicati. I. Ricerche sul sistema nervoso periferico degli Ascidieace*. «Atti R. Accademia Lincei. Rend.», vol. 32, ser. 5^a, pp. 98-102; IDEM, *Ancora sulla organizzazione e le caratteristiche funzionali dell'attività nervosa dei Tunicati. II. Attività riflesse ed effettori autonomi negli Ascidieace*. Ibidem, pp. 184-188.

(3) FEDELE MARCO, *Un nuovo organo di senso nei Salpidei*. «Monit. Z. Ital.», anno 31, p. 10, tav. 3; IDEM, *Le attività dinamiche ed i rapporti nervosi nella vita dei Dolioli*. «Pubbl. Staz. Z. Napoli», vol. 4, 1923, pp. 129-240, tav. 3; IDEM, *Simmetria ed unità dinamica nelle catene di Salpa*. «Boll. Soc. Naturalisti Napoli», vol. 35, anno 1923, pp. 20-33.

muscolatura generale del corpo, all'infuori del ganglio nervoso, non esistono in *Ciona*, come non esistono per i *Thaliacea*.

Con ciò, espressi esplicitamente, non intendevo escludere la esistenza di reti o plessi nervosi, possedenti un certo grado di autonomia, in altre parti del corpo e con altri rapporti e funzioni, come avevo dimostrato e messo per primo in luce per le disposizioni viscerali di *Salpa*; formazioni che, in luogo di essere segno di primitività nel complesso della organizzazione nervosa degli animali che le posseggono, sono connesse, per il loro territorio di distribuzione e i compiti ben determinati, con una maggiore complicazione e differenziazione organica.

Con l'intento di chiarire questa riserva e con lo scopo anche di mettere definitivamente in luce questa parte tanto importante della organizzazione nervosa dei Tunicati, darò in questa Nota un cenno sintetico, ma sufficiente per farsene una idea precisa, della trama nervosa viscerale degli *Ascidacea* come dei *Thaliacea*, che io ho potuto bene studiare, vincendo non lievi difficoltà tecniche.

Nelle Ascidie (esporrò per esse i fatti riferentisi specialmente alla *Ascidia intestinalis*) e nelle Salpe il sistema viscerale si collega ampiamente con il ganglio centrale, e nelle prime è in rapporto con il cordone cellulare dorsale, un organo che visto per la prima volta da Kowalewski⁽¹⁾ in *Didemnum styliferum* (*Distaplia magnilarva*) e in giovani esemplari di *Phallusia mammillata* e *Ciona canina*, fu riscontrato più tardi da Van Beneden e Julin⁽²⁾ in altre forme (*Molgula ampulloide*, specialmente, *Microcosmo*, *Polycarpa* e in stadi molto giovanili, da poco fissati, di *Clavelina Rissoana*) ribadito posteriormente dagli stessi⁽³⁾ in *Phallusia scabroides* e generalizzato dal Metcalf⁽⁴⁾ per le Ascidie sia semplici che composte, mettendone in evidenza, per diverse specie, le varietà di comportamento. In complesso, però, e malgrado la importanza che Van Beneden e Julin avevano attribuito a quest'organo degli ascidiacei, che credevano dovesse costituire una parte importante del sistema nervoso centrale degli animali di questo gruppo, e non solamente un semplice organo rudimentale, esso è rimasto ancora molto oscuro nella sua distribuzione come nella entità di sviluppo e nella intima costituzione, e non ha attirato tutta la attenzione degli studiosi, forse per la grande

(1) KOWALEWSKY A., *Ueber die Knospung der Ascidien*, « Arch. mikr. Anat. », Bd. 10 (1874), pp. 441-470, tav. 30-31 (vedi sp., p. 446 e fig. 1).

(2) VAN BENEDEN E. e JULIN CH., *Le système nerveux central des Ascidies adultes et ses rapports avec celui des larves urodèles* « Arch. de Biologie », vol. 5, pp. 317-367, tav. 1, 4-19; e anche: « Bull. Ac. Royale Belgique », S. 3, to. 8 (anno 1884), pp. 13-72, tav. 1-4.

(3) VAN BENEDEN E. e JULIN CH., *Recherches sur le développement postembryonnaire d'une Phallusie. « Phallusia scabroides » nov. sp.* « Arch. de Biologie », to. 5 (1884), pp. 611-638, tav. 33 (vedi sp. pp. 633-634, f. 1).

(4) METCALF M. M., *Notes on the Morphology of the Tunicata*. « Zool. Jahrb. », Bd. 1, 3, pp. 495-602, tavv. 3-40 (vedi sp., pp. 497-498).

variabilità che si è creduto riscontrare nel suo comportamento, sicchè anche recentemente si è continuato a ritenerlo un organo rudimentale, che ha perduta tutta la sua importanza per l'adulto ⁽¹⁾.

Ritornero analiticamente, in altro luogo, su questo argomento; dirò qui solo che anche in *Ascidia intestinalis*, per la quale non troviamo cenno chiaro nemmeno in quelli che hanno più particolarmente trattato delle parti in rapporto con il territorio del rafe negli Ascidiacei, come il Metcalf, quest'organo, invece di abortire, prende nell'adulto (ho studiato individui anche più di 15 cm. di lunghezza) via via maggiore sviluppo e consistenza e si connette con un ricco apparato nervoso viscerale, che è sfuggito agli autori, e che rappresenta per i suoi rapporti, per la struttura distribuzione e funzionalità, il sistema nervoso simpatico di questi animali.

Questo nuovo apparato è quello al quale io annetto preminente importanza funzionale nel senso indicato, e la sua compagine, che si presenta analoga per genesi, rapporti, territorio di distribuzione e funzionalità in tutti i Tunicati, si sviluppa e si arricchisce, invece di ridursi, negli individui adulti e di grossa mole, e risulta in complesso, con ogni evidenza, costituita da una massa di elementi nervosi, non inferiore per ricchezza numerica a quella racchiusa nel ganglio centrale, sovrintendente alla vita di relazione.

Il cordone si origina in *Ciona* dalla parte inferiore destra del ganglio e, incrociando il grosso tronco nervoso posteriore di questo lato, si porta, con una curva ad S, verso il centro della forca formata dai grossi tronchi posteriori, ponendosi fra i tronchi nervosi profondi branchiali, che più non abbandona, e, addossandosi alla parete dorsale del seno sanguigno perigangliare, va all'indietro, seguendo la linea mediana cloacale del vaso dorsale, al quale è unito per quasi l'intero suo percorso, passando sotto il deferente e l'ovidutto, poi sotto a questi organi e all'intestino terminale, per spingersi poi fra l'ansa intestinale, raggiungendo il nucleo, ai cui organi, oltre che al sacco branchiale, provvede la innervazione, per la parte che gli compete, ricevendo questi organi fibre anche dal nervo branchiale.

Non dando figure è inutile diffondermi in descrizioni; basterà il poco detto per individuare le formazioni in esame. Lo studio degli apparati nervosi connessi al vaso rafeale non è facile e, sulle sezioni e senza uso di opportuni metodi tecnici, esse sfuggono facilmente, come sono sfuggite finora, alla ricerca. Per poterle ben mettere in evidenza e studiare, bisogna fissare e colorare l'animale in perfetta estensione e poi, con accurata dissezione, isolare il piccolo vaso e studiarlo o per intero o stendendone la parete, aderente alla quale corre buona parte dell'apparato nervoso viscerale, longitudinalmente aperta, fra due vetri.

(1) SEEHGER O. e HARTMEYER R., *Tunicata, I Abt. Die Appendicularien und Ascidien*, «Bronn's Tier-Reichs», 3 Bd. Suppl., anno 1911 (vedi sp. p. 296).

L'apparato nervoso, che si può allora studiare in tutta la trama pertinente a questa parte⁽¹⁾, si vede composto dal cordone cellulare che corre centralmente, formando come l'asse di tutto l'apparato, da ricchi fasci fibrillari laterali, in rapporto con gli accennati nervi branchiali, che corrono longitudinalmente, a qualche distanza, parallelamente al cordone, e da una ricca trama fibro-cellulare, che involge tutto, correndo dai fasci fibrillari laterali al cordone centrale ed in intimi rapporti con questo e con i primi; questa ricchezza di elementi nervosi si prolunga fino agli organi del nucleo viscerale, dove formano un centro cospicuo destinato alla loro innervazione.

La ricchezza degli elementi lungo il rafe dorsale è in rapporto con il grande sviluppo che, nella massa organica degli Ascidiacei, prende il sacco branchiale e con il dinamismo attivissimo spiegato dalle ciglia di quest'organo, alla regolazione delle quali in parte provvede, oltre a mettersi in rapporti con il chimismo secretivo dell'endostilo e degli organi connessi con la cavità branchiale.

La massa viscerale intranucleare è in rapporto con l'intestino, con le gonadi e l'apparato sessuale e con il cuore.

Ho studiato queste formazioni nella *Ciona (Ascidia) intestinalis* nelle loro più minute particolarità istologiche, ma non intendo scendere qui in particolari, ma fermare questo lato della organizzazione dei Tunicati nella sua forma più essenziale e nel suo significato.

Per i *Thaliacea* mi riferirò, per fermare le idee, alle disposizioni riscontrabili specialmente in *Salpa confederata*, avvertendo che tali disposizioni sono estensibili, nella loro parte essenziale, alle altre specie (13) da me studiate.

Le più ricche trame di questa parte importantissima del sistema nervoso noi le vediamo, anche nei *Thaliacea*, in rapporto con organi a intensa attività ciliare e secretiva, come l'endostilo e il nastro periesofageo, la branchia, nonché la parte anteriore dell'intestino esofageo-gastrico e con il canale deferente; il quale ultimo è connesso con una massa nervosa, che può ben chiamarsi ricchissima, in confronto della tenue mole di quest'organo. La parte principale della massa neuro-cellulare del simpatico è in rapporto principalmente con il territorio posto nell'ambito della fascia ciliare, che va dall'estremo inferiore dell'endostilo all'esofago, con il margine dell'imbuto esofageo e territori circonvicini di quest'organo, e con la superficie della lamina di attacco della branchia sull'esofago.

Nella *Salpa democratica* le disposizioni strutturali, alquanto più semplificate rispetto alle altre specie, e più facilmente diagnosticabili, sono, topograficamente, essenzialmente simili a quelle sommariamente qui accennate per *S. confederata*, presentando solo un leggero spostamento gli ammassi

(1) Per i metodi da me usati nello studio del sistema nervoso periferico dei Tunicati, vedi i miei lavori precedenti già citati.

principali fibro-cellulari verso la lamina branchiale, avviluppante l'apertura esofagea. Così nelle altre specie, meno simili spostamenti e aggruppamenti, facilmente comprensibili con le diversità anatomiche e di massa di esse, la conformazione degli apparati nervosi viscerali, nella *democratica*, nella *confoederata*, nella *Cyclosalpa pinnata* e nella *polae* come nelle altre *Salpae* e *Cyclosalpae*, si presenta con modalità strutturali uguali; modalità che corrispondono essenzialmente a quelle degli *Ascidieae*: cellule di varia forma bi o-multipolari con prolungamenti vari e irregolari, ma caratteristici, connettenti da una parte le varie cellule fra loro, e dall'altra distribuentisi ai vari organi cui servono e prendendo, infine, connessioni con ben determinati nervi che arrivano ad esse, nelle Salpe, dal ganglio centrale, da una parte lungo il nastro ciliato e l'endostile e dall'altra lungo il cordone branchiale; percorso, questo, in tutta la sua lunghezza da un cospicuo nervo originantesi dalla parte posteriore del ganglio centrale e portantesi ai visceri, e che, per i rapporti con gli elementi simpatici e per il territorio di distribuzione, può ben a ragione chiamarsi, più che nervo branchiale, nervo branchio-viscerale.

Questi rapporti con i considerevoli fasci nervosi branchiali sono evidenti e caratteristici anche negli Ascidieci, dove le condizioni si complicano alquanto per i rapporti che il nervo branchio viscerale prende con speciali organi di senso posti nella cavità cloacale lungo il rafe, sicchè, a parte le ovvie differenze nei particolari, le cose si presentano essenzialmente in modo uguale in tutti i Tunicati.

Debbo aggiungere che le accennate particolarità differenti nei gruppi e nelle differenti specie di essi, non intaccano, dal punto di vista generale, i punti cardinali che definiscono questo lato della organizzazione, e cioè i rapporti centrali, il territorio di distribuzione e l'intima natura strutturale e funzionale, che rimangono essenzialmente caratteristici in tutti; mentre le peculiarità strutturali, pur varie nelle singole specie, si presentano con grande costanza di disposizioni, giungenti fino a minutissimi particolari anatomici ed istologici, nell'ambito dei vari e numerosissimi individui da me studiati per ciascuna specie; avvertendo che, risultando i rapporti di continuità fra elementi cellulari e fibre nervose, con i metodi da me adoperati, netti e completi, è possibile fare di essi un esame approfondito in tutti i loro particolari, sia nei riguardi della continuità delle vie nervose (elemento essenziale di decisione in questo genere di ricerche) sia nei rapporti con gli altri tessuti del corpo, in contatto dei quali essi son posti.

Resta così fissata quest'altra parte del sistema nervoso dei Tunicati e, richiamando quanto ho già esposto nelle mie precedenti pubblicazioni, posso, a modo di conclusione, ribadire che i nostri concetti sul sistema nervoso di questo gruppo di animali vanno fermati nel modo seguente:

I Tunicati posseggono un sistema nervoso per la vita di relazione di natura perfettamente sinaptica, con ben distinto e raccolto

centro, posto nel ben noto ganglio centrale e le cui stazioni periferiche, sensitive e motorie, sono connesse in modo determinato e sperimentalmente isolabili con il centro; ed inoltre un sistema nervoso viscerale ricco e complesso, diffuso in territori ben determinati ed esclusivamente viscerali, sotto forma di reti fibro-cellulari, che sovrintende alle funzioni della vita vegetativa e con il quale il centro superiore ha rapporti per il tramite del nervo branchio-viscerale.

I rapporti di regolazione centrale non tolgono a questa parte da me illustrata del sistema nervoso dei Tunicati, tutta la sua autonomia e, con l'asportazione del ganglio centrale o con la interruzione delle comunicazioni dei due sistemi, i visceri conservano in loro centri nervosi autonomi per la loro attività; mentre l'asportazione del ganglio o la interruzione dei rapporti fra questo ed una qualsiasi delle parti sensitive o motorie in rapporto alla vita di relazione, esclude assolutamente la possibilità dei relativi riflessi.

Embriologia sperimentale. — *La capacità lentogena della vescicola ottica negli embrioni di Anfibi e l'« organizzatore » del cristallino* ⁽¹⁾. Nota di P. PASQUINI presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Con il termine di « Organisator » lo Spemann e la sua scuola hanno inteso indicare l'insieme delle potenze organo-formatrici possedute da alcuni territori embrionali che sono capaci di determinare, nell'ontogenesi degli Anfibi, il differenziamento degli abbozzi di alcuni organi.

L'analisi dei fenomeni relativi alla natura degli « organizzatori » trova il suo riscontro nel primo esperimento del Lewis ⁽³⁾ che isolò in *Rana palustris*, l'organizzatore rappresentato dal labbro dorsale del blastoporo in embrioni nello stadio di gastrula.

Il modo di essere di un « organizzatore » è reso evidente dal classico esperimento di trapianto di Spemann e Mangold ⁽⁴⁾ che ottennero, negli Urodeli, doppi embrioni per mezzo del trapianto del labbro dorsale del blastoporo sul fianco di una gastrula nella quale venivano a differenziarsi da un lato, nel successivo sviluppo e come formazioni secondarie, la corda dorsale, un tubo midollare, i somiti ed il pronefro. Questa proprietà dell'or-

(1) Dall' Istituto di Zoologia della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

(3) LEWIS W., *Transplantation of the Lips of the Blastopore in Rana palustris*. « Amer. Jour. of Anatomy », vol. 7, 1907, b.

(4) SPEMANN H. e MANGOLD H., *Ueber Induktion von Embryonalanlagen durch Implantation artfremder Organisatoren*. « Arch. f. mikroskop. Anat. u. Entwicklungsmech. » Bd. 100, 1924.

ganizzatore del blastoporo si estrinseca sia nei trapianti omeoplastici che in quelli eteroplastici come è il caso di embrioni di *Rana* indotti su *Triton*, ma sempre che si compia il trapianto della regione mediana del labbro dorsale del blastoporo, la corda dorsale si origina a spese del tessuto innestato, mentre il tubo midollare è indotto a differenziarsi dalle cellule dell'embrione ospite.

La formazione dell'embrione indotto sull'embrione ospite dell'innesto, in seguito al trapianto del labbro dorsale del blastoporo, non sembra essere derivata da un' induzione differenziale della parte invaginata, l'endoderma che tappezza l'archenteron, e di quella zona propria del labbro poichè il Geinitz⁽¹⁾ potè trapiantare i due differenti territori in diversi embrioni causando in ambo i casi lo sviluppo del tubo midollare.

Ma il comportamento del così detto « organizzatore » è ancora più chiaro all'analisi dei fatti seguenti: se in una gastrula di *Triton* (gli esperimenti sono stati compiuti recentemente dallo Spemann e dal Geinitz fra *T. taeniatum* e *alpestris* e *T. cristatus*), si trapianta l'ectoderma che rappresenta la futura epidermide ventrale dell'embrione, nella zona del labbro dorsale del blastoporo dove ha luogo l'introflessione, il tessuto impiantato si differenzia nella parete dorsale dell'archenteron. E lo Spemann e il Geinitz⁽²⁾ hanno osservato come il tessuto trapiantato nella nuova sede, acquisti una nuova determinazione tale che ritrapiantato nel territorio blastoporale di un altro embrione ospite, viene ad assumere un nuovo potere organo-formativo diverso da quello originario. Queste capacità si debbono ritenere sorte nel pezzo innestato sotto l'influenza dei territori adiacenti alla nuova sede temporanea dell'impianto, capacità che forse sono già latenti nell'abbozzo e che soltanto nelle nuove condizioni si vengono a tradurre in atto.

Premesse queste notizie e volendo ora precisare il concetto esposto in principio di questa Nota, l'« organizzatore » si deve intendere come qualche cosa di più di un insieme di potenze organo-formative latenti in alcuni territori cellulari embrionali e cioè come uno stimolo che possono esercitare quelle cellule capaci di determinare il differenziamento degli abbozzi degli organi, nei territori adiacenti.

Mentre nel labbro dorsale del blastoporo lo Spemann vede l'organizzatore primario determinante diretto dell'insorgenza delle forme dell'embrione, l'organizzatore che è invece rivelato dalla capacità che possiedono cellule della futura epidermide ventrale dell'embrione di differenziarsi in un primo tempo nella parete dell'archenteron e secondariamente di indurre la formazione della piastra midollare, è definito dallo Spemann come organizzatore secondario o di secondo ordine (*Organisator zweiter Ordnung*).

(1) GEINITZ B., *Embryonale Transplantation zwischen Urodelen und Anuren*. « Archiv f. Entwicklungsmech. », Bd. 106, 1925 a.

(2) SPEMANN H. e GEINITZ B., *Ueber Weckung organisatorischer Fähigkeiten durch Verpflanzung in organisatorische Umgebung*. « Archiv f. Entwicklungsmech. », Bd. 109, 1927.

Senza volere indagare il meccanismo del funzionamento degli organizzatori, vediamo come questi risultati debbano essere presi in speciale considerazione nella spiegazione di altri fenomeni relativi allo sviluppo di alcune parti dell'embrione, negli Anfibi, in dipendenza delle formazioni adiacenti. Intendo alludere, nel caso speciale delle mie ricerche, a quelle relazioni di interdipendenza che si osservano nello sviluppo, fra vescicola ottica, calice ottico e lente.

Espongo brevemente i risultati principali di alcuni miei esperimenti su *Rana esculenta*:

Se si asporta interamente la vescicola ottica di un lato, in embrioni di stadî corrispondenti al primo abbozzo del bottone codale, essa non si rigenera affatto e soltanto qualora non venga rimossa l'intera vescicola, si può verificare la regolazione del materiale già determinato come abbozzo oculare, in un piccolo occhio rudimentale che si presenta massiccio senza traccia d'introflessione del calice ottico. In questo caso le cellule dell'abbozzo oculare residue nell'embrione operato, seguono due direzioni di accrescimento e di differenziamento originando o una massa centrale costituente il nucleo retinico, circondata da cellule del *tapetum*, o la massa centrale giunge a differenziarsi nei diversi strati. Quest'occhio rudimentale manca di lente poichè nell'operazione è stata anche compiuta l'asportazione di quel lembo di epidermide che ricopre la vescicola ottica e contenente il territorio lentogeno.

La mancata formazione della lente si osserva anche quando dopo l'asportazione incompleta della vescicola ottica i gruppi cellulari residuati giungono ad introflettersi in un calice ottico rudimentale, ma normale nel differenziamento della retina e del *tapetum* ciò che sta ad indicare che la vescicola ottica primaria non è ancora determinata nelle sue parti e si deve considerare come equipotenziale nei suoi vari territori.

Se si trapianta la vescicola ottica primaria con l'ectoderma lentogeno sopraoculare in sede dell'otocisti, in un altro embrione di *Rana* dello stesso stadio (bottone codale appena accennato), la vescicola ottica trapiantata si introflette in calice ottico e avviene anche la formazione della lente dall'ectoderma trapiantato.

L'alto potere di autodifferenziamento della vescicola ottica primaria in *Rana esculenta* si manifesta allorchè essa venga trapiantata in una sede completamente diversa dalla normale come ad es. nel territorio endodermico dell'abbozzo delle tasche branchiali. La vescicola ottica e l'ectoderma sopraoculare si differenziano in questo caso nella retina e nella lente e per quanto si riduca al minimo la porzione di vescicola ottica utilizzata nel trapianto, l'ectoderma lentogeno innestato nell'abbozzo delle tasche branchiali si differenzia indipendentemente in una lente di struttura normale.

Tenendo conto che in molte specie di Anfibi l'origine delle lente è indipendente nel suo sviluppo dalla vescicola ottica, lo Spemann è venuto recentemente a considerare il calice ottico come l'*organizzatore* della lente

o organizzatore in 2° ordine. Esso agirebbe come l'organizzatore della piastra midollare, esercitando uno stimolo per l'introflessione delle cellule del territorio lentogeno, stimolo che verrebbe a mancare quando la vescicola ottica viene asportata, ma che viene sostituito, nei casi di autodifferenziamiento, dalle potenze che sono intrinseche all'abbozzo.

Ho già riferito ⁽¹⁾ sui risultati di miei esperimenti analoghi condotti in *Pleurodeles* dove si può con certezza ritenere che la lente per la sua origine è influenzata, almeno per un certo tempo, in modo esclusivo dalla vescicola ottica. Detta capacità induttiva della vescicola ottica sull'ectoderma sopraoculare viene ad essere esercitata in *Pleurodeles*, talora anche in territori diversi dal normale, ma agisce in maniera tipica sull'epidermide del capo, come il così detto organizzatore della lente.

Tuttavia mentre in *Pleurodeles* anche un piccolo calice ottico rudimentale, derivato da frammenti residuati della vescicola ottica asportata, può, se in prossimità dell'epidermide indurre la formazione della lente (funzionando come un organizzatore), in epidermide diversa e non destinata a divenire tale, in *Rana esculenta* ciò non accade poichè un calice ottico ridotto non ha mai determinato, negli esperimenti che fino ad oggi ho compiuti, nell'epidermide che lo ricopre, la formazione della lente.

Questa evidente contraddizione io credo debba farci soprassedere sull'interpretazione da attribuire all'« organizzatore » di Spemann per l'occhio, poichè a prescindere dal significato che sembra volerci indicare il termine, è fuor di dubbio che lente e calice ottico siano intimamente connessi nel loro sviluppo e che l'uno dipenda dall'altro fin'anche nei casi dove si verifica con sicurezza l'autodifferenziamiento del territorio destinato a differenziarsi come lente. Il vario comportamento dei due abbozzi negli Anuri e negli Urodeli e fra le stesse specie di ambedue i gruppi, ci fa rimanere perplessi e sembra indicarci che fra i due tipi di differenziamiento degli abbozzi in questione, non esiste una vera e propria netta separazione. D'altra parte come poter stabilire fino a che punto agisce l'organizzatore rappresentato dalla vescicola ottica e quando intervengono le capacità intrinseche all'ectoderma lentogeno rendendolo atto ad autodifferenziarsi? Questo problema già, in un mio precedente lavoro ⁽²⁾ ebbi occasione di esaminare, esprimendomi così: « probabilmente anche in *Pleurodeles*, in uno stadio di primitiva determinazione, quando ad es. ancora le pieghe midollari non sono chiuse... l'ectoderma è capace di autodifferenziamiento e questa facoltà poi si perde con il circoscriversi delle potenze formative di queste aree dell'ectoderma cefalico dell'embrione ».

(1) PASQUINI P., *Trapianti omeoplastici degli abbozzi oculari degli embrioni di Pleurodeles waltli*. «Rend. R. Accademia dei Lincei», vol. V, 1927.

(2) *Ricerche di embriologia sperimentale sui trapianti omeoplastici della vescicola ottica primaria in Pleurodeles waltli. (I processi di regolazione e di differenziamiento nella fusione degli abbozzi oculari e l'origine della lente)*. « Bollettino dell'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma », vol. V, 1927, Anno VI.

Io suppongo che nel caso particolare di *Pleurodeles waltli* e *Rana esculenta* — e ciò mi sembra possa valere per le altre specie considerate negli esperimenti di Lewis, Spemann, Ekmann, Ubisch, ecc. — la discrepanza dei risultati debba ricercarsi in un eterocronismo nella determinazione degli abbozzi che hanno un potere indipendente di accrescimento e di differenziamento quando sono più precocemente fissati nell'embrione; e che in *Pleurodeles* ad es. questa determinazione, seguita dal differenziamento fisiologico delle cellule che vanno acquistando quella loro caratteristica specializzazione, sia più tardiva come in tutte quelle altre specie che presentano uno sviluppo della lente dipendente dalla vescicola ottica.

Questa differenza nel tempo della determinazione degli abbozzi embrionali, che io reputo più particolarmente responsabile della discrepanza di reperti sulla genesi del cristallino, rientra nel concetto più generale del Cotronei ⁽¹⁾ il quale ammise che fra gli abbozzi degli organi, nello sviluppo, intercedono particolari relazioni spaziali. Queste, diverse nelle varie specie, possono differentemente venire mutate dall'esperimento, e quindi dare luogo a risultati apparentemente opposti, ma principalmente tali relazioni spaziali cambiano nel tempo e stabiliscono nuove correlazioni fra gli organi in via di sviluppo.

Esperimenti ulteriori che mi propongono di compiere su *Rana esculenta* la prossima primavera, asportando la vescicola ottica e lasciando in posto il terriorio lentogeno, in differenti stadi di sviluppo, spero possano fornirmi ulteriori elementi per una migliore conoscenza dell'interessante problema.

Genetica. — *Un caso di « incompleta dominanza » nella xenia del Mais.* Nota di R. SAVELLI ⁽²⁾, presentata ⁽³⁾ dal Socio B. LONGO.

La scuola di Bateson ha sempre sostenuto che la *incompleta* o *imperfetta dominanza* è un fenomeno che non si ripercuote sul grado di perfezione con cui si compie la segregazione degli allelomorfi nel passaggio alla successiva generazione.

È illegittimo supporre che la dominanza sia un fatto essenziale del mendelismo: la vera pietra basilare del mendelismo è la *disgiunzione*, su cui la dominanza più o meno perfetta non ha influenza (cfr. Bateson, *Mendel's Principles of Heredity*, Cambridge, 1913, p. 53).

Invero, se io considero anche i più recenti reperti, trovo sempre più evidente che la dominanza è un fatto somatico, e come tale può essere

(1) COTRONEI G. *Sulla morfologia causale dello sviluppo oculare. (Verifica sperimentale sul Bufo vulgaris delle ricerche di Carlo Rabi).* Ricerche di Morfologia, Vol. II fasc. I, 1921.

(2) Lavoro eseguito nella R. Stazione di Bieticoltura in Rovigo.

(3) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

influenzato nelle sue estrinsecazioni dall'ambiente, o può esser deviato da condizioni accidentali che intervengano nel corso dell'ontogenesi. La *disgiunzione*, invece, non riguarda il « carattere », riguarda la « gene » in sè. Il « carattere » deriva da una reazione delle « gene » tra loro e con l'ambiente in cui l'organismo si sviluppa: perciò può essere, per esempio, che un carattere abbia facoltà di estrinsecarsi soltanto al di sopra di una data temperatura: se si tratta di un carattere dominante è chiaro che questa sua dominanza sarà, in atto, subordinata alla temperatura.

Uno dei casi più tipici di dominanza incompleta è quello illustrato dall'Hurst, il quale incrociò polli « Houdan », pentadattili, con polli « Livorno », « Amburgo » e « Cocincina » tetradattili. Nelle centinaia di casi studiati la pentadattilia mostra dominanza imperfetta, cioè esplicantesi in tutti i gradi: dal dito soprannumerario in ambo i piedi, o in un piede solo, o saldato variamente con uno dei diti ordinari, si arriva alla manifestazione di una semplice duplicatura dell'unghia, o di un allungamento dell'alluce per aumento di falangi, finchè si giunge a casi somaticamente normali, schiettamente tetradattili, che si prenderebbero per recessivi puri. Questi animali eccezionali sono stati senza dubbio generati col concorso di un gamete portante un carattere dominante il quale, in atto, non ha dominato: rientra nel quadro della *meccanica dello sviluppo* l'indagine delle ragioni contingenti, delle cause attuali che hanno impedito in modo così assoluto l'estrinsecazione di questo potenziale quinto dito; ma ciò che più interessa alla genetica è di sapere se questi eterozigoti (*Dr*) si comportino come tali nonostante il loro sconcertante aspetto che li fa scambiare per individui (*rr*).

Per fortuna due di questi animali erano maschio e femmina, e l'Hurst ha potuto dare la dimostrazione completa del loro comportamento eterozigotico e della produzione, da parte di ciascuno di essi, di gameti di due sorta, dei quali una metà portano la « gene » determinante il dito soprannumerario. In altre parole, l'anomalia di dominanza non determina in questi animali nessuna anomalia di disgiunzione (Hurst, *Experiments with Poultry*, in « *Experiments in Genetics* », Cambridge, 1925, pp. 214-238).

Io sono ben lieto di portare un sia pur lieve contributo in appoggio di queste chiare vedute della scuola inglese.

Nel corso di esperienze sul Mais ho ibridato le infiorescenze femminili di una *Zea mais* zuccherina bianca, col polline di una *Zea rostrata*, che in confronto della prima portava tre caratteri dominanti: *natura amilacea della riserva*, *color giallo dello strato corneo*, *color nero-violaceo dello strato ad aleurone*.

Questi caratteri, riguardando l'albumo, si estrinsecano immediatamente sulle cariossidi generate dal polline di questa *Zea rostrata*, e, nella grandissima maggioranza di esse, la xenia è affatto uniforme, cioè le cariossidi prodotte sono identiche tra loro per l'intensità dei caratteri dominanti. Ma alcune poche cariossidi fanno eccezione, poichè il colore nero-violaceo dello

strato ad aleurone si interrompe in più punti per dar luogo a marmorizzate gialle che sono dovute al colore dello strato corneo sottostante, che si vede per trasparenza.

Si ricorderà che il Webber, per spiegare le screziature degli albumi ibridi, ebbe ad emettere la ingegnosa ipotesi che ciò sia dovuto all'incompletezza della triplice fusione che dà luogo al nucleo primario dell'albumo, ed alla facoltà di divisione indipendente di questi tre nuclei, il che porterebbe ad una sovrapposizione di tessuti d'origine puramente paterna o puramente materna i quali, se caratterizzati da colori diversi, darebbero l'aspetto screziato che si tratta di spiegare.

Pur riconoscendo che la spiegazione del Webber ha molte ragioni di appoggio e può esser vera in molti casi, qui nel caso nostro la fortunata combinazione di aver usato simultaneamente tre caratteri dominanti, ci pone in grado di dimostrare che l'ipotesi del Webber non può applicarvisi: difatti, se si trattasse di mistione di tessuti di origine amittica, e perciò a puri caratteri paterni o materni, si dovrebbero avere cariossidi in qualche punto amilacee e in qualche punto zuccherine, e corrispondentemente le loro screziature dovrebbero essere bianche. La uniforme distribuzione dei caratteri « amilaceo » e « giallo » prova che il tessuto costituente l'albumo è in ogni suo punto di origine anfimittica e che le fallanze del color *nero-violaceo* sono proprio un effetto di imperfetta dominanza che riguarda una sola delle tre « gene » dominanti portate dallo spermo, la quale non ha potuto — chi sa per che ragione — attuarsi in qualche punto della cariosside.

Ma talvolta poi queste zone gialle si estendono e riducono il *nero-violaceo* ad una lieve traccia limitata ad un punto; rarissimamente anche questo punto scompare ed il chicco è uniformemente giallo, tanto che anche uno sperimentatore, il quale abbia fiducia nell'esattezza della sua propria tecnica, può dubitare che quella cariosside sia, per avventura, un prodotto d'inquinamento accidentale generato da un granello di polline di un Mais giallo puro portato dal vento.

Ho seminato una di queste cariossidi gialle, e, in istato di completo isolamento, ho potuto vedere nella successiva generazione risorgere il carattere *nero-violaceo* in tutta la sua potenza, proprio come se la pianta fosse venuta da un chicco ibrido normale *nero-violaceo*.

Questo esperimento non è completamente paragonabile a quello dell'Hurst, perchè i caratteri saggiati riguardano l'albumo il quale non si riproduce direttamente: il passaggio alla F_2 avviene per il tramite dell'embrione, che può considerarsi come fratello dell'albumo, geneticamente equivalente.

Qui m'interessa far notare che se non avessi prodotto io stesso quel chicco giallo con uno spermo che ben sapevo portatore del determinante pel *nero-violaceo*, io avrei potuto credere ad uno di quei favoleggiati casi di « produzione del dominante dal recessivo », i quali probabilmente hanno l'unica loro fonte in grossolani errori sperimentali o in errori di interpre-

tazione. Uno di questi possibili errori di interpretazione può consistere appunto nello scambiare per un (*rr*) un (*Dr*) a dominanza imperfetta simile ai polli tetradattili dell'Hurst ed alle cariossidi gialle del mio Mais.

Questa nota non consente spazio per approfondire, come avevo promesso, le relazioni di questi fatti col « pekilodinamismo » e con le « disgiunzioni vegetative », ma mi si consenta di affermare ancora una volta che i principî veramente essenziali del mendelismo escono sempre salvi da esperimenti ben fatti e bene interpretati.

Chimica-Fisica fisiologica. — *Azione del freddo sulla tensione superficiale del latte.* Nota di G. QUAGLIARIELLO, pres. dal Socio F. BOTTAZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sulla produzione di acido lattico e di acido fosforico nelle « Rigidità da disgelo ».* Nota di L. DE CARO, pres. dal Socio F. BOTTAZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Effetti del raffreddamento sui gangli spinali.* Nota di C. ARTOM, pres. dal Socio F. BOTTAZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Embriologia. — *Come avviene in « Fritillaria persica » L. lo sviluppo del gametofito femminile e l'aumento dei cromosomi nella regione calazale⁽¹⁾.* Nota di V. BAMBACIONI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. E. CARANO.

La *Fritillaria persica* L. è una Gigliacea originaria dell'Asia occidentale, che in Italia è stata trovata inselvatichita presso Bologna e, nel Lazio, ad Isola Farnese, a Carpineto e nella villa Pamphili a Roma. Alcune piante di queste ultime località furono trapiantate nel giardino annesso all'Istituto Botanico, dove ancora si coltivano numerosi individui. Ogni anno essi fioriscono normalmente e abbondantemente dalla fine di febbraio alla fine di aprile. In alcuni fiori, specialmente in quelli posti all'estremità superiore

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

(2) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

dell'infiorescenza, il pistillo si riduce fino quasi a scomparire, in alcuni invece, generalmente gli inferiori, esso si presenta normale, ma quasi mai si trasforma in frutto: in quattro anni ho potuto raccogliere soltanto tre capsule mature e fissare tre ovari con ovuli forniti di embrione.

La sterilità di questa pianta è nota da tempo, ma nessuno l'ha finora fatta oggetto di uno studio particolare; come pure, per quanto mi consta, non si hanno per tale specie osservazioni embriologiche, che esistono invece per *Fr. Meleagris*, *pudica*, *imperialis*, *tenella*, *messanensis*; lo Strasburger ne ha descritto solo le cellule madri del polline in cui ha contato anche i gemini presenti in numero di dodici.

Mi è sembrato quindi interessante studiare tale pianta dal punto di vista embriologico ed ecologico e in attesa di pubblicare le osservazioni *in extenso* in un prossimo numero degli *Annali di Botanica*, mi propongo di descrivere nella presente nota l'origine del gametofito femminile, che può seguirsi facilmente attraverso i numerosi ovuli di un ovario di un fiore prossimo a sbocciare in modo che si può essere sicuri della seriazione degli stadi.

Lo sviluppo del gametofito ♀ di *Fritillaria persica* è molto interessante per le deduzioni che, come vedremo in seguito, se ne possono trarre circa la costituzione del « tipo *Lilium* » e la controversa questione dell'aumento dei cromosomi nella regione calazale.

In questa pianta una cellula sottoepidermica diventa direttamente la cellula madre del sacco embrionale: il suo nucleo, per una normale divisione etero-omeotipica, produce quattro nuclei figli aploidi, a dodici cromosomi. Alla divisione nucleare, come nel tipo *Lilium*, non segue la formazione di membrana cellulare e tutti e quattro i nuclei megasporiali così prodotti partecipano alla formazione del gametofito ♀, ma in modo diverso da quello comunemente ammesso per il *Lilium*, simile invece a quello trovato recentemente dal Carano in *Euphorbia dulcis*.

In *Lilium* infatti si ritiene che due dei nuclei megasporiali vadano all'estremità micropilare del sacco a costituire, dividendosi, l'apparato oosferico e il nucleo polare superiore e due all'estremità calazale a costituire il nucleo polare inferiore e le antipodi. In *Fritillaria persica* invece i quattro nuclei dapprima disposti in croce nel protoplasma denso, uniforme, privo di vacuoli, si distribuiscono successivamente, come in *Euphorbia dulcis*, uno all'estremità micropilare del sacco e tre a quella calazale. In seguito tutti e quattro entrano in divisione ed è molto facile sorprenderli nei diversi stadi di spirema: in un momento determinato, mentre lo spirema del nucleo micropilare si mostra allungato, disposto perpendicolarmente all'asse longitudinale del sacco embrionale e coi primi abbozzi del fuso, quelli dei tre nuclei calazali, disposti più o meno parallelamente all'asse longitudinale del sacco e avvicinati tra loro, si circondano di un unico insieme di fibrille che assume quasi l'aspetto di un fuso tripolare. Poco dopo, nel sacco embrionale, si trovano due fusi regolari, uno piccolo superiore, orizzontale,

l'altro molto più grande, inferiore, verticale, formato dall'unione degli spiremi dei tre nuclei megasporiali inferiori; nel primo si contano dodici cromosomi, nel secondo invece essi sono molto più numerosi così che difficile riesce il loro computo; nei casi più favorevoli ho potuto contarne fino a trentaquattro. Questo stadio, piuttosto frequente, si distingue facilmente da quello della divisione omeotipica per la diversa grandezza del sacco embrionale, per la differenza di dimensioni dei due fusi, per la diversa forma dei cromosomi che in questi fusi si presentano molto più lunghi di quelli dei fusi omeotipici, perchè, infine, nel protoplasma cominciano a comparire piccoli vacuoli i quali, a mano a mano, confluiscono in un unico grande vacuolo centrale che separa i due piccoli nuclei micropilari derivati dal fuso superiore e ancora uniti da fibre fusali, dai due nuclei calazali molto più grossi e di forma diversa, derivati dal fuso inferiore e anch'essi uniti da fibrille.

In questo stadio il sacco embrionale di *Fritillaria persica* non differisce affatto morfologicamente dagli stadi tetranucleati comunemente descritti e figurati per diverse specie di *Lilium* e per altre piante che seguono lo stesso tipo di sviluppo; ne differirebbe solo per l'origine poichè, come ho già detto, nel *Lilium* tanto i due nuclei micropilari piccoli quanto i due calazali grossi vengono identificati coi nuclei megasporiali originati dalla divisione omeotipica: nei calazali la cromatina sarebbe aumentata per processi diversi, intorno ai quali molto è stato discusso dai diversi autori che si sono occupati di questo argomento e di cui tratterò nel prossimo lavoro.

Nè questa è la sola somiglianza esistente tra il sacco embrionale di *Fritillaria persica* e quelli del tipo *Lilium*, ma molte altre ve ne sono, come metterò meglio in rilievo prossimamente. Per questa ragione sono portata a pensare che in *Lilium* il gametofito ♀ si formi nello stesso modo di quello di *Fritillaria persica* e quindi di *Euphorbia dulcis*. Per poter sostenere con fondamento tale ipotesi occorre certo riesaminare le specie già descritte da precedenti autori, cosa che ho già iniziato per il *Lilium candidum* e che mi propongo di estendere subito ad altre specie affini. Se le nuove osservazioni confermeranno la mia opinione, molti dei casi attribuiti finora al tipo *Lilium* dovranno rientrare nel tipo *Euphorbia dulcis*.

Dopo lo stadio sopra descritto, il sacco embrionale di *Fritillaria persica* si sviluppa con le modalità già indicate da altri autori, per il tipo *Lilium*: i due nuclei micropilari danno, dividendosi, le sinergidi, l'oosfera, il nucleo polare superiore, dei due calazali il superiore si divide regolarmente producendo il nucleo polare inferiore e un'antipode, l'altro, più vicino all'estremità inferiore del sacco, si divide invece più o meno irregolarmente originando le altre due antipodi che più o meno presto degenerano.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Accademico prof. PARRAVANO presenta le opere giunte in dono all'Accademia, segnalando fra gli altri il bel volume di H. S. PEPAON « Flora of the Chicago Region ».

Il Socio ENRIQUES presenta un libro del prof. L. OLSCHKI « Galilei und seine Zeit », di cui l'autore fa omaggio all'Accademia. Segnala l'interesse della pubblicazione in cui viene ricostruita in maniera viva e suggestiva la personalità letteraria, scientifica e filosofica del sommo fisico Pisano.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio CASTELNUOVO legge, anche a nome del Socio BERZOLARI, la relazione con la quale si propone la pubblicazione negli Atti accademici della Memoria del dr. LUIGI BRUSOTTI « Sulle coppie di circuiti allacciati e sui loro modelli algebrici ».

L'Assemblea approva.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 dicembre 1927

- AGAMENNONE G. — L'inventore del simografo a pendolo. (Estratto dalla Rivista « La Meteorologia pratica ». Anno VII). Subiaco, 1926. 8°, s. p.
- AGAMENNONE G. — Per la storia delle predizioni di terremoti. Roma, 1926. 8°, pp. 1-9.
- ALDRICH J. M. — New Species of Ewo-Winged Flies of the Family Cyrtidae, with a New Genus from the Philippines. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume 72). Washington, 1927. 8°, pp. 1-4.
- BUNTE J. — Gyroscopic Theory of the Mechanical Part of Nature. Portsmouth, 1911. 8°, pp. 1-76.
- CUSHMAN R. A. — Miscellaneous Notes and Descriptions of Ichneumon-Flies. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 72). Washington, 1927. 8°, pp. 1-22.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Geologia nei suoi rapporti con la malaria. Roma, 1927. 8°, pp. 1-45.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — La funzione della Geologia nell'architettura. (Estr. dall'« Annuario dell'anno accademico 1926-27 della R. Scuola d'Architettura in Roma »). Roma, 1927. 8°, pp. 1-18.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Ricerche idrogeologiche sulla campagna romana, n. 2, 3. Roma, 1927. 8°, pp. 19-47.
- DRAGHETTI A. — Forme e limiti dello xerotismo nel frumento. Forlì, 1927. 8°, pp. I-VIII, 1-311.
- FUCINI E. — Le scienze naturali e il volo. (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XXXVIII). Pisa, 1927. 8°, pp. 1-26.
- HAGEN P. G. — P. G. Hagen S. I. 1847-1927. (Pontificia Accademia delle Scienze). Roma, 1927. 8°, pp. 1-54.
- HERRERA A. L. — Los progresos de la Plasmogenia en 1926. (Extr. de la « Medicina Argentina ». Año VI, n. 63). Cochabamba, 1927. 8°, pp. 1-13.
- LOBACEWSKI N. J. — Ad annum MCMXXVI centesimum a geometra kazaniensi N. J. Lobacewski noneuklideae geometriae systematis inventi concelebrandum. Kazan, 1927. 8°, pp. 1-110.
- LOBATSCHEVSKI N. I. — In memoriam N. I. Lobatschevskii. Vol. II. Kazan, 1927. 8°, pp. 1-201.
- LOCKYER M. A. and MAJOR PH. D. — The Total Solar Eclipse of 1927 June 29. Report Norman Lockyer Observatory Expedition. (Reprint from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. LXXXVII, pp. 668-674). Edinburgh, 1927. 8°.
- LOHMÄNDER H. — On Some Terrestrial Isopods in the United States National Museum. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 72). Washington, 1927. 8°, pp. 1-18.
- MARSHALL W. B. — The Australian Land Shell Thersites Bipartita and its Allies. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 72). Washington, 1927. 8°, pp. 1-3.
- MARTIN E. — Orbita della doppia spettroscopica Andromedae. (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere ». Vol. LX). Milano, 1928. 8°, pp. 1-9.
- MARTIN E. e GIOTTI G. — Determinazione di alcune costanti e rettificazione del

- riflettore di 102 cm. della R. Specola di Merate. (Estr. dalle « Memorie della Società Astronomica Italiana ». Vol. IV). Roma, 1927. 8°, pp. 1-11.
- OLSCHKI L. — Galilei und seine Zeit. Halle, 1927. 8°, pp. 1-VIII, 1-479.
- PEPOON H. S. — Flora of the Chicago Region. Chicago, 1927. 8°, pp. 1-XXXII, 1-554.
- ROEWER C. FR. — Ostasiatische Opiliones, von Herrn prof. F. Silvestri im Jahre 1925 erbenet. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di agricoltura di Portici ». Vol. XX, pagine 191-210). Portici, 1927. 8°.
- SCHWARTZ B. — Description of Ancylostoma Pluridentatum a Hookworm of Carnivores, and a Review of the Genus Ancylostoma. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 72). Washington, 1927. 8°, pp. 1-9.
- SHANNON E. V. — The Oxidation of Meteoric Irons with Comparative Descriptions of two New Examples of Magnetic Iron Oxides from Terrestrial Sources. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 72). Washington, 1927. 8°, pp. 1-15.
- SILVESTRI F. — Contribuzione alla conoscenza degli Aleurodidae (Insecta: Hemiptera) viventi su Citrus in Estremo Oriente e dei loro parassiti. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXI.). Spoleto, 1927. 8°, pp. 1-59.
- STEPHENSON L. W. — Additions to the Upper Cretaceous Invertebrate Faunas of the Carolinas. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 72). Washington, 1927. 8°, pp. 1-25.
- VOLTA A. — Boletín de la Asociación Argentina de Electrotécnicos. Número extraordinario 1745-1827. Buenos Aires, 1927. 8°, pp. 1-193.
- VOLTA A. — Nel centenario della morte di Alessandro Volta. Discorsi. Milano, 1927. 8°, pp. 1-148.
- WASHINGTON H. S. — The Italite Locality of Villa Senni. (From « American Journal of Sciences ». Vol. XIV, pp. 173-198). Washington, 1927. 8°.
- WASHINGTON H. S. and MERWIN H. E. — The Acmitic Pyroxenes. (Reprint. from the « American Mineralogist ». Vol. XII, pp. 233-252). Washington, 1927. 8°.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 18 dicembre 1927 (anno VI).

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Misura di stelle doppie.* Nota ⁽¹⁾ del Cor-
risp. G. ARMELLINI.

1. *Preliminari.* — In una precedente Nota ⁽²⁾ ho riportato i risultati delle misure da me eseguite all'Osservatorio del Campidoglio, sopra 50 stelle doppie, premettendovi un'esposizione del metodo adoperato: metodo che ho esattamente seguito anche nelle misure ulteriori, di cui mi propongo dar notizia nella presente Nota. Credo quindi inutile ripetere quanto fu detto nel citato lavoro, e mi limito, per comodità dei lettori, a ricordare soltanto le cose principali, e cioè:

a) *L'ingrandimento* adoperato è stato in generale il massimo tollerato dallo stato atmosferico, intendendo però tale frase in senso piuttosto rigoroso, giacchè l'esperienza mi dimostra sempre più la verità della massima di Struve, secondo cui *per bene osservare bisogna ben vedere*. In pratica, per le osservazioni fatte al Merz (apertura 5 pollici) l'ingrandimento adoperato variava da 90 a 200 diametri, per quelle fatte al Cauchoix (apertura 7 pollici) da 150 a 300 diametri.

b) *Angoli di posizione.* — Gli angoli di posizione sono stati osservati ponendo i due astri tra due fili paralleli del micrometro e ruotando il cerchio in modo che la congiungente i centri stellari risultasse parallela ai fili stessi. Per evitare i noti errori sistematici, ho tenuto la testa in modo che la congiungente i due occhi fosse parallela o perpendicolare alla congiun-

(1) Presentata nella seduta del 18 dicembre 1927.

(2) Cfr. questi «Rendiconti», anno 1922, sem. I, p. 76.

gente le due stelle; cosa che sostituisce in gran parte i vantaggi del prisma adottato da alcuni per ridurre sempre orizzontale la congiungente stessa.

c) *Distanza*. - Nelle osservazioni di stelle doppie pubblicate nella citata Nota del 1922, non potei seguire misure di distanza delle due componenti, essendo fuori servizio il movimento di orologeria dell'equatoriale Merz. Assunta la direzione del R. Osservatorio Astronomico, fu mia cura far riparare il meccanismo, ciò che mi ha permesso di eseguire con tale strumento buone misure di distanza delle componenti dei sistemi binari, adoperando il ben noto metodo della doppia lettura.

d) *Ordine delle misure*. - In generale ho osservato ogni sistema binario almeno in tre sere distinte, eseguendo di regola in ciascuna sera almeno tre misure dell'angolo di posizione p e tre misure delle distanze d , onde il risultato finale di ciascun sistema binario è fondato almeno su nove osservazioni di p e nove osservazioni di d . Come già ho accennato, le prime misure furono eseguite all'equatoriale Merz, strumento che - non ostante le modeste dimensioni - si raccomanda per la grande nettezza delle immagini. Ne espongo i risultati indicando con la lettera β il numero del sistema binario nel Catalogo del Burnham, e scrivendo nella prima colonna l'angolo di posizione (in gradi e decimi), nella seconda la distanza (in secondi e decimi) e nella terza la data dell'osservazione (anno e millesimi).

1° — β 2605 (Rigel)			2° — β 2821 (λ Orionis)		
199°,1	8",7	1926,002	44°,0	5",1	1926,016
199°,9	9 ,5	8	44 ,2	5 ,4	19
199 ,5	9 ,5	13	44 ,4	4 ,9	21
<hr/>			<hr/>		
199°,5	9",2	1926,067	44°,2	5",1	1926,019
3° — β 426 (η Cassiop.)			4° — β 3349 (8 Monocer.)		
266°,1	8",9	1926,024	29°,7	14",5	1926,063
265 ,6	9 ,0	27	30 ,7	14 ,4	8
267 ,6	8 ,4	54	29 ,0	14 ,7	71
<hr/>			<hr/>		
266°,4	8",8	1926,035	29°,8	14",5	1926,067
5° — β 2435 (ω Aurigae)			6° — β 2147 (χ Tauri)		
360°,3	5",5	1926,073	26°,5	20",1	1926,147
358 ,0	—	098	27 ,0	19 ,8	158
361 ,0	5 ,9	101	25 ,8	19 ,8	178
355 ,0	5 ,9	123	<hr/>		
356 ,4	6 ,0	126	26°,4	19",9	1926,161
<hr/>			<hr/>		
358°,1	5",8	1926,104			

7° — β 1950 (ε Persei)

7°,9	9",5	1926,136
8,5	8,9	168
9,0	9,2	186
<hr/>		
8°,5	9",2	1926,163

8° — β 1939 (32 Eridani)

347°,2	7",3	1926,150
349,3	7,9	169
347,6	7,2	189
<hr/>		
348°,0	7",4	1926,160

9° — β 8049

128°,8	—	1926,580
128,7	10",5	676
129,0	11,1	714
—	10,8	795
—	9,5	797
<hr/>		
128°,8	10",5	1926,692

10° — β 9021

155°,1	10",7	1926,720
155,1	9,9	725
153,6	10,1	795
—	9,5	798
<hr/>		
154°,6	10",0	1926,760

11° — β 1301

221°,1	13",5	1926,935
220,5	12,5	938
219,5	12,4	940
<hr/>		
220°,7	12",8	1926,938

12° — β 1319

348°,1	2",9	1926,940
349,2	2,5	943
<hr/>		
348°,6	2",7	1926,941

2. Verso la fine del 1925 potemmo impiantare all'Osservatorio del Campidoglio un moderno anemografo elettrico autoregistratore, in sostituzione del vecchio anemografo esistente, ormai quasi fuori servizio. Si rendeva così libera la cabina del vecchio anemografo, fondata in buona posizione sull'incrocio di quattro muri, onde decidemmo di trasformarla in cupola di osservazione e di collocarvi l'equatoriale Cauchoix Cavignato di sette pollici di apertura e di ottima montatura, con buon movimento di orologeria. Si veniva così a togliere questo importante strumento dalla posizione incomoda che esso occupava nell'antico Osservatorio del Collegio Romano, a ridosso di una parete; ed inoltre la convenienza del trasporto risultava aumentata dall'essere la situazione generale del Campidoglio incomparabilmente migliore di quella del Collegio Romano. E ciò sia per la maggiore elevazione della Specola Capitolina, sia perchè il Collegio Romano si trova nel centro più frequentato della città mentre il Campidoglio è fuori delle grandi vie del transito, sia, più specialmente, perchè il Collegio Romano ha di notte verso sud (dove maggiormente si osserva) la parte più illuminata della città, mentre il Campidoglio ha la zona archeologica e il Palatino completamente al buio durante la notte.

I lavori necessari furono effettuati con ogni diligenza e, dopo terminati, presi la deliberazione di adoperare il Cauchoix per la misura di stelle doppie, riservando l'antico Merz, di apertura minore, prevalentemente per le osservazioni fotometriche di variabili lucide e per le esercitazioni degli studenti di astronomia. In conseguenza riporto le osservazioni effettuate col Cauchoix dell'Osservatorio del Campidoglio:

13° — β 6025			14° — β 6064		
93°,8	8",4	1927,208	221°,6	13",5	1927,213
93°,8	8",3	211	221°,6	13",4	216
93°,6	7",7	213	222°,1	13",1	219
<hr/>			<hr/>		
93°,7	8",1	1927,211	221°,8	13",3	1927,216
15° — β 6107			16° — β 6239		
219°,1	14",5	1927,216	307°,4	5",6	1927,221
221°,8	15",7	221	311°,1	6",2	240
220°,8	14",1	240	307°,9	6",0	243
<hr/>			<hr/>		
220°,6	14",8	1927,228	308°,8	5",9	1927,235
17° — β 6261			18° — β 6289		
350°,0	15",4	1927,246	201°,1	16",4	1927,251
348°,6	15",7	251	200°,3	16",3	254
349°,4	15",8	254	201°,1	16",5	257
<hr/>			<hr/>		
349°,3	15",6	1927,250	200°,8	16",4	1927,254
19° — β 6018			20° — β 6693		
237°,1	3",0	1927,251	243°,8	4",8	1927,306
234°,9	3",4	254	244°,4	4",0	309
234°,7	3",1	257	241°,6	4",2	314
<hr/>			<hr/>		
235°,6	3",2	1927,254	243°,3	4",3	1927,310
21° — β 6748			22° — β 5927		
28°,4	6",6	1927,306	178°,7	12",4	1927,306
28°,4	7",2	309	178°,4	11",8	309
28°,1	6",7	314	176°,8	12",7	317
<hr/>			<hr/>		
28°,3	6",8	1927,310	178°,0	12",3	1927,311

23° — β 5003

24°,1	6'',1	1927,324
22,8	5,5	328
24,9	5,7	397
<hr/>		
23°,9	5'',8	1927,350

24° — β 5833

206°,3	3'',1	1927,323
209,8	3,0	325
210,4	—	380
—	2,4	397
<hr/>		
208°,8	2'',8	1927,356

25° — β 5806

89°,9	13'',3	1927,323
92,6	12,4	369
90,9	12,6	408
<hr/>		
91°,1	12'',8	1927,367

26° — β 7625

344°,9	8'',6	1927,394
341,4	9,7	399
342,6	9,1	410
<hr/>		
343°,0	9'',1	1927,401

27° — β 7703

110°,7	3'',0	1927,394
111,8	3,4	399
109,6	3,0	413
<hr/>		
110°,7	3'',1	1927,402

28° — β 7769

18°,3	4'',9	1927,432
17,2	5,6	435
16,5	5,7	438
<hr/>		
17°,3	5'',4	1927,435

29° — β 8003

312°,6	4'',0	1927,432
314,6	3,7	435
312,9	3,6	438
<hr/>		
313°,4	3'',8	1927,435

30° — β 8057

263°,3	2'',9	1927,432
263,7	3,0	435
264,4	3,1	438
<hr/>		
263°,8	3'',0	1927,435

31° — β 8146

27°,0	14'',7	1927,449
25,8	14,5	536
26,3	14,2	547
<hr/>		
26°,4	14'',5	1927,511

32° — β 8152

329°,4	5'',0	1927,449
331,7	4,5	544
330,5	5,0	547
<hr/>		
330°,5	4'',8	1927,513

33° — β 8160

282°,1	7'',9	1927,449
281,9	6,3	544
283,0	6,5	547
<hr/>		
282°,3	6'',9	1927,513

34° — β 8302

255°,8	6'',7	1927,553
258,3	7,3	555
258,4	7,6	558
<hr/>		
257°,5	7'',2	1927,555

35° — β 8348

257°,5	7",4	1927,550
256°,9	7,3	555
256°,1	6,7	558
<hr/>		
256°,8	7",1	1927,554

37° — β 8779

121°,0	13",4	1927,564
120°,0	12,6	566
120°,6	12,8	569
<hr/>		
120°,5	12",9	1927,566

39° — β 9137

215°,9	8",9	1927,561
215°,2	8,9	564
216°,0	9,0	569
<hr/>		
215°,7	8",9	1927,565

41° — β 8502

220°,7	11",7	1927,572
221°,1	12,7	575
221°,2	11,1	580
<hr/>		
221°,0	11",8	1927,579

43° — β 9078

262°,9	16",9	1927,583
260°,5	16,7	596
260°,8	16,7	602
<hr/>		
261°,4	16",8	1927,594

45° — β 9509

21°,7	12",3	1927,585
20°,9	10,8	591
19°,3	10,9	602
<hr/>		
20°,6	11",3	1927,593

36° — β 8377

184°,2	15",0	1927,553
183°,9	14,7	555
183°,3	14,4	558
<hr/>		
183°,8	14",7	1927,555

38° — β 8579

191°,4	6",0	1957,561
192°,9	5,6	564
192°,7	5,4	566
<hr/>		
192°,3	5",7	1927,564

40° — β 9315

151°,6	6",1	1927,572
150°,3	—	575
151°,4	6,3	580
<hr/>		
151°,1	6",2	1927,579

42° — β 9344

66°,5	6",8	1927,583
65°,8	6,4	596
64°,9	6,6	602
<hr/>		
64°,7	6",6	1927,594

44° — β 9073

269°,9	12",8	1927,588
269°,5	12,5	596
270°,6	13,2	602
<hr/>		
270°,0	12",8	1927,595

46° — β 9607

124°,7	14",4	1927,662
124°,4	14,7	665
124°,3	14,6	668
<hr/>		
124°,5	14",6	1927,665

Fisiologia. — *Azione della chinina, eserina, pilocarpina, digitonina, sparteina e atropina sui centri nervosi.* — *Ricerche sperimentali sul preparato centrale di Bufo vulgaris.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. S. BAGLIONI.

Il metodo che si è dimostrato proficuo per lo studio di una serie di veleni dotati di azione specifica eccitante dei centri nervosi, per stabilire la loro particolare sede di azione sugli elementi situati nella sostanza grigia anteriore o posteriore del midollo spinale (tipo dell'acido fenico o della stricnina), costituito dall'isolamento dei centri nervosi (e della loro sopravvivenza in opportune condizioni sperimentali) eseguito sul rospo, mediante l'applicazione esattamente locale, ossia limitata alle superfici ventrale o dorsale dell'*intumescenza posterior* (o di altre regioni), di piccolissime quantità di soluzioni diluitissime del veleno imbevute da un batuffolino di ovatta o da un dischetto di carta bibula del diametro di 1 a 2 mm., si presta anche allo studio di altri veleni noti per la loro azione specifica su diversi tessuti ed organi animali.

Ho compiuto così una serie di ricerche sull'azione locale di soluzioni relativamente forti di alcune sostanze note per la loro spiccata azione specifica, ossia di *bicloridrato di chinina*; *pilocarpina* (Roche); *solfato di sparteina* (Merck); *solfato di atropina*; *digitonina cristallizzata* (Merck); *salicilato di eserina* (Merck).

L'applicazione si faceva mediante dischetti o quadratini di carta bibula del diametro di 1-2 mm. imbevuti nelle soluzioni e depositi sulla superficie dorsale o ventrale del preparato centrale, ove si lasciavano per un tempo sufficiente, talora anche molto lungo (più ore), spesso rinnovandoli con altri imbevuti nelle stesse soluzioni. I preparati subito dopo l'operazione erano posti in una vaschetta di vetro, adagiando i centri e i nervi sciatici su un grosso batuffolo di ovatta imbevuto di soluzione fisiologica, a cui si aggiungevano alcune gocce di acqua ossigenata, che si rinnovava varie volte nelle 24 ore. I due monconi degli arti posteriori colla cute, che rimaneva a coprire le superfici dei piedi, e da cui si provocavano con stimoli meccanici di varia intensità (dal *semplice e lieve contatto* con la punta smussa di uno specillo o di una pinza, a *stimoli medi*, consistenti nello

(1) Presentata nella seduta del 4 dicembre 1927.

scorrere con la stessa punta sulla cute, e *stimoli forti*, consistenti nel pungero o nel pinzettare la cute) riposavano su altri batuffoli di ovatta imbevuti della stessa soluzione (fig. 1-2).

Il preparato soggiornava in una ghiacciaia alla temperatura media di $2-10^{\circ}$ C. Le osservazioni si facevano, estratto il preparato dalla ghiacciaia,

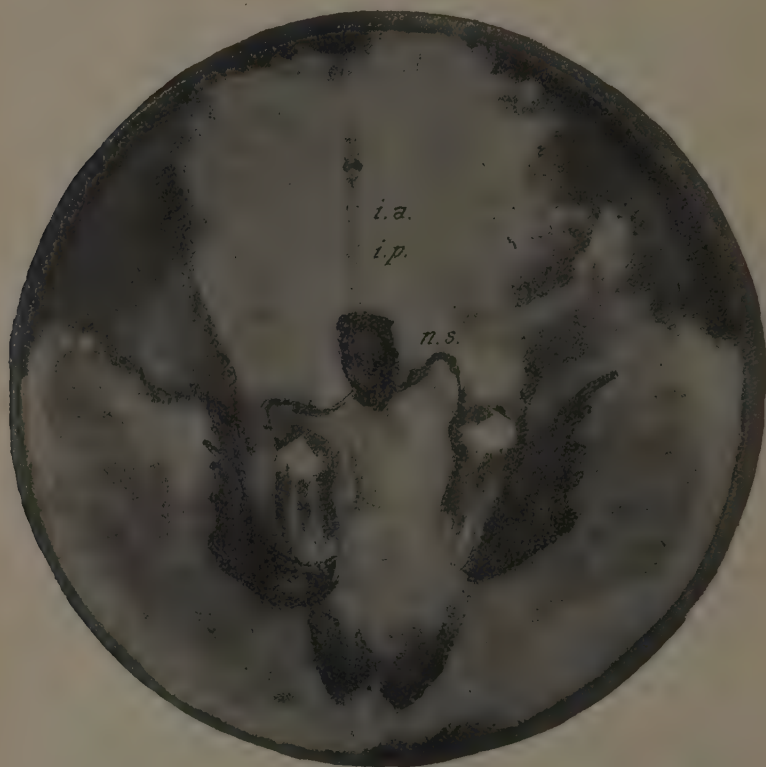


Fig. 1. — Preparato centrale di *Bufo vulgaris* visto dall'alto (da fotografia, $\frac{3}{4}$ della grandezza naturale).

L'asse cerebrospinale è adagiato colla faccia ventrale su un batuffolo di ovatta imbevuta di soluzione fisiologica; *i. a.* intumescenza anterior; *i. p.* intumescenza posterior; *n. s.* nervo sciatico destro. I due arti riposano su batuffoli di ovatta in atteggiamento normale (tono muscolare normale).

alla temperatura di $15-18^{\circ}$ C. Esse consistevano nello stabilire *modificazioni spontanee* dell'attività centrale desunte dall'atteggiamento degli arti (modificazioni del tono muscolare) ed eventuali contrazioni tetaniche, e *modificazioni dell'attività riflessa*, provocando i movimenti mediante stimoli meccanici cutanei (aumento o diminuzione dell'eccitabilità riflessa, modificazioni

nel carattere dei movimenti stessi: contrazioni tetaniche, scosse cloniche, contrazioni fibrillari).

L'osservazione non si limitò soltanto a stabilire le dette eventuali modificazioni immediate e l'attività riflessa per l'azione della sostanza applicata sulle regioni indicate, ma si estese anche agli effetti postumi della

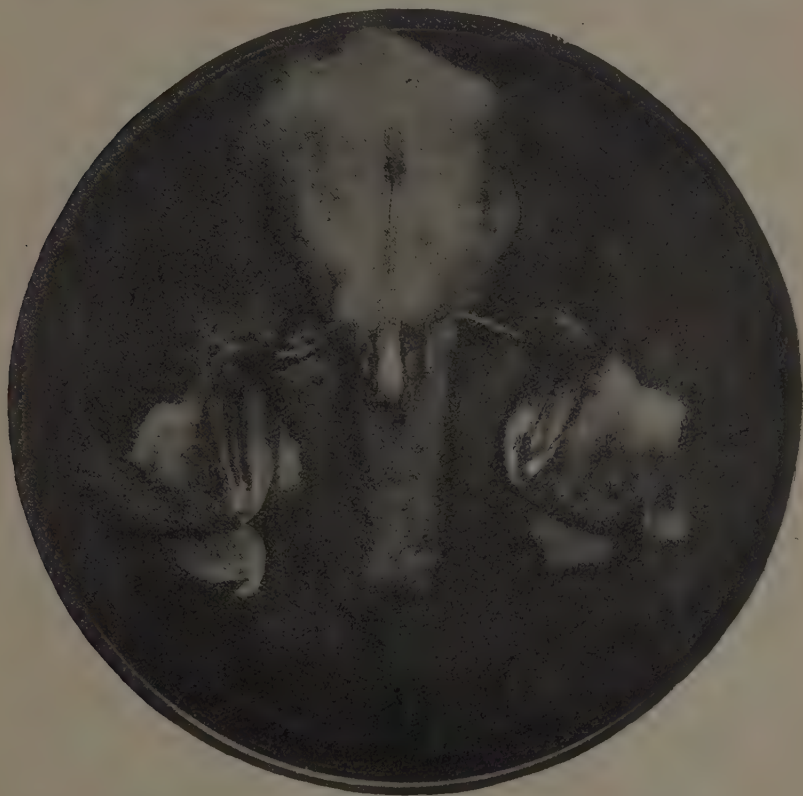


Fig. 2. - Preparato centrale della fig. precedente fotografato il giorno successivo

L'asse cerebrospinale è capovolto, colla faccia dorsale sul batuffolo di ovatta; gli arti in posizione di semistensione per effetto della diminuzione del tono muscolare, dovuto alla diminuita attività centrale.

detta azione, dopo aver allontanato la carta bibula, tenendo in vita i preparati centrali per il massimo tempo della loro sopravvivenza che, al solito nelle condizioni sperimentali ricordate, fu di 24-48 h.

Bicloridrato di chinina (10,4 %).

I. - 20-11-1927. Ore 15,47: Si applica sulla faccia dorsale dell'*int. post.* di un preparato centrale, preparato da diverso tempo e tenuto in ghiacciaia, che reagisce molto

bene con riflessi normali, un quadratino di carta bibula di 2 mm. imbevuto nella soluzione fatta in soluzione fisiologica.

Ore 15,48, riflessi normali. T. ambiente 15,5° C.

Ore 15,55, nessuna modificazione. Ore 16,10, reazione normale. 16,10, si riapplica sullo stesso punto un altro quadratino imbevuto come sopra. Movimenti riflessi normali. Ore 16,30; 16,45; 17, sino a ore 20, nessuna modificazione nei riflessi.

Nel giorno successivo si applica un quadratino di carta imbevuta della stessa soluzione sulla faccia dell' *int. post.* alle ore 8,40. Nessuna modificazione apprezzabile sino alle ore 15,28.

II. - 23-11-1927. Ore 15,25 : Si applica come sopra sulla superficie dorsale, senza alcuna modificazione dell'eccitabilità.

III. - 23-11-1927. Ore 10,45 : Si applica un dischetto di carta bibula come sopra sulla superficie dorsale. Ore 10,50; 11, nessuna modificazione dei riflessi; ore 11,7, si rinnova il dischetto; ore 11,35; 12, 14, reazione come sopra.

Ore 16: si capovolge il preparato e si pone un dischetto di carta come sopra sulla superficie ventrale. Ore 17 fino alle ore 19,45, reazioni sempre più deboli, ma di carattere normale.

IV. - 29-11-1927. Ore 16,45 : Si applica un dischetto come sopra sulla superficie ventrale. Ore 17,10, reazione debole, ma normale nei caratteri dei movimenti; 17,25; 17,45; 18; 18,30; 19; 19,30; 20, identico comportamento.

V. - 1-12-1927. Ore 9,50: Si applica un dischetto di carta imbevuto di soluzione all'1 % sulla faccia dorsale. Ore 9,55; 10; 10,25; 10,30, reazioni normali lievemente più deboli.

Ore 10,32: Si toglie il dischetto. 11,10, reazioni un pò più evidenti. Ore 12; 14,30, reazioni normali. Ore 15,30, si capovolge e si applica il dischetto di carta imbevuto della stessa soluzione sulla faccia ventrale. Ore 15,50, il preparato non reagisce; ore 16; 16,45; 17,10; 17,45; 18,30; 19,20, deboli reazioni.

Salicilato di eserina (1,55 %).

29-11-1927. Ore 17,7: Si applica dischetto imbevuto con detta soluzione sulla faccia dorsale. Ore 11,14, reazione normale. 11,20, nessuna reazione anche a stimoli forti. 11,45, reazioni deboli normali a forti stimoli. Ore 12, reazioni normali anche a deboli stimoli. Ore 14; 14,30, *id.* Ore 16,45, si capovolge e si pone il dischetto sulla faccia ventrale. Ore 17,10, deboli reazioni. Ore 17,25; 17,45; 18; 18,30; 19; 19,30; 20, reazioni normali.

Pilocarpina (4,82 %).

I. - 23-11-1927. Ore 16,40: Dischetto di carta bibula imbevuto nella detta sostanza sulla superficie dorsale; 16,44 e 17,4, movimenti spontanei; 17,19, reazioni normali. 17,27; 17,37; 17,41, reazioni normali.

24-11-1927. Ore 8: Si capovolge il preparato e si applica dischetto come sopra sulla superficie ventrale; lo si rinnova alle ore 8,7. Ore 8,10; 8,20; 9; 9,10; 9,43, nessuna evidente modificazione.

II. - 2-12-1927. Ore 16,20: Si applica sulla superficie ventrale dischetto come sopra. Ore 16,30; 16,40; 16,50; 17,10; 17,30, reazioni normali. Tolto il dischetto si capovolge il preparato e si applica altro dischetto simile sulla faccia ventrale. Ore 17,50; 18,20; 18,30; 18,55; 19,10; 19,30; 19,45; 20, reazioni normali.

Digitonina cristallizzata (1,38 %).

27-11-1927. Ore 17: Si applica sulla superficie ventrale dischetto imbevuto come sopra. Ore 17,10; 17,30; 18; 18,30; 19, reazioni un pò più deboli, con caratteri normali.

28-11-1927. Ore 8,45: Si capovolge il preparato e si pone dischetto imbevuto di detta soluzione sulla faccia dorsale. Ore 9,30, deboli reazioni. Ore 11,30, tetani riflessi. Ore 15,30; 18,20, tetani riflessi.

Solfato di sparteina (1,05 %).

25-11-1927. Ore 11,35 : Dischetto imbevuto con detta sostanza sulla faccia dorsale. Ore 15,40; 15,47; 16; 16,2, reazioni normali. Ore 16,5, si rinnuova il dischetto. 16,10; 16,12; 16,20; 16,30, reazioni normali a stimoli medi e forti. Ore 16,37; 16,48; 16,58 id. Si toglie il dischetto. Ore 17,30, si applica dischetto sulla faccia anteriore. 17,40; 17,55 18,5; 18,30; 19; 19,30, reazioni normali. Si rinnova il dischetto imbevuto della detta soluzione. Nelle ore del mattino del giorno successivo reazioni normali.

Solfato di atropina (1,59 %).

I. 1-12-1927. Ore 9,24 : Si applica dischetto sulla faccia dorsale. Ore 9,37; 9,45; 9,52; 10, reazioni normali. Ore 10,25, scomparsa di reazioni anche a forti stimoli. Ore 10,30, id. 10,32, si toglie il dischetto. Ore 11, deboli reazioni. 12, id. Ore 14, reazioni normali. Ore 15,30 si capovolge il preparato e si applica dischetto sulla faccia ventrale. Ore 15,45; 16; 16,45, reagisce debolmente. Si rinnova il dischetto. Ore 17,15, non reagisce. Ore 18, deboli reazioni.

II. — 2-12-1927. Ore 18,10 : Si applica il dischetto sulla faccia dorsale. Ore 18,20; 18,30, reazioni normali. Ore 18,55, id. Si rinnuova il dischetto. Ore 19,10; 19,30, deboli reazioni. Ore 19,45, non reagisce. Ore 20, id. Si toglie il dischetto, ore 20,25, reazioni normali.

Dai risultati delle precedenti ricerche emerge che nessuno dei veleni suindicati applicati localmente sulla faccia dorsale o ventrale dell' *intumescencia posterior* del preparato centrale, provoca aumento dell'eccitabilità e convulsioni tetaniche o cloniche, *ad eccezione della digitonina applicata sulla faccia dorsale che dopo un tempo abbastanza lungo* (di qualche ora) *provoca tetani riflessi simili a quelli della stricnina*. Questa azione è però quasi certamente dovuta a un prodotto di decomposizione della digitalina (*digitaliresina e tossiresina*) che ha azione simile a quella della picrotossina (Gaglio).

Sali di chinina, eserina, pilocarpina, sparteina e atropina, applicati localmente, in soluzioni e in quantità uguali o superiori a quelle dei veleni centrali (stricnina, acido fenico ecc.), non esplicano alcuna azione eccitante, ma o sono inefficaci, oppure deprimono lievemente e transitoriamente l'attività degli elementi centrali.

Fisiologia. — *Dottrina fisiologica dell'azione dei veleni eccitanti i centri nervosi.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. S. BAGLIONI.

Col nome di convulsivanti (*krampferegende Mittel* dei tedeschi) si suole intendere, nel linguaggio comune dei tossicologi, un gruppo di sostanze velenose di diversa natura chimica che hanno in comune la proprietà fisiologica di produrre, quando sono introdotte nell'interno dell'organismo, un quadro simile di fenomeni abnormi culminanti in convulsioni o crampi, più o meno generali, di tutti i muscoli striati del corpo.

Analizzando il modo come queste convulsioni insorgono e i caratteri loro propri, è stato facile stabilire che sono costantemente precedute da un aumento, che va divenendo sempre maggiore, dall'inizio al primo accesso delle convulsioni stesse, dell'eccitabilità riflessa e spontanea dei centri nervosi. Infatti stimoli cutanei meccanici od elettrici o di qualsiasi altra natura nociva, che in condizioni normali per la loro intensità non provocano reazione (sono subliminali), diventano efficaci provocando movimenti riflessi. Lo stesso si osserva per gli stimoli di organi di senso superiori, della vista o dell'udito. In questo stadio l'unica modificazione indotta dall'azione dei veleni è un aumento abnorme dell'eccitabilità centrale e in questo stadio può rimanere e consistere l'azione velenosa della sostanza se la dose propinata fu debole.

Se la quantità del veleno iniettato fu maggiore, allora l'aumento dell'eccitabilità ben presto si trasforma nel primo accesso delle violente convulsioni o crampi dei muscoli del corpo, i quali rappresentano abnorme modificazioni dei movimenti ordinari, soprattutto perchè scompare la coordinazione dei movimenti stessi dovuta alla fine dinamica centrale di eccitamenti motori dei muscoli agonisti accompagnata e regolata dall'innervazione inibitrice dei muscoli antagonisti. L'azione di questi veleni si manifesta quindi, in questo stadio, come trasformazione degli eccitamenti inibitori in eccitamenti motori. Così si spiegano le convulsioni tetaniche prodotte dal prototipo di questi veleni eccitanti, la stricnina.

L'aumento dell'eccitabilità, in questo secondo stadio, è ancora più evidente: gli effetti degli stimoli differiscono solo per il carattere disordinato e tetanico dei movimenti, e inoltre per il fatto che i movimenti tetanici durano per un tempo molto più lungo dei movimenti normali. È probabile che questa maggior durata sia una conseguenza dell'abnorme aumento di eccitabilità agli stimoli, nel senso che gli eccitamenti prodotti sugli organi di senso periferici dalle scosse muscolari (che di ordinario non sono in grado di provocare riflessi), per lo stato abnorme di ipereccitabilità centrale, divengono efficaci provocando automaticamente successive scosse muscolari sino alla stanchezza ed esaurimento centrale (*genesi riflessa delle convulsioni tetaniche*).

(1) Presentata nella seduta del 4 dicembre 1927.

Il terzo stadio è caratterizzato da fenomeni di paralisi centrale, che si manifesta colla ineccitabilità agli stimoli periferici anche più forti, che si alternano con periodi di ipereccitabilità e convulsioni. I fenomeni paralitici, in questo stadio, sono effetto della stanchezza o fatica e dell'esaurimento centrale, di cui il fattore preminente è l'asfissia per mancanza di ossigeno rapidamente consumato dalla iperattività provocata dall'azione del veleno. È a questa fase che negli animali omotermi si deve la morte per l'azione di questi veleni, i quali provocando anche nell'ambito dell'innervazione centrale e periferica dei muscoli respiratori le stesse modificazioni, rendono impossibile la regolare coordinazione e quindi le alterne fasi della inspirazione e della espirazione, che provvedono allo scambio gassoso respiratorio. Negli eterotermi la vita è ancora possibile per la loro respirazione cutanea.

La successione di questi tre stadi è più o meno rapida e completa, secondo le quantità del veleno che agisce sui centri (*legge della dose*), secondo il grado di recettività dei centri stessi, dipendenti dalle condizioni individuali (costituzione), e da speciali condizioni fisiologiche o patologiche dei centri stessi.

L'analisi dei caratteri dei movimenti provocati dall'azione dei veleni dimostra che essi variano secondo due tipi fondamentali: o si tratta di convulsioni generali di tutti i muscoli striati, durature, simili a quelle provocate dalla faradizzazione del nervo motore di un preparato neuromuscolare, ossia *contrazioni tetaniche*; oppure di contrazioni a scosse intermittenti, simili a quelle provocate da stimoli interrotti, ossia *contrazioni cloniche*.

L'indagine fisiologica sul meccanismo di azione di queste sostanze ha mirato dapprima a stabilire la loro sede di azione nel complesso sistema centrale. Coll'asportazione delle diverse parti dell'asse cerebro-spinale o colla separazione cruenta di esse della dipendenza reciproca, operando specialmente negli animali eterotermi, fu così facile stabilire che alcuni di questi veleni possono avere sede *spinale, bulbare, corticale*.

Un'analisi più profonda mira a stabilire su quali elementi nervosi centrali (cellule nervose o fibre nervose) che costituiscono il midollo spinale, il bulbo e la corteccia, secondo le moderne indagini dei morfologi e dei fisiologi (localizzazioni funzionali dei diversi centri), agiscono i diversi veleni eccitanti centrali.

Un metodo che facilita notevolmente questa indagine della localizzazione dell'azione dei veleni centrali, è quello dell'applicazione locale di minime quantità di sostanze sulle diverse regioni centrali, evitando la diffusione del veleno alle diverse parti dei centri nervosi e del complessivo organismo, che avviene nell'iniezione sottocutanea od endovenosa, applicazione indiretta per il tramite della circolazione sanguigna.

Questo metodo dell'applicazione locale è ancora più perfetto quando è possibile la sopravvivenza dei centri isolati completamente dal corpo e privi quindi della circolazione sanguigna, come è il caso del preparato centrale di *Bufo vulgaris*.

L'applicazione dei diversi veleni, fatta mediante dischetti di carta bibula o batuffolini di ovatta di 1 a 2 mm. di spessore, imbevuti in una soluzione diluitissima del veleno (i dischetti di carta imbevono circa 1 mmgr. di liquido) sulle superficie delle regioni anteriori o posteriori dell'*intumescenza posterior* (sede dei centri motori o coordinatori degli arti posteriori) lascia

diffondere le molecole del veleno, attraverso la superficie del midollo, sino agli elementi immediatamente sottostanti della sostanza grigia (delle corna anteriori o posteriori), su cui le sostanze esplicano la loro azione.

Con questo metodo potei dimostrare (1909), confermando precedenti ricerche fatte con metodo diverso, ossia dell'applicazione locale dei veleni sul midollo spinale della rana aperto dalla parte dorsale, ma ancora irrorato dalla circolazione sanguigna (1900), che la stricnina ha la sua sede di azione elettiva sugli elementi coordinatori delle corna posteriori, mentre non agisce sugli elementi motori delle corna anteriori; l'acido fenico esercita la sua azione elettiva su questi ultimi, mentre applicate in debolissime dosi sulla faccia posteriore non modifica la funzione degli elementi coordinatori, a dosi più elevate deprime la loro attività; un'azione analoga a quella della stricnina è esplicita dalla picrotossina (0.5 %); l'azione della stricnina e della picrotossina si manifesta colla serie dei fenomeni di eccitamento caratteristici degli animali, in cui si propinano questi veleni per iniezione sottocutanea (ossia aumento dell'eccitabilità che culmina cogli accessi tetanici); l'azione dell'acido fenico si manifesta parimenti cogli stessi fenomeni che si osservano nell'animale integro in seguito ad iniezione sottocutanea del veleno (aumento dell'eccitabilità, contrazioni cloniche). Le soluzioni di stricnina usate per imbevare i batuffolini di ovatta sferici (di 1-2 mm. di diametro) erano soluzioni diluitissime, sino dell'uno su 10000, quelle dell'acido fenico di 5 su 10000 in soluzione fisiologica di Na Cl; i batuffolini soggiornavano sulla regione centrale per circa 5-10'.

L'azione dell'acido fenico si esplica soltanto sugli elementi delle corna anteriori, per cui nel preparato centrale che ha soltanto i muscoli della gamba e del piede sopravvivenuti, l'azione di questo veleno si manifesta soltanto quando esso è applicato sulla faccia ventrale dell'*int. post.*, mentre, applicato sulla faccia ventrale di altre regioni del midollo spinale, rimanendo immuni gli elementi motori dell'*int. post.*, non provoca alcuna modificazione nelle reazioni degli arti posteriori.

Ciò non è il caso per la stricnina, poichè anche l'applicazione locale sulla superficie dorsale di altre regioni del midollo spinale e più precisamente del bulbo, rimanendo immune la faccia dorsale dell'*int. post.*, provoca modificazioni delle reazioni degli arti posteriori, che si manifestano in un aumento abnorme dell'eccitabilità agli stimoli e in successive contrazioni tetaniche, le quali però non sono durature (come quelle che si hanno per l'applicazione di questo veleno sulla faccia dorsale dell'*int. post.*), essendo seguite immediatamente da movimenti normali. Ciò dimostra che nella faccia dorsale della regione bulbare esistono elementi centrali analoghi a quelli coordinatori delle corna posteriori, ai quali giungono eccitamenti afferenti dalla cute del piede, e che provocano modificazioni dell'attività motoria delle corna anteriori pei muscoli delle gambe e del piede: sono cioè tipici centri riflessi a vie lunghe spinobulbari.

Anche l'applicazione di stricnina sulla faccia dorsale dell'*int. ant.* provoca tetani ed aumento di eccitabilità, solo però per stimoli portati sui monconi delle radici posteriori del 2° paio.

In nessuna altra regione del rimanente asse cerebrospinale del preparato centrale l'applicazione della stricnina provoca modificazioni dell'attività riflessa.

Per potere estendere i risultati di queste ricerche all'azione di altri veleni, che (da tempo è noto), iniettati sotto cute o per altre vie introdotti nell'organismo agiscono da convulsivanti, era necessario ripetere collo stesso metodo gli esperimenti sul preparato centrale con queste sostanze. Ciò è stato compiuto recentemente da me e dai miei allievi.

M. Mitolo, per consiglio e sotto la guida di A. Clementi, ha dimostrato che l'*eosina* presenta in tutto un comportamento analogo alle soluzioni di acido fenico, poichè applicata localmente sugli elementi nervosi della metà dorsale non esplica alcuna azione, mentre applicata sulla metà ventrale provoca convulsioni cloniche del preparato (1926).

In una serie di ricerche eseguite nell'anno in corso e di prossima pubblicazione, M. Mitolo, studiando l'azione della *nicotina*, *ossinicotina*, *caffaina*, *picrotossina*, *cianuro* di potassio, *canfora* (*esetone* ed olio canforato), *santonina* e *cocaina*, applicate in soluzioni diluite e con batuffolini di ovatta del diametro di 1-2 mm. è giunto a stabilire, come conclusione delle sue ricerche, una legge fisiologica generale, nel senso che le sostanze di un primo gruppo (*nicotina*, *ossinicotina*, *caffaina*, *picrotossina*, *cianuro* di potassio), qualora vengono applicate direttamente sul sistema nervoso centrale, hanno lo stesso comportamento della stricnina; ed intanto agiscono come la stricnina, provocando le tipiche convulsioni tetaniche e quindi i tetani duraturi, in quanto sono in grado, come la stricnina stessa, di agire elettivamente sui meccanismi dorsali sensitivi coordinatori del midollo spinale (corni posteriori), elevando la loro eccitabilità e modificandone le leggi o l'innervazione reciproca, poichè tali sostanze reprimono le azioni inibitorie, trasformandole in eccitamenti abnormi.

Le sostanze del 2° gruppo (*esetone*, olio canforato, *eosina*), qualora vengono applicate direttamente sul sistema nervoso centrale, hanno comportamento analogo a quello dell'acido fenico; ed intanto agiscono come il fenolo, dando luogo all'insorgere dei caratteristici spasmi clonici, in quanto hanno la proprietà, come il fenolo stesso, di agire specificamente sui meccanismi centrali motori del midollo spinale (corni anteriori), elevando abnormemente la loro eccitabilità.

Per la dimostrazione completa della dottrina della particolare azione elettiva di questi diversi veleni centrali, mancava tuttavia la dimostrazione che altri veleni (specialmente alcaloidi), noti per la loro particolare azione eccitante su altri tessuti ed organi (sistema muscolare, glandolare, cardiaco), applicati allo stesso modo sul preparato centrale non agissero in maniera simile a quella dei veleni centrali.

Questa dimostrazione sperimentale credo di aver data nella mia precedente Nota sull'azione della *chinina*, *eserina*, *pilocarpina*, *digitonina*, *sparteina* e *atropina*, le quali sostanze applicate sul preparato centrale (faccia ventrale o dorsale) in dosi corrispondenti o anche maggiori di quelle della stricnina e del fenolo, non esplicano alcuna azione di aumento dell'eccitabilità dei centri nervosi (ad eccezione della digitonina, che però, come è noto, contiene sempre o si trasforma lentamente in una sostanza od azione simile a quella della picrotossina).

In base dunque ai risultati di tutte le esperienze fatte mi pare si possa dedurre la dottrina generale:

Tutti i veleni che elettivamente agiscono elevando l'eccitabilità degli elementi centrali coordinatori delle corna posteriori del midollo spinale, provocano l'aumento abnorme dell'attività riflessa che culmina nelle tipiche convulsioni tetaniche di origine centrale (tipo stricnina).

Tutti i veleni che elettivamente agiscono, elevando l'eccitabilità degli elementi centrali delle corna anteriori (neuroni motori), provocano aumento dell'eccitabilità riflessa che culmina nelle convulsioni cloniche di origine centrale (tipo fenolo).

E per converso:

Tutti i veleni che, iniettati sotto cute o comunque introdotti nel corpo provocano abnorme eccitamento dei centri nervosi spinali fino alle convulsioni tetaniche, agiscono perchè elettivamente attaccano gli elementi nervosi centrali delle corna posteriori, elevandone la loro eccitabilità.

Tutti i veleni che, introdotti nel corpo, provocano convulsioni cloniche di origine centrale spinale, agiscono elettivamente attaccando gli elementi centrali motori delle corna anteriori, elevandone la loro eccitabilità.

Questa azione elettiva dei diversi veleni è d'altra parte una dimostrazione che i neuroni delle corna posteriori e delle corna anteriori sono dotati di proprietà funzionali specificamente diverse (*differenziazione fisiologica degli elementi funzionali centrali*).

Con le ricerche eseguite da me e dei miei allievi (Magnini, Riccò, Amantea, Clementi) mediante l'applicazione locale di diversi veleni sulla superficie esterna di altre regioni dell'asse cerebro spinale (bulbo, cervelletto, corteccia cerebrale) è risultato che elementi nervosi centrali analoghi a quelli delle corna posteriori, ossia recettivi all'azione della stricnina si trovano anche nella corteccia cerebrale, precisamente nell'ambito della zona eccitabile, mentre elementi recettivi all'azione dell'acido fenico non sono presenti in altre regioni dell'asse cerebro-spinale.

A. Rizzolo, servendosi del metodo della cronassimetria di Lapique (1927) ha visto che l'azione della stricnina, applicata localmente sulle facce dorsali e ventrali del midollo lombare di *Trygon vulgaris* e *Raia pastinaca*, provoca modificazioni della cronassia solo quando si applica sulla faccia dorsale, diminuendone il valore del 50 all'80 %. Sul midollo spinale di *Scylliorhinus canicula* ha visto che la cocaina, la morfina e la nicotina, in soluzioni del 2 e dell'1 %, parimenti modificano la cronassia, diminuendola per la prima applicazione (mentre la fa aumentare dopo la quarta, evidentemente in seguito a fatti di

esaurimento dei centri) applicata sulla superficie dorsale. Egli stesso con ricerche fatte sui centri corticali eccitabili del cane ha dimostrato che l'applicazione della nicotina in soluzione dell'1‰, col solito metodo dell'applicazione stigmatica, fa aumentare l'eccitabilità della corteccia (sostanza grigia) e non della sostanza bianca sottostante, provocando una diminuzione della cronassia del 25 al 65 ‰ per la prima e la seconda applicazione; mentre dopo la terza osservò aumento della cronassia sino al 100 ‰, evidentemente come effetto dell'esaurimento o della stanchezza dei centri stessi. Queste osservazioni confermano la giustezza della dottrina svolta.

LETTERATURA

- S. BAGLIONI, « Arch. f. Anatomie u. Physiologie » 1900, *Physiol. Abt. Suppl.* pp. 193-242; « Zeitschr. f. Allg. Physiologie », IX, 1909, pp. 1-54;
 S. BAGLIONI, e M. MAGNINI, « Arch. d. Fisiol. », VI, 1909, pp. 240-249.
 G. AMANTEA, « Arch. di Farmac. Sper. e Sc. affini », vol. XXX, 1920.
 A. CLEMENTI, « Arch. di Fisiol. », vol. XXIV, 1926, pp. 322-342.
 M. MITOLO, ibidem, pp. 343-381.
 A. RIZZOLO, « C. R. d. e. Soc. de Biol. », 96, 1927, p. 1207 - 97, 1927, pp. 1073, 1330, 1375.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Ancora sull'equazione* $y \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0$. Nota di F. TRICOMI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

In un lavoro attualmente in corso di stampa nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » [t. 52 (1928)] ho ripreso lo studio dell'equazione alle derivate parziali

$$(E) \quad y \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0,$$

cui avevo già dedicata una lunga Memoria nel 1923 ⁽²⁾, facendo vedere, fra l'altro, come la condizione assai restrittiva che avevo dovuto primieramente imporre ad una certa curva σ che figura nel *teorema preliminare d'esistenza* del Cap. IV di (M), potesse notevolmente allargarsi mediante la considerazione di certi speciali contorni *con punta*.

(1) Nella seduta del 18 dicembre 1927.

(2) *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto*. [« Mem. della R. Acc. dei Lincei », (5), 14, (1923), pp. 133-247]. Questo lavoro sarà qui brevemente indicato con la sigla (M).

Nella presente Nota mi propongo invece di dimostrare come, avvalendosi di un elegantissimo metodo dovuto al prof. G. Ascoli ⁽¹⁾, sia possibile eliminare addirittura ogni speciale restrizione relativa alla nominata curva σ , che resta così soggetta soltanto a quelle ben note condizioni di generale regolarità cui s'intendono sempre assoggettati i contorni « arbitrari » considerati nella teoria delle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.

Il teorema preliminare di esistenza cui si è fatto dianzi allusione, asserisce che:

Nella parte S del semipiano ellittico ⁽²⁾ compresa fra un segmento AB dell'asse x ed una curva arbitraria σ congiungente A con B senza mai uscire dal semipiano predetto, esiste una (ed una sola) soluzione regolare z dell'equazione (E), assumente valori arbitrariamente prestabiliti, con legge di continuità, sopra la curva σ e sul segmento AB.

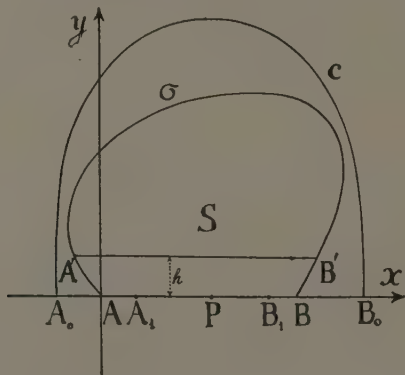


Fig. 1.

Per dimostrare questo teorema — ammesso vero quello analogo, relativo al caso in cui i valori di z siano dati su di un contorno chiuso del semipiano ellittico, privo di punti comuni con l'asse x [cfr. (M), Cap. IV, § 1] — cominceremo con l'osservare che non è restrittivo supporre che i valori dati su AB siano tutti nulli, in quanto è ben facile costruire quante si vogliono soluzioni z_0 della (E), regolari in tutto il dominio S, le quali assumino sopra AB quei valori che meglio ci piaccia prefissarvi. Per esempio, detto $A_0 B_0$ un segmento tale che la curva normale C di base $A_0 B_0$ [cfr. (M) Cap. III, § 5] comprenda il dominio S nel suo interno, potremo assumere come z_0 la soluzione della (E), regolare entro C, assumente su AB i va-

(1) L'ASCOLI utilizza questo metodo per la dimostrazione del teorema d'esistenza pei contorni da lui chiamati di 2^a specie, nella sua interessantissima Memoria: *Sull'equazione di Laplace nello spazio iperbolico*, attualmente in corso di pubblicazione.

(2) Cioè del semipiano $y > 0$.

lori ivi prestabiliti e su A_0, A , $B B_0$ e C valori affatto arbitrari, soluzione la cui esistenza è assicurata dalle considerazioni svolte nei §§ 5-9 del Cap. IV di (M).

Inoltre, osserviamo con l'Ascoli, che non è nemmeno restrittivo supporre che i valori deposti sopra σ siano tutti *non negativi*, in quanto una funzione qualsiasi f può sempre rappresentarsi come differenza di due funzioni non negative f_1 e f_2 , e, conseguentemente, ogni soluzione χ di una equazione lineare alle derivate parziali cui sia imposto di assumere su di una certa curva certi valori f , può sempre rappresentarsi come differenza di due soluzioni χ_1 e χ_2 assoggettate ad assumere su quella curva rispettivamente i valori f_1 ed f_2 .

Ciò premesso, detto h un numero positivo sufficientemente piccolo, tracciamo la parallela $y = h$ all'asse x e indichiamo rispettivamente con S_b e σ_b le parti del dominio S e della curva σ che restano *al di sopra* di tale parallela, di cui la porzione interna ad S (in figura il segmento $A' B'$) indicheremo infine con r_b . Poichè il dominio S_b non ha alcun punto in comune con l'asse x , in virtù di quanto è stato dimostrato nel § 1 del Cap. IV di (M), esisterà una (ed una sola) soluzione regolare $\chi(x, y | h)$ della (E) assumente sopra σ_b i valori (non negativi) ivi deposti, e sopra r_b valori tutti nulli, non essendo a ciò d'ostacolo le eventuali discontinuità nei valori al contorno che potranno presentarsi nei punti A' e B' . Ne segue che, fissato un punto qualsiasi $P(x_0, y_0)$ interno ad S , in esso resteranno definite infinite soluzioni della (E) del tipo $\chi(x, y | h)$, e precisamente una ed una sola in corrispondenza a ciascun valore di h minore di y_0 . Orbene, io dico che *queste soluzioni tendono, per $h \rightarrow 0$, ad un limite Z ben determinato*, ossia che *esiste una certa funzione $Z(x, y)$, definita nel dominio S , tale che*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \chi(x_0, y_0 | h) = Z(x_0, y_0).$$

Infatti, detti h' e h'' due valori di h tali da aversi

$$y_0 > h' > h'' > 0,$$

osserviamo che la funzione

$$(1) \quad \chi(x, y | h'') - \chi(x, y | h'),$$

definita entro $S_{h''}$, è una soluzione regolare della (E) assumente sopra $\sigma_{h''}$, valori sempre nulli, e sopra $r_{h''}$ gli stessi valori ivi assunti da $\chi(x, y | h')$. Ma le soluzioni regolari della (E) sono *estremate al contorno*⁽¹⁾ e quindi $\chi(x, y | h'')$, ch'è non negativa su $\sigma_{h''}$ e nulla sopra $r_{h''}$, non può che as-

(1) Cioè sono tali che il loro massimo e il loro minimo in un dominio D qualsiasi, cadono sempre sul contorno di questo [cfr. (M), Cap. IV, § 4].

sumere valori positivi o nulli in tutto $S_{b''}$ e in particolare nei punti di $r_{b''}$; dunque la soluzione (1) assume valori positivi o nulli su tutta la frontiera del dominio in cui è definita, epperò essa non potrà mai divenire negativa, il che basta per concludere che dovrà essere

$$\chi(x_0, y_0 | b'') \geq \chi(x_0, y_0 | b').$$

D'altra parte, detto M l'estremo superiore dei valori di χ depositi sopra σ , sempre pel fatto che le soluzioni della (E) sono estremate al contorno, si avrà pure che

$$\chi(x_0, y_0 | b) \leq M;$$

dunque la funzione $\chi(x_0, y_0 | b)$ è limitata e non decrescente al decrescere di b , epperò tenderà ad un limite determinato e finito $Z(x_0, y_0)$ per $b \rightarrow 0$.

Passiamo ora a dimostrare che, nell'interno di S , la funzione $Z(x, y)$ rappresenta una soluzione regolare, anzi addirittura analitica, dell'equazione (E).

A tal uopo ricordiamo anzitutto [(M) Cap. IV, § 3] che se s è una curva chiusa del semipiano ellittico priva di punti comuni con l'asse x , nel dominio S_0 interno ad essa, ogni soluzione regolare χ della (E) può rappresentarsi con la formula

$$(2) \quad \chi(x_0, y_0) = \int_s V(x_0, y_0 | x, y) \chi(x, y) ds,$$

dove V denota una certa funzione analitica ben determinata, dipendente solo dalla natura del contorno s . Viceversa, se una funzione χ è suscettibile di essere rappresentata mediante l'integrale (2), si vede immediatamente che essa è una soluzione analitica della (E).

Ciò premesso, supposto che la curva s sia tutta interna ad S e non abbia punti distanti dall'asse x per meno di b_0 , osserviamo che, per ogni $b < b_0$, entro S_0 avremo manifestamente

$$(3) \quad \chi(x_0, y_0 | b) = \int_s V(x_0, y_0 | x, y) \chi(x, y | b) ds.$$

D'altra parte, la funzione $Z(x, y)$, come limite di funzioni continue sopra s , è certamente integrabile \mathcal{L} su questa curva; dunque, passando al limite per $b \rightarrow 0$, dalla (3), in virtù del teorema fondamentale di Lebesgue, avremo che

$$Z(x_0, y_0) = \int_s V(x_0, y_0 | x, y) Z(x, y) ds,$$

ciò che, come si è già osservato, basta per concludere che la funzione limite $Z(x, y)$ costituisce entro S_0 una soluzione analitica dell'equazione (E).

Dalla proposizione ora dimostrata segue in particolare che le funzioni $z(x, y | h)$, in ogni dominio del tipo S_0 , tendono *uniformemente* al loro limite $Z(x, y)$. Ora non è difficile far vedere come tale convergenza uniforme non venga meno, ancorchè il dominio S_0 si estenda fino alla curva σ , purchè esso si mantenga sempre lontano dall'asse x , dunque *la soluzione $Z(x, y)$ è continua anche nelle parti di S immediatamente contigue alla curva σ , epperò essa, su questa curva, assume effettivamente i valori ivi prescritti.* Omettiamo la relativa dimostrazione perchè essa è perfettamente simile a quella indicata dall'Ascoli nel caso analogo del suo lavoro cit. (3).

Sofferriamoci piuttosto a dimostrare che *la soluzione Z soddisfa alle condizioni al contorno anche sull'asse x* , cioè che si annulla sul segmento AB di detto asse.

Allo scopo indicato, detto P un punto qualsiasi interno al segmento AB , e A_1 e B_1 due punti del medesimo segmento rispettivamente compresi fra A e P e fra P e B , riprendiamo in considerazione la curva normale C di base $A_0 B_0$ e indichiamo con $\zeta(x, y)$ la soluzione regolare della (E) assumendo sopra C e sopra i due segmenti $A_0 A_1$ e $B_1 B_0$ costantemente il valore *uno*, e invece sul segmento $A_1 B_1$ costantemente il valore *zero*. La circostanza, tante volte invocata, che le soluzioni della (E) sono estremate al contorno, ci assicura che i valori della funzione $\zeta(x, y)$ sulla curva σ , che sono tutti non superiori ad 1, ammetteranno un minimo *positivo* m ; quindi, detto come dianzi, M l'estremo superiore dei valori di z prefissati sulla curva σ , la funzione

$$\mu = \frac{M}{m} \zeta(x, y) - z(x, y | h)$$

sarà certamente non negativa su tutto il contorno del campo S_b in cui è definita, e cioè tanto sulla curva σ_b quanto su r_b . Ma anche la μ è una soluzione regolare della (E), e come tale estremata al contorno; dunque, qualunque sia h , dovrà aversi

$$\frac{M}{m} \zeta(x, y) - z(x, y | h) \geq 0,$$

da cui, passando al limite per $h \rightarrow 0$, segue

$$Z(x, y) \leq \frac{M}{m} \zeta(x, y).$$

Ma la funzione $\zeta(x, y)$ è continua nell'intorno di P , epperò tende a zero nell'avvicinarsi a questo punto; dunque anche la soluzione $Z(x, y)$ dovrà tendere a zero allorchè ci si approssima a P ; come volevasi dimostrare.

Matematica. — *Sopra lo scostamento geodetico elementare.*
Nota di U. CRUDELI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In possesso (con ritardo) del fascicolo n. 9 (1° sem. 1927) di questi « Rendiconti », leggo a pp. 609-613, la Nota del sig. Cartan *Sur l'écart géodésique et quelques notions connexes*, nella quale l'eminente autore in un richiamo in calce (p. 610) osserva di non essere verificata, nel caso in cui si prendano nello spazio ordinario due rette sghembe, fra loro infinitamente vicine, la formula

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{d\sigma^2} + Ky = 0,$$

col noto significato dei simboli.

La mancata verifica proviene dal doversi nel caso generale considerare, invece della (1), come estensione ad una qualsiasi varietà (riemanniana nel senso tradizionale) della ben conosciuta formula di Jacobi, la seguente (che, nell'ipotesi di angolo costante fra base e scostamento, lega la grandezza y dell'incognito scostamento geodetico elementare a quella del derivato del versore ν di esso scostamento):

$$\left(\frac{d^2 y}{d\sigma^2} + Ky \right) \sin^2 \alpha = y \left(\frac{d\nu}{d\sigma} \right)^2,$$

formula da me ottenuta nella precedente Nota di questi « Rendiconti » ⁽²⁾ e nella quale K rappresenta la curvatura riemanniana della varietà, lungo la geodetica base B , in corrispondenza alla giacitura individuata, nel generico punto di B , dalla base medesima e dal versore ν del predetto scostamento (formante l'angolo costante α con la B), mentre σ rappresenta l'arco della base in discorso.

Invero nell'ultimo capoverso (a p. 250) di quella mia Nota figura una conclusione non accettabile in tesi generale, come appunto mostra l'esempio delle rette sghembe.

Naturalmente, poi, nel caso in cui il versore ν subisca trasporto per parallelismo (nel senso di Levi-Civita) lungo la geodetica base (come accade sempre per le superficie nell'ottenimento della formula di Jacobi), allora si perviene alla (1).

(1) Nella seduta del 18 dicembre 1927.

(2) 1° sem. 1927, p. 250.

Teoria dei numeri. — *La risoluzione apiristica delle congruenze biquadratiche.* Nota di G. SANSONE, presentata ⁽¹⁾ dal Socio L. BIANCHI.

1. Il prof. M. Cipolla ⁽²⁾ e successivamente i proff. G. Scorza ⁽³⁾ e G. Mignosi ⁽⁴⁾ hanno stabilito la struttura delle formule risolutive apiristiche delle congruenze binomie. In un lavoro di prossima pubblicazione abbiamo dato la risoluzione e la discussione delle congruenze cubiche, qui vogliamo dar conto dei risultati relativi alle congruenze biquadratiche, rimandando ad altro lavoro lo studio delle congruenze generali di quarto grado.

Data la congruenza biquadratica:

$$(1) \quad x^4 + a_1 x^2 + a_2 \equiv 0 \pmod{p},$$

con a_1, a_2, p interi assoluti, p primo, supponiamo, per non ridurci ai casi noti delle congruenze binomie, $a_1, a_2, a_1^2 - 4a_2$ diversi dallo zero modulo p .

Supponiamo ancora che il simbolo di Legendre $\left(\frac{a_1^2 - 4a_2}{p}\right)$ abbia il valore $+1$, in caso opposto la (1) è impossibile. In queste ipotesi la risolvente quadratica della (1):

$$(2) \quad y^2 + a_1 y + a_2 \equiv 0 \pmod{p}$$

ha due radici y_1, y_2 che si possono costruire colla formula del Cipolla ⁽⁵⁾,

(1) Nella seduta del 18 dicembre 1927.

(2) M. CIPOLLA, a) *Formole di risoluzione della congruenza binomia quadratica e biquadratica*, « Rend. della R. Accad. delle Scienze fis. e mat. di Napoli », gennaio 1905; b) *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie secondo un modulo primo*, « Math. Ann. », Bd. LXIII, 1906; c) *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie*, Note I e II, « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », fasc. 8° e 9°, vol. XIV, serie 5ª, 1° sem. 1907.

(3) G. SCORZA, *La risoluzione apiristica delle congruenze binomie, e la formula di interpolazione di Lagrange*, « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », fasc. 7°, vol. III, serie 6ª, 1° sem. 1926.

(4) G. MIGNOSI, *La convergenza in un campo d'integrità finito e la risoluzione apiristica delle congruenze binomie di grado e modulo potenza di un numero primo*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », T. L., 1926.

(5) La congruenza $x^2 \equiv a \pmod{p}$, supposto $\left(\frac{a}{p}\right) = +1$ si risolve colla formula:

$$x \equiv \pm \left[A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \dots + A_{\frac{p-3}{2}} a^{\frac{p-1}{2}} \right] \pmod{p},$$

con

$$A_h \equiv -2 \left[1^{2(2h-1)} + 2^{2(2h-1)} + 3^{2(2h-1)} + \dots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{2(2h-1)} \right] \pmod{p}.$$

[Cfr. CIPOLLA, loc. cit., (1), b)].

e ad ognuna di esse che sia residuo quadratico di p corrisponderanno due radici incongrue (opposte) della (1).

Si presentano due questioni: a) Quando sia $\left(\frac{a_2}{p}\right) = +1$, cioè y_1 e y_2 con lo stesso carattere quadratico modulo p , dare le condizioni cui debbono soddisfare a_1 e a_2 perchè esse siano entrambi residuo quadratico, o entrambi non residuo quadratico modulo p , o ciò che è lo stesso dire se la (1) ha 4 radici incongrue o nessuna. b) Supposto invece $\left(\frac{a_2}{p}\right) = -1$, cioè y_1 e y_2 con carattere quadratico opposto modulo p , assegnare in funzione esplicita di a_1 e a_2 la radice della (2) sulla quale deve operarsi per determinare le 2 radici incongrue della (1).

Risponde a queste questioni il seguente teorema.

Data la congruenza

$$(I) \quad x^4 + a_1 x^2 + a_2 \equiv 0 \pmod{p}$$

con $a_1, a_2, a_1^2 - 4a_2$ interi incongrui con lo zero modulo p , p primo, $p \neq 2, 3$,⁽¹⁾

a) condizione necessaria e sufficiente perchè essa abbia quattro radici incongrue è che i numeri a_1, a_2 soddisfino le due condizioni:

$$(I') \quad D_{\frac{p-3}{2}}(a_1, a_2) \equiv 0, \quad a_2 D_{\frac{p-5}{2}}(a_1, a_2) \equiv (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \pmod{p}$$

e in questo caso si costruiranno queste quattro radici con la solita formula dell'algebra, estraendo le radici quadrate con la formula del Cipolla⁽²⁾.

b) condizione necessaria e sufficiente perchè la (1) abbia due radici incongrue è che i numeri a_1, a_2 soddisfino le due condizioni:

$$(II) \quad \left(\frac{a_1^2 - 4a_2}{p}\right) = +1, \quad \left(\frac{a_2}{p}\right) = -1.$$

Le due radici della (1) sono allora date dalle formule:

$$(III) \quad x = \pm \sqrt{(-1)^{\frac{p+1}{2}} \left[a_2 D_{\frac{p-5}{2}}(a_1, a_2) - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \right] / D_{\frac{p-3}{2}}(a_1, a_2)}.$$

(1) Nel caso $p = 2$ la (1) per $a_1 \equiv 0, a_2 \equiv 0 \pmod{2}$ ha la forma $x^4 + x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{2}$ ed è impossibile. Nel caso $p = 3$ per $a_1 \equiv 0, a_2 \equiv 0 \pmod{3}$ la (1) può avere una delle seguenti forme: $x^4 + x^2 + 1 \equiv 0$; $x^4 + x^2 + 2 \equiv 0$, $x^4 + 2x^2 + 1 \equiv 0$, $x^4 + 2x^2 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$.

La prima di queste ha le radici $x_1 = x_2 = +1, x_3 = x_4 = -1$, le altre tre sono impossibili.

(2) Cfr. nota (5) a p. 573.

facilmente troviamo:

$$(4) \quad (-1)^{\frac{b(b-1)}{2}} x^{2b} [a_1 D_{b-2}(a_1, a_2) + (-1)^b a_2 D_{b-3}(a_1, a_2)] x^2 + \\ + a_2 D_{b-2}(a_1, a_2) \quad [\text{mod. } x^4 + a_1 x^2 + a_2].$$

Dalla (3) si ha ad esempio:

$$(5) \quad D_1(a_1, a_2) = a_1 \quad , \quad D_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1^2; \\ D_3(a_1, a_2) = 2 a_2 a_1 - a_1^3 \quad , \quad D_4(a_1, a_2) = a_2^2 - 3 a_2 a_1^2 + a_1^4.$$

Sviluppando il determinante (3) per i minori del secondo ordine delle due prime orizzontali si trova la formula ricorrente:

$$(6) \quad D_l(a_1, a_2) = (-1)^{l+1} a_1 D_{l-1}(a_1, a_2) + a_2 D_{l-2}(a_1, a_2)$$

la quale tenuto conto delle (5) permette di calcolare successivamente i determinanti D_l .

Con procedimento di induzione, tenuto conto delle (5) e della (6), si dimostrano facilmente le due formule:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} D_{2k}(a_1, a_2) &= \binom{k}{0} a_2^k - \binom{k+1}{2} a_2^{k-1} a_1^2 + \\ &+ \binom{k+2}{4} a_2^{k-2} a_1^4 - \dots + (-1)^k \binom{2k}{2k} a_1^{2k}, \\ D_{2k+1}(a_1, a_2) &= \binom{k+1}{1} a_2^k a_1 - \binom{k+2}{3} a_2^{k-1} a_1^3 + \\ &+ \binom{k+3}{5} a_2^{k-2} a_1^5 - \dots + (-1)^k \binom{2k+1}{2k+1} a_1^{2k+1}. \end{aligned} \right.$$

Ancora in virtù della (6) la (4) diventa:

$$(8) \quad (-1)^{\frac{b(b-1)}{2}} x^{2b} \equiv (-1)^b D_{b-1}(a_1, a_2) x^2 + a_2 D_{b-2}(a_1, a_2) \\ [\text{mod. } x^4 + a_1 x^2 + a_2]$$

e in particolare per $b = \frac{p-1}{2}$ otteniamo la *relazione fondamentale*:

$$(9) \quad (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} [x^{p-1} - 1] \quad (-1)^{\frac{p-1}{2}} D_{\frac{p-1}{2}}(a_1, a_2) x^2 + \\ + a_2 D_{\frac{p-3}{2}}(a_1, a_2) - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}, \quad [\text{mod. } x^4 + a_1 x^2 + a_2]$$

esiste perciò un polinomio intero a coefficienti interi $Q(x)$ di grado $p-5$ per il quale si ha identicamente:

$$(10) \quad (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} [x^{p-1} - 1] = (x^4 + a_1 x^2 + a_2) Q(x) + \\ + (-1)^{\frac{p-1}{2}} D_{\frac{p-3}{2}}(a_1, a_2) x^2 + a_2 D_{\frac{p-5}{2}}(a_1, a_2) - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Si ha da qui che se la congruenza (1) ammette quattro radici incongrue (non nulle) modulo p , avendosi per il teorema di Fermat $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, il polinomio

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} D_{\frac{p-3}{2}}(a_1, a_2) x^2 + a_2 D_{\frac{p-5}{2}}(a_1, a_2) - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

deve annullarsi modulo p per quattro valori incongrui di x , esso è perciò identicamente nullo modulo p , i numeri a_1, a_2 soddisfano quindi le congruenze:

$$(I) \quad D_{\frac{p-3}{2}}(a_1, a_2) \equiv 0, \quad a_2 D_{\frac{p-5}{2}}(a_1, a_2) - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \equiv 0 \pmod{p}$$

Inversamente se i coefficienti a_1, a_2 della (1) soddisfano queste congruenze, dalla (10) si ha:

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} [x^{p-1} - 1] \equiv (x^4 + a_1 x^2 + a_2) Q(x) \pmod{p},$$

e poichè il primo membro si annulla modulo p , per $p-1$ valori incongrui di x , e $Q(x)$ è di grado $p-5$, $x^4 + a_1 x^2 + a_2$ si annulla modulo p per quattro valori incongrui di x , cioè la (1) ha quattro radici.

Adunque condizione necessaria e sufficiente perchè la (1) abbia quattro radici incongrue è che i coefficienti a_1, a_2 verifichino le (I).

Le quattro radici della (1) avranno in questo caso la forma:

$$x \equiv \pm \sqrt{\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}} \pmod{p}$$

ove le estrazioni di radice quadrata si faranno colla formola di Cipolla.

Supponiamo invece che la (1) abbia soltanto due radici incongrue, per questo è necessario e basta che si abbia:

$$(II) \quad \left(\frac{a_1^2 - 4a_2}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{a_2}{p}\right) = -1.$$

È facile persuaderci che in questo caso nella (10) si ha:

$$(11) \quad D_{\frac{p-3}{2}}(a_1, a_2) \equiv 0, \quad a_2 D_{\frac{p-3}{2}}(a_1, a_2) - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \equiv 0 \pmod{p}$$

Infatti il polinomio

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} D_{\frac{p-3}{2}}(a_1, a_2) x^2 + a_2 D_{\frac{p-5}{2}}(a_1, a_2) - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

si deve annullare modulo p , per due valori incongrui non nulli di x , e siccome esso non può essere identicamente nullo modulo p , sono vere le (11), anzi dovendo aversi:

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} D_{\frac{p-3}{2}}(a_1, a_2) x^2 + a_2 D_{\frac{p-5}{2}}(a_1, a_2) - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \equiv 0 \pmod{p}$$

segue che nelle nostre ipotesi si avrà:

$$(III) \quad x \equiv \pm \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} \left[a_2 D_{\frac{p-5}{2}}(a_1, a_2) - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \right] / D_{\frac{p-3}{2}}(a_1, a_2)} \pmod{p}.$$

Ad es. per la congruenza $x^4 - 16x^2 - 13 \equiv 0 \pmod{23}$ abbiamo:

$$\left(\frac{16^2 + 52}{23} \right) = +1, \quad \left(\frac{-13}{23} \right) = -1,$$

e applicando la (III) con $a_1 = -16, a_2 = -13$ si trova

$$x \equiv \pm 8 \pmod{23}.$$

Avendo determinate le condizioni necessarie e sufficienti perchè la (1) abbia quattro oppure due radici incongrue, seguono per le cose dette le condizioni necessarie e sufficienti dell'enunciato del teorema perchè la (1) sia impossibile.

(1) Il nostro ragionamento prova: data la congruenza $y^2 + a_1 y + a_2 \equiv 0 \pmod{p}$, $a_1 \not\equiv 0, a_2 \not\equiv 0, p$ primo, $p > 3$, supposto $\left(\frac{a_1^2 - 4a_2}{p} \right) = +1, \left(\frac{a_2}{p} \right) = -1$ essa ha le radici:

$$y_1 = (-1)^{\frac{p+1}{4}} \left[a_2 D_{\frac{p-5}{2}}(a_1, a_2) - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \right] / D_{\frac{p-3}{2}}(a_1, a_2), \quad y_2 = a_2 y_1,$$

ed è $\left(\frac{y_1}{p} \right) = +1, \left(\frac{y_2}{p} \right) = -1$.

Matematica. — *Sui minimi e massimi parziali per le funzioni di più variabili.* Nota di GIUSEPPE SCORZA [estratta da una lettera al prof. L. TONELLI] presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

..... Nella dimostrazione del teorema di Sturm per gli integrali delle equazioni differenziali omogenee del 2° ordine che Ella dà nei suoi *Fondamenti di calcolo delle variazioni* ⁽²⁾ è fatto uso della seguente osservazione:

Se due funzioni continue $u(x)$ e $v(x)$ sono definite in un intervallo (a, b) e la funzione

$$f(x, y) = u(x) + y \cdot v(x)$$

ha un minimo negativo per $y = \alpha$ ed un minimo positivo per $y = \beta$, esiste un numero γ , interno all'intervallo (α, β) , tale che la funzione $f(x, \gamma)$ ha come minimo lo zero.

Essa è naturalmente giustificabile in modo presso che immediato; ma può anche riguardarsi come conseguenza del fatto che il minimo $m(\bar{y})$ in (a, b) della funzione $f(x, \bar{y})$ è funzione continua di \bar{y} .

Ora il prof. Picone mi faceva osservare a tal proposito che metterebbe conto esaminare la seguente questione:

Sia I un insieme del piano (x, y) e sia I_y l'insieme delle proiezioni ortogonali dei punti di I sull'asse delle y . Inoltre in I sia definita una funzione continua $f(x, y)$.

Preso un punto \bar{y} di I_y , indichiamo con $S(y)$ l'insieme sezione di I con l'orizzontale di ordinata \bar{y} e con $e'(\bar{y})$ ed $e''(\bar{y})$ l'estremo inferiore e superiore di $f(x, \bar{y})$.

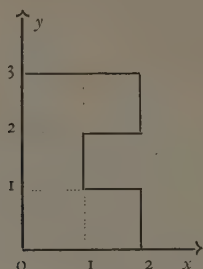
Quand'è che le funzioni $e'(\bar{y})$ ed $e''(\bar{y})$, che possono ben dirsi *estremi parziali* della $f(x, y)$, riescono a loro volta continue in I_y ?

L'esempio seguente mostra che la risposta a codesta domanda non è in ogni caso affermativa.

(1) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

(2) L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni* (Zanichelli, 1923), p. 217. Vedi anche: L. TONELLI, *Un'osservazione a proposito di un teorema di Sturm*, « Bollettino dell'Un. mat. it. », anno VI, n. 3.

L'insieme I sia quello della figura



e definiamo $f(x, y)$ nel modo che segue: nel rettangolo chiuso di estremi $(0, 0)$, $(1, 3)$ è

$$f(x, y) = 1;$$

inoltre è

$$f(2, y) = 0$$

per $0 \leq y \leq 1$, e

$$f(2, y) = 2$$

per $2 \leq y \leq 3$; in tutti gli altri punti la $f(x, y)$ è definita dalla condizione che per ogni y_0 , per il quale sia $0 \leq y_0 \leq 1$ oppure $2 \leq y_0 \leq 3$, la $f(x, y_0)$ sia lineare nell'intervallo $(1, 2)$.

Evidentemente si ha $e'(1) = 0$, mentre per $y > 1$ è sempre $e'(y) = 1$, dunque nel punto $y = 1$ la $e'(y)$ è discontinua. Del pari $e''(y)$ è discontinua nel punto $y = 2$.

Nelle righe che seguono mi permetto di esporre alcuni teoremi che non sembra siano stati notati e che, se non mi inganno, rispondono in modo soddisfacente alla questione proposta.

1. Premetto qualche considerazione sugli insiemi.

Se I è un insieme chiuso e limitato, I_y è anch'esso chiuso e limitato.

Infatti, se y_0 è un punto di accumulazione di I_y , è nulla la distanza tra I e l'orizzontale $y = y_0$; ma I è chiuso e limitato, dunque almeno un punto di I appartiene a questa retta. Di qui e dalla definizione di I_y , segue che y_0 appartiene ad I_y .

Più avanti avrò bisogno di considerare insiemi I dotati della seguente proprietà — che dirò la proprietà a) —:

Ogni porzione I' di I aperta su I , ha la sua proiezione I'_y aperta su I_y .⁽¹⁾

(1) Cfr. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen* (Teubner, 1918), pp. 59-60.

L'insieme della figura più sopra addotta non gode di questa proprietà, perchè la sua porzione

$$1 < x \leq 2 \quad ; \quad 2 \leq y \leq 3,$$

che è aperta su di esso, ha per proiezione sull'asse delle y un insieme chiuso sull'intervallo $0 \leq y \leq 3$ ⁽¹⁾. È quindi opportuno porre fuori di dubbio l'esistenza di insiemi dotati della proprietà in discorso dimostrando che

Il rettangolo I

$$x_1 \leq x \leq x_2 \quad ; \quad y_1 \leq y \leq y_2$$

- nel qual caso I_y si riduce all'intervallo $y_1 \leq y \leq y_2$ - gode della proprietà *a*).

Sia I' una porzione di I aperta su I ; dico che I'_y è aperto su I_y .

Sia y_0 un punto di I'_y e supponiamo che sia $y_1 < y_0 < y_2$; esisterà almeno un punto di I' con la seconda coordinata uguale ad y_0 , diciamolo (x_0, y_0) . Poichè I' è aperto su I si può determinare $h > 0$ in modo che il segmento

$$x = x_0 \quad , \quad y_0 - h \leq y \leq y_0 + h$$

appartenga ad I' . Ma allora, sull'asse delle y , anche il segmento $y_0 - h \leq y \leq y_0 + h$ appartiene ad I'_y .

Se è $y_1 = y_0$ ($y_2 = y_0$), si dimostra con un ragionamento analogo che si può scegliere il numero positivo h in modo che il segmento $y_1 \leq y \leq y_1 + h$ ($y_2 - h \leq y \leq y_2$) appartenga ad I'_y . Di qui si deduce che I'_y è aperto su I_y ⁽²⁾.

2. Consideriamo ora un insieme I , e supponiamo che in esso sia definita una funzione $f(x, y)$. Poniamo

$$e'(\bar{y}) = \text{estremo inferiore di } f(x, \bar{y})$$

$$e''(\bar{y}) = \text{estremo superiore di } f(x, \bar{y}).$$

Dico, in primo luogo, che:

TEOREMA I. - Se l'insieme I è chiuso e limitato, $e'(y)$ è inferiormente semicontinua in I_y , se $f(x, y)$ è tale in I ; ed $e''(y)$ è superiormente semicontinua in I_y , se $f(x, y)$ è tale in I .

Per dimostrare la prima parte di questo teorema basta far vedere che per ogni numero reale α l'insieme $I_y(\alpha)$ dei punti in cui è

$$e'(y) \leq \alpha$$

è chiuso, se non è vuoto.

(1) Cfr. CARATHÉODORJ, loc. cit.

(2) Con un ragionamento un po' più lungo si dimostra che ogni insieme convesso gode della proprietà *a*).

Supponiamo che in un punto y_0 di I_y sia $e'(y) \leq \alpha$; il teorema di Weierstrass, applicato alla funzione inferiormente semicontinua $f(x, y_0)$, ci assicura che nell'insieme - chiuso e limitato - $S(y_0)$ esiste almeno un punto (x_0, y_0) in cui è

$$f(x_0, y_0) \leq \alpha;$$

viceversa, se in un punto (x_0, y_0) di I è $f(x_0, y_0) \leq \alpha$, è anche $e'(y_0) \leq \alpha$.

In altri termini $I_y(\alpha)$ è la proiezione sull'asse delle y dell'insieme $I(\alpha)$ dei punti di I in cui è

$$f(x, y) \leq \alpha;$$

ma $f(x, y)$ è inferiormente semicontinua, dunque $I(\alpha)$ è chiuso; esso è inoltre limitato, poichè I è limitato, quindi la sua proiezione è chiusa.

La seconda parte del teorema è immediata. Basta osservare che se $f(x, y)$ è superiormente semicontinua, $-f(x, y)$ lo è inferiormente e, per quanto si è detto finora, lo è anche la funzione $\bar{e}'(y)$, se con $\bar{e}'(y)$ indichiamo la funzione che per $-f(x, y)$ ha l'ufficio che per $f(x, y)$ ha la $e'(y)$; d'altra parte è

$$e''(y) = -\bar{e}'(y)$$

dunque, ecc.

3. Dico, in secondo luogo, che:

TEOREMA II. - Se l'insieme I gode della proprietà $a)$, $e''(y)$ è inferiormente semicontinua in I_y , se tale è $f(x, y)$ in I ; ed $e'(y)$ è superiormente semicontinua in I_y , se tale è $f(x, y)$ in I .

Sia α un numero reale e si indichi con $I_y(\alpha)$ la porzione di I_y in cui è

$$e''(y) > \alpha;$$

per dimostrare che $e''(y)$ è inferiormente semicontinua in I_y basterà far vedere che $I_y(\alpha)$ è, per ogni α , vuoto o aperto su I_y .

Si riconosce facilmente che, anche in questo caso, $I_y(\alpha)$ è proiezione della porzione $I(\alpha)$ di I in cui è

$$f(x, y) > \alpha;$$

ora $f(x, y)$ è inferiormente semicontinua, dunque $I(\alpha)$ è aperto su I ; e poichè I gode della proprietà $a)$, $I_y(\alpha)$ è aperto su I_y .

Dopo di ciò per dimostrare la parte del teorema relativa ad $e'(y)$ basta ragionare come alla fine del numero precedente.

A chiarimento del teorema ora stabilito, mette conto osservare che se l'insieme I non gode della proprietà $a)$, è possibile definire in I una funzione inferiormente semicontinua per la quale $e''(y)$ non risulta inferiormente semicontinua in I_y .

Infatti si supponga che I' sia una porzione di I aperta su I e tale che la sua proiezione I'_y non sia aperta su I_y ; e si ponga

$$f(x, y) = 1 \quad ; \quad f(x, y) = 0$$

rispettivamente in I' ed in $(I - I')$. La funzione così definita è inferiormente semicontinua; d'altra parte l'insieme in cui è $e''(y) > 0$ è I'_y , e poichè I'_y non è aperto su I_y , la funzione $e''(y)$ non può essere inferiormente semicontinua.

Un'osservazione analoga può esser fatta per $e'(y)$.

4. Dai teoremi I e II discende che

TEOREMA III. — Se $f(x, y)$ è una funzione continua definita in un insieme I , che sia chiuso e limitato e goda della proprietà a), i suoi minimi e massimi parziali $e'(y)$ ed $e''(y)$ sono funzioni continue in I_y .

Le condizioni imposte ad I sono verificate se I è un rettangolo coi lati paralleli agli assi coordinati, dunque:

Se la funzione continua $f(x, y)$ è definita nel rettangolo

$$x_1 \leq x \leq x_2 \quad ; \quad y_1 \leq y \leq y_2,$$

le due funzioni $e'(y)$ ed $e''(y)$ sono continue nell'intervallo $y_1 \leq y \leq y_2$.

OSSERVAZIONI. — 1° Dal teorema I e dal teorema di Weierstrass per le funzioni semicontinue in una variabile si può, volendo, dedurre il teorema di Weierstrass per le funzioni semicontinue di due variabili.

Supponiamo infatti che nell'insieme chiuso e limitato I sia definita una funzione $f(x, y)$, semicontinua, per es., inferiormente; ed indichiamo con m il suo estremo inferiore. È chiaro che m è anche l'estremo inferiore in I_y del minimo parziale $e'(y)$ di $f(x, y)$. Siccome $e'(y)$ è inferiormente semicontinua, in un conveniente punto y_0 di I_y sarà $e'(y_0) = m$; ciò vuol dire che la funzione di una variabile $f(x, y_0)$, che è inferiormente semicontinua ed è definita nell'insieme chiuso e limitato $S(y_0)$, ha come estremo inferiore in $S(y_0)$ il numero m ; dunque, ecc.

2° Mette appena conto rilevare che l'analisi svolta per i massimi e minimi parziali per una funzione di due variabili, si può estendere facilmente alle funzioni $f(P, Q)$ di due punti P, Q variabili in due insiemi degli S_p ed S_q .

Matematica. — *Complementi al teorema di riduzione dei sistemi differenziali ortogonali.* Nota di V. HLAVATÝ, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In questa Nota vogliamo esporre qualche considerazione concernente il « *teorema di riduzione* » dei sistemi lineari differenziali d'ordine n , dimostrato da noi in una Nota precedente ⁽²⁾.

Con *teorema di riduzione* intendiamo la seguente proposizione:

« Sia

$$(I) \quad \frac{dz_i}{dt} + \sum_j^n z_j p_{ji} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

un sistema lineare ordinario d'ordine n (in cui p_{ij} si suppongono funzioni reali note della variabile indipendente t , derivabili quante volte occorre) che ammette un integrale quadratico, definito

$$J \equiv \sum_i^n g_{ij} z_i z_j = \text{cost} > 0$$

(dove, trattandosi per ipotesi di forma definita positiva, il determinante $\|g_{ij}\| > 0$). Tale sistema è riducibile (con operazioni reali in termini finiti) alla forma

$$(II) \quad \frac{d\eta_i}{dt} + q_{i-1} \eta_{i-1} - q_i \eta_{i+1} = 0 \quad (i = 1, \dots, n; q_0 = q_n = 0),$$

le funzioni reali q_1, \dots, q_{n-1} essendo calcolabili per ricorrenza a partire dai dati della questione ».

Vale la pena di rilevare che per dimostrare questo teorema abbiamo tenuto conto del fatto ben noto, che il sistema (I) dotato di integrale quadratico definito J è sempre riducibile (senza quadrature) alla forma

$$(III) \quad \frac{dy_i}{dt} + \sum_j^n y_j r_{ji} = 0$$

con

$$r_{ij} + r_{ji} = 0,$$

(1) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

(2) Vedi « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », seduta del 4 dicembre 1927: « Sulla riduzione dei sistemi ortogonali..... »

mentre l'integrale quadratico assume la forma

$$\sum_i (y_i)^2 = 1.$$

1. Nella Nota precedente ci siamo specificamente riferiti al *caso generale*, in cui le funzioni q_1, \dots, q_{n-1} che si incontrano successivamente nel nostro procedimento di riduzione sono tutte diverse da zero. Vogliamo ora dimostrare (cio che è del resto pressochè evidente) come sia effettivamente legittimo ritenere in *generale* $q_1, \dots, q_{n-1} \neq 0$, nel senso che basta partire da un versore u_1 non speciale (soggetto soltanto a limitazioni qualitative) perchè q_1, \dots, q_{n-1} risultino sicuramente $\neq 0$. A tal scopo ricorriamo a n versori linearmente indipendenti y_1, \dots, y_n , integrali particolari del sistema (II) ⁽¹⁾.

Atteso il carattere ortogonale di tale sistema, possiamo anche supporre che i detti versori y_1, \dots, y_n formino un'ennupla ortogonale. Pongasi

$$(1) \quad u_i = \sum_j e_{ij} y_j$$

le $e_{ij}(t)$ costituendo i coefficienti di una sostituzione ortogonale.

Vogliamo constatare che tale sostituzione può effettivamente (e in infiniti modi) essere scelta in guisa che l'ennupla u_1, \dots, u_n dia luogo al procedimento riduttivo della Nota precedente, nel quale — ricordiamolo — il primo versore u_1 rimane *a priori* arbitrario.

Avuto riguardo alla particolare scelta dei versori y_1, \dots, y_n , si trova subito

$$(2) \quad Du_i = \sum_j e_{ij} Dy_j = \sum_j \left(\frac{de_{ij}}{dt} y_j + e_{ij} Dy_j \right) = \sum_j \frac{de_{ij}}{dt} y_j \quad (i = 1, \dots, n).$$

D'altra parte, in quanto gli u_i costituiscono effettivamente un'ennupla di riduzione *corrispondente al caso generale*, devono valere le formole (15), (16), (17), (18)* e (19) della Nota precedente, cioè

$$(3) \quad Du_i = q_i u_{i+1} - q_{i-1} u_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n; \quad q_0 = q_n = 0)$$

$$(4) \quad q_a = \left| \sqrt{(Du_a) \times (Du_a) - q_{a-1}^2} \right| > 0 \quad (a = 1, \dots, n-1; \quad q_0 = 0),$$

e reciprocamente se queste relazioni sono soddisfatte, si è sicuri che l'ennupla delle u è atta a ridurre il sistema differenziale (III) alla forma (II).

(1) Si avverta che, mentre a scopo dimostrativo, nulla vieta di far intervenire la conoscenza di integrali del sistema differenziale dato, il procedimento di riduzione ha interesse solo in quanto venga eseguito indipendentemente dall'integrazione del sistema stesso. Attraverso i suoi integrali particolari y_1, \dots, y_n , linearmente indipendenti, ogni sistema (III) è senz'altro riconducibile alla forma banale $\frac{dc_i}{dt} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$.

Sostituendovi per le u_i le loro espressioni (1), tenendo conto delle (2) ed eguagliando i coefficienti di un medesimo versore nei due membri, si ricavano le relazioni:

$$(3)^* \quad \frac{de_{ij}}{dt} = q_i e_{i+1j} - q_{i-1} e_{i-1j} \quad (j, i = 1, \dots, n; q_0 = q_n = 0)$$

$$(4)^* \quad q_a = \left| \sqrt{\sum_i^n \left(\frac{de_{ai}}{dt} \right)^2} - q_{a-1}^2 \right| > 0 \quad (a = 1, \dots, n-1; q_0 = 0).$$

Notiamo d'altra parte che, in base alla prima delle (1), l'arbitrarietà di u_i si può immaginare tradotta nella circostanza analitica che le funzioni $e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1n}$ rimangono arbitrarie, salvo le limitazioni.

$$(5) \quad \sum_i^n (e_{1i})^2 = 1, \quad \left(\text{ed } \sum_i^n \left(\frac{de_{1i}}{dt} \right)^2 \neq 0 \right).$$

Ciò premesso, consideriamo in uno spazio euclideo di coordinate cartesiane ortogonali x_1, \dots, x_n la curva C, definita dalle equazioni parametriche

$$(6) \quad x_i = \int e_{1i} dt \quad (i = 1, \dots, n)$$

in cui, in causa della (5), il parametro t si identifica coll'arco di detta curva. Ne segue che (3)*, (4)* costituiscono *in sostanza* ⁽¹⁾ il sistema delle formule di Frenet per C e per ciò i valori assoluti delle sue $n-1$ curvature non sono altro che le q_1, \dots, q_{n-1} .

Ora, per l'osservazione fatta poc'anzi, la scelta arbitraria, del versore u_i si riverbera in un'analogia arbitrarietà delle e_{1i} , cioè delle espressioni parametriche (6) delle coordinate di C. Questa ha in generale *tutte* le $n-1$ curvature diverse da zero, dunque rimane provato che *in generale tutte le funzioni* q_1, \dots, q_{n-1} *sono diverse da zero*.

2. *Caso in cui la direzione u_1 è, o si riguarda assegnata.* — Le considerazioni precedenti sono subordinate all'ipotesi che u_1 sia *a priori* arbitraria.

In alcuni casi (e avremo occasione di indicarne esempi espressivi) il versore u_1 è dato, o quanto meno specificamente designato, dalla natura della questione. Allora può accadere che il nostro procedimento di riduzione applicato sul versore ben determinato u_1 dia luogo successivamente a ver-

(1) Cioè a prescindere dai versi dei vettori u_3, u_4, \dots, u_n . Nelle formule di Frenet il verso dei vettori dell'ennupla è definito preventivamente in base a criteri geometrici, mentre nel caso nostro è fissato in modo da rendere le q (che corrispondono alle successive curvature) tutte positive.

sori u_r ($r = 1, 2, \dots, m-1$; $m < n$) le cui derivate gobbe Du_r non sono combinazioni lineari di u_1, u_2, \dots, u_r (talchè rimane individuato, come si mostrò allora, u_{r+1}) e si può porre

$$(7) \quad Du_r = q_r u_{r+1} - q_{r-1} u_{r-1}, \quad [\text{con } q_0 = 0, \quad q_1, \dots, q_r \neq 0]$$

mentre c'è in tale successione un primo versore u_m la cui derivata gobba è combinazione lineare dei versori u_1, \dots, u_{m-1} . Possiamo allora porre

$$Du_m = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{m-1} u_{m-1}$$

e determinare le β in base alla (7). Risulta così

$$(8) \quad Du_m = -q_{m-1} u_{m-1}.$$

Dal confronto della (3) - per $i = m$ - colla (8) si rileva che il caso particolare in cui u_m è il primo versore della serie u_1, \dots, u_m avente derivata gobba Du_m combinazione lineare di u_1, \dots, u_{m-1} , si può immaginare tradotto nella circostanza analitica che q_m è la prima delle funzioni q_1, \dots, q_m che sia uguale a zero. In tal caso ogni versore v ortogonale all'ennupla u_1, \dots, u_m ha una derivata gobba Dv anch'essa ortogonale all'ennupla. Infatti, esprimendo analiticamente la circostanza che v è ortogonale all'ennupla u_1, \dots, u_m cioè, ponendo

$$v \times u_a = 0, \quad (a = 1, \dots, m)$$

l'applicazione dell'operatore D a questa equazione, in base alle (7) e (8), dà

$$0 = (Dv) \times u_a + v \times Du_a = (Dv) \times u_a,$$

ciò che prova la nostra asserzione.

Ora, scegliendo il versore u_{m+1} ortogonale a u_1, \dots, u_m in modo arbitrario⁽¹⁾ basta applicare a questo versore il procedimento da noi usato per u_1 nella Nota precedente. Ricaveremo così un' $(n-m)$ -pla ortogonale di versori u_{m+1}, \dots, u_n ortogonali tra loro, nonchè a u_1, \dots, u_m e le formule

$$(9) \quad \begin{cases} Du_b = q_b u_{b+1} - q_{b-1} u_{b-1} & (b = m+1, \dots, n) \\ q_m = q_n = 0 \\ q_c = \left| \sqrt{(Du_c) \times (Du_c) - q_{c-1}^2} \right| > 0 & (c = m+1, \dots, n-1). \end{cases}$$

Ora, confrontando il caso generale della Nota precedente (cioè le equazioni (15)-(19) della stessa Nota) col caso particolare testè considerato (cioè colle equazioni (7)-(9) di questa Nota), vediamo che a partire da un

(1) Il che è sempre possibile nel caso $m < n-1$. Per il caso $m = n-1$ vedi n. 3 d).

versore preventivamente assegnato si perviene per la riduzione del sistema differenziale (III): o al tipo generale (II), ovvero ad un tipo che vi è formalmente ⁽¹⁾ incluso come caso particolare e che da esso si deduce ponendovi materialmente $q_m = 0$. In altri termini, quando i dati della questione sono, oltre al sistema differenziale, un versore u_i , iniziandosi da questo il procedimento di trasformazione, si arriva o al tipo generale (II) che appare in certo senso irriducibile, ovvero ad un tipo già scisso in due sistemi parziali, un primo

$$(II)_1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\eta_1}{dt} = \quad \quad \quad + q_1 \eta_2 \\ \frac{d\eta_2}{dt} = -q_1 \eta_1 \quad \quad \quad + q_2 \eta_3 \\ \frac{d\eta_{m-1}}{dt} = \quad \quad \quad -q_{m-2} \eta_{m-2} \quad \quad \quad + q_{m-1} \eta_m \\ \frac{d\eta_m}{dt} = \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -q_{m-1} \eta_{m-1} \end{array} \right.$$

d'ordine m ed un secondo

$$(II)_2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\eta_{m+1}}{dt} = \quad \quad \quad q_{m+1} \eta_{m+2} \\ \frac{d\eta_{m+2}}{dt} = -q_{m+1} \eta_{m+1} \quad \quad \quad + q_{m+2} \eta_{m+3} \\ \frac{d\eta_{n-1}}{dt} = \quad \quad \quad -q_{n-2} \eta_{n-2} \quad \quad \quad q_{n-1} \eta_n \\ \frac{d\eta_n}{dt} = \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -q_{n-1} \eta_{n-1} \end{array} \right.$$

d'ordine $(n - m)$.

Tale riduzione si effettua mediante la trasformazione

$$\gamma_i = \sum_j^n u_{ji} \eta_j$$

(1) Mentre nel caso generale il versore u_{m+1} è legato ai versori precedenti u_1, \dots, u_m , nel nostro caso particolare il versore u_{m+1} rimane arbitrario salvo la limitazione dell'ortogonalità ai versori u_1, \dots, u_m , perciò l'analogia dei due casi non è completa.

dove le u_{xi} sono le funzioni assegnate attraverso il versore \mathbf{u}_1 e

$$u_{xj} = \frac{1}{q_{x-1}} \left(u_{x-2j} q_{x-2} + \frac{du_{x-1j}}{dt} + \sum_i^n u_{x-1i} r_{ij} \right) \quad (x=2, \dots, m, m+2, \dots, n)$$

$$q_0 = q_m = q_n = 0 \quad (j=1, \dots, n)$$

$$q_\chi = \left| \sqrt{\sum_i^n \left(\frac{du_{\chi i}}{dt} + \sum_j^n u_{\chi j} r_{ji} \right)^2} - q_{\chi-1}^2 \right| > 0 \quad \left(\begin{matrix} \chi = 1, \dots, m-1, \\ m+1, \dots, n-1 \end{matrix} \right),$$

le u_{m+1j} essendo componenti di un arbitrario versore ortogonale ad $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ con

$$\frac{du_{m+1j}}{dt} + \sum_i^n u_{m+1i} r_{ij} = 0 \quad (j=1, \dots, n).$$

3. Osservazione. — Vale la pena di rilevare alcuni valori speciali di m ;

a) Se $m=1$, cioè se $q_1=0$, risulta subito che \mathbf{u}_1 è integrale (particolare) del sistema (III), perchè $D\mathbf{u}_1=0$. In tal caso con la sostituzione

$$y_1 = Y_1 + u_{11}, \quad y_2 = Y_2 + u_{12}, \dots, \quad y_{n-1} = Y_{n-1} + u_{1n-1}, \quad y_n = u_{1n}$$

il sistema dato (III) si riduce al sistema d'ordine $n-1$

$$\frac{dY_a}{dt} + \sum_b^{n-1} Y_b r_{ba} = 0 \quad (a=1, \dots, n-1).$$

b) Se $m=2$, cioè se $q_1 \neq 0, q_2=0$, i versori

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{u}_1 \cos \int q_1 dt - \mathbf{u}_2 \sin \int q_1 dt$$

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{u}_1 \sin \int q_1 dt + \mathbf{u}_2 \cos \int q_1 dt$$

sono integrali particolari del sistema (III) e perciò possiamo ridurlo direttamente ad un sistema lineare ordinario d'ordine $n-2$.

c) Se $m=n-2$, cioè se $q_1, \dots, q_{n-3} \neq 0, q_{n-2}=0$ i versori

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{u}_{n-1} \cos \int q_{n-1} dt - \mathbf{u}_n \sin \int q_{n-1} dt$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{u}_{n-1} \sin \int q_{n-1} dt + \mathbf{u}_n \cos \int q_{n-1} dt$$

sono integrali particolari del sistema (III) e perciò possiamo ancora ridurlo direttamente ad un sistema lineare ordinario d'ordine $n-2$.

d) Se $m = n-1$ cioè se $q_1, \dots, q_{n-2} \neq 0, q_{n-1} = 0$, il versore u_n è definito come ortogonale all'($n-1$)-pla u_1, \dots, u_{n-1} e non può essere scelto in modo arbitrario. Poichè $Du_n = 0$ tale versore è integrale particolare del sistema (III) (conseguito mediante sole operazioni reali in termini finiti) e perciò atto ad abbassare di una unità l'ordine del sistema dato.

Meccanica. — *Variatione del campo nelle equazioni del moto elastico.* Nota di G. KRALL, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Riprendendo l'argomento d'una precedente Nota ⁽²⁾ intorno alla variazione infinitesima del campo di certe equazioni integrali dei tipi di Fredholm, qui ci proponiamo di estendere e precisare in miglior modo i risultati allora conseguiti all'ambito delle equazioni integrali vettoriali.

All'uopo, tanto per fissar le idee e senza pregiudizio della generalità, consideriamo le equazioni che definiscono le vibrazioni armoniche di un corpo elastico isotropo o no. Dette equazioni, con le notazioni usuali, si scrivono compendiosamente nella forma

$$(1) \quad \sum_k \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial x_k} = \lambda \mu u^i, \quad (i = 1, 2, 3);$$

con λ parametro da determinare nella maniera nota attraverso alle condizioni al contorno che, nella nostra ricerca, specificheremo con le relazioni

$$(2-a) \quad \Phi_{ijn} = \sum_k \Phi_{ik} \cos(\widehat{nx_k}) = 0, \quad (i = 1, 2, 3);$$

oppure

$$(2-b) \quad u^i = 0, \quad (i = 1, 2, 3);$$

ben conosciute come quelle che competono ai corpi liberi o esternamente vincolati (in modo rigido) in ogni punto.

Ciò posto, facendo richiamo alle fondamentali ricerche di Somigliana e Fredholm, potremo scrivere, come già indicammo in una recente Nota ⁽³⁾,

(1) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

(2) G. KRALL, *Sulla variazione infinitesima del campo nelle equazioni di Fredholm*; questi « Rendiconti », vol. IV, serie 6^a, 2° sem., fasc. 10, 1926 (Nota II).

(3) G. KRALL, *Dipendenza funzionale dal contorno del tensore di Green-Somigliana*; questi « Rendiconti », fasc. precedente. (Nota I).

equivalente alle (1) il sistema di equazioni integrali, o se si vuole, l'equazione integrale vettoriale,

$$(3) \quad u^i(P_1) = \lambda \sum_j \int_S \mu S^{ij}(P_1, P_2) u^j(P_2) dS_2, \quad (i = 1, 2, 3);$$

la matrice $S^{ij} = S^{ij}(P_1, P_2)$ stando a caratterizzare il cosiddetto tensore di Green-Somigliana relativo ai problemi *a*) o *b*) della Nota ora citata a seconda che, in superficie, sono assegnate le condizioni (2a) o (2b).

Per i caratteri specifici di siffatti tensori, riterremo, con facile estensione dei risultati dell'Hilbert,

a) Esistenza, corrispondentemente ad infiniti valori

$$\lambda_\rho \quad (\rho = 1, 2, 3, \dots);$$

del parametro λ (ricavabili come radici dell'equazione che si ottiene annullando il cosiddetto determinante fondamentale del sistema integrale) di infinite soluzioni (*autofunzioni* dal nome di *autovalori* spettanti alle nominate radici) u_ρ^i ($i = 1, 2, 3$), ($\rho = 1, 2, 3, \dots$) costituenti un sistema *ortonormale chiuso*, soddisfacenti alle condizioni tipiche

$$(4) \quad \sum_i \int_S \mu u_\rho^i u_\tau^i dS = \begin{cases} 1 & \text{per } \rho = \tau, \\ 0 & \text{per } \rho \neq \tau. \end{cases}$$

b) Sviluppabilità di una terna di funzioni v^i ($i = 1, 2, 3$) che soddisfisi alla condizione di Hilbert-Schmidt generalizzata

$$(5) \quad v^i(P_1) = \sum_j \int_S S^{ij}(P_1, P_2) f_j(P_2) dS_2,$$

con $f_j = f_j(P)$ terna *a priori* arbitraria di funzioni a quadrato integrabile⁽¹⁾, in una serie di *autoterne* cioè di terne di *autofunzioni* u_ρ^i ,

$$(6) \quad v^i = \sum_{\rho} \gamma_{\rho} u_{\rho}^i,$$

i coefficienti γ_{ρ} essendo calcolati alla Fourier secondo la relazione

$$(7) \quad \gamma_{\rho} = \sum_j \int_S \mu u_{\rho}^j v^j dS.$$

§ 2. — Ciò posto, consideriamo la trasformazione infinitesima di σ in σ^* specificata nella Nota II e, supposte note le soluzioni della (3) (quindi

(1) Soddisfacenti, nel caso (2-a), a quelle condizioni per cui, riguardate come forze, resterebbe assicurato l'equilibrio di un corpo rigido.

delle (1)) relative al contorno σ , cerchiamo di pervenire alle soluzioni variate u_p^i corrispondenti ai nuovi autovalori λ_p^* spettanti a σ^* .

Ove si denoti con $\delta\lambda_p$, δu_p^i la variazione di λ_p rispettivamente u_p^i , con δS la variazione del campo S (negativa per σ^* interno a σ); postulato ch'esse variazioni siano dell'ordine delle variazioni δS^{ij} di S^{ij} , avremo, con riguardo alla (3), l'equazione integrale non omogenea

$$(8) \quad \delta u_p^i - \lambda_p \sum_j \int_S \mu S^{ij} (P_1, P_2) \delta u_p^j dS = \delta \psi_p^i$$

essendo

$$(9) \quad \begin{aligned} \delta \psi_p^i = & \delta \lambda_p \sum_j \int_S \mu S^{ij} u_p^j dS + \lambda_p \sum_j \int_S \mu \delta S^{ij} u_p^j dS + \\ & + \lambda_p \sum_j \int_S \mu S^{ij} \delta u_p^j dS + \dots, \end{aligned}$$

dove con \dots si indicano infinitesimi d'ordine superiore al primo.

Dalla necessaria e sufficiente condizione d'ortogonalità

$$(10) \quad \sum_i \int_S \mu \psi_p^i u_p^i dS = 0,$$

cui deve soddisfare la $\delta \psi_p^i$ perchè la (8) ammetta soluzioni pur essendo λ_p *autovalore* della corrispondente equazione omogenea, risulta con facili calcoli

$$\delta \lambda_p = - \lambda_p \sum_i \int_S \mu [u_p^i]^2 dS - \lambda_p^2 \sum_{ij} \int_S \int_S \delta S^{ij} (P_1, P_2) u_p^i (P_1) u_p^j (P_2) \mu (P_2) dS_1 dS_2 + \dots$$

E poichè infine, per la (14) della Nota II si ha pel *problema a*),

$$(11) \quad \delta S^{ij} (P_1, P_2) = - \int_{\sigma} \zeta \sum_{lk, rs} c_{lk, rs} e^{lki} (P_1, P) e^{rsj} (P_2, P) d\sigma + \dots,$$

con $\zeta = \zeta(P)$ caratterizzante la distanza dei punti corrispondenti P e P^* di σ e σ^* , (positivamente contata nel senso della normale interna), avuto riguardo che, con legittime derivazioni sotto il segno integrale nella (3) si ha,

$$e_p^{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p^l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_p^k}{\partial x_l} \right) = \lambda_p \sum_j \int_S \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial S^{lj}}{\partial x_k} + \frac{\partial S^{kj}}{\partial x_l} \right) u_p^j dS,$$

otteniamo facilmente, ponendo

$$W_{\rho\tau} = \sum_{l_k,rs}^3 c_{lk,rs} e_{\rho}^{lk} e_{\tau}^{rs}, \quad (\rho = 0 \neq \tau) \quad (1),$$

$$(12-a) \quad \delta\lambda_{\rho} = \lambda_{\rho} \sum_i \int_{\sigma} \mu [u_{\rho}^i]^2 \zeta d\sigma + \int_{\sigma} \zeta W_{\rho\rho} d\sigma + \dots$$

Nel caso in cui sia $u^i = 0$ (condizione (2-b)) sul contorno, poichè risulta del second'ordine l'ultimo integrale della (9), e l'espressione di δS^i è ancora data, salvo il segno mutato, da una espressione formalmente identica alla (11), otteniamo

$$(12-b) \quad \delta\lambda_{\rho} = - \int_{\sigma} \zeta W_{\rho\rho} d\sigma + \dots$$

§ 3. — Così specificate, le variazioni degli autovalori λ_{ρ} e quindi, per cose note, a meno del fattore $\frac{1}{4\pi^2}$, dei quadrati delle *frequenze fondamentali* del sistema vibrante, danno facile adito ad una espressiva interpretazione meccanica.

Infatti, fissando l'attenzione sulla (12-a) troviamo in conformità con alcuni classici teoremi di Lord-Rayleigh ⁽²⁾ che, ove ad esempio si rirenga σ^* tutto interno a σ , cioè sia in ogni punto P di σ , $\zeta(P) > 0$, si avrà, corrispondentemente alla diminuzione $\int_{\sigma} \mu \zeta d\sigma$ della massa totale $\int_{\sigma} \mu dS$, un aumento di frequenza (di cui tien conto il primo termine), aumento, che potrà o no prevalere sulla diminuzione $\lambda_{\rho} \int_{\sigma} W_{\rho\rho} \zeta d\sigma$ ($W_{\rho\rho}$ è necessariamente < 0) corrispondente alla ridotta *rigidità* del sistema.

Nel corpo vincolato ($u^i = 0$ su σ) invece, alla riduzione del campo corrisponde manifestamente aumento di *rigidità*, quindi aumento di frequenza in conformità con la (12-b).

§ 4. — Passando al calcolo della variazione δu_{ρ}^i dell'*autoterna* u_{ρ}^i , poniamo la (8) nella forma

$$\delta u_{\rho}^i - \zeta \psi_{\rho}^i = \lambda_{\rho} \sum_i \int_{\sigma} \mu S^{ij} \delta u_{\rho}^i dS.$$

(1) Manifestamente, $W_{\rho\rho}$ è il doppio del valore del potenziale elastico unitario corrispondente alla deformazione u_{ρ}^i .

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II, parte I, cap. V, Bologna, Zanichelli, 1926.

Allora risulta manifesto che, ove si ammetta, e ciò sembra sicuramente legittimo, integrabile il quadrato della δu_p^i , la funzione $\delta u_p^i - \delta \psi_p^i$ sarà sviluppabile in serie di autofunzioni u_p^i conformemente alle (5), (6) e (7). Quindi, estendendo all'ambito vettoriale la formola risolutiva dell'equazione integrale non omogenea a nucleo simmetrico insegnata da Schmidt, otteniamo

$$(13) \quad \delta u_p^i = \delta \psi_p^i + \lambda_p \sum_{\tau}^{\infty} \frac{\sum_i \int \mu \delta \psi_p^i u_{\tau}^i dS}{\lambda_{\tau} - \lambda_p} u_{\tau}^i$$

l'apice stando ad indicare, per quanto non sia necessario ove si ricordi la (10), l'esclusione del termine corrispondente a $p = \tau$. Così in definitiva, ove si espliciti la $\delta \psi_p^i$ nei casi corrispondenti alle condizioni al contorno (2-a) e (2-b), risulta per il corpo libero, al posto della (13),

$$(14-a) \quad \delta u_p^i = \delta \psi_p^i + \lambda_p \sum_{\tau}^{\infty} \frac{u_{\tau}^i}{(\lambda_{\tau} - \lambda_p) \lambda_{\tau}} \left\{ \int \zeta W_{p\tau} d\sigma + \right. \\ \left. + \lambda_p \sum_i \int \mu u_p^i u_{\tau}^i \zeta d\sigma \right\} + \dots,$$

e per quello vincolato invece,

$$(14-b) \quad \delta u_p^i = \delta \psi_p^i - \lambda_p \sum_{\tau}^{\infty} \frac{u_{\tau}^i}{(\lambda_{\tau} - \lambda_p) \lambda_{\tau}} \int \zeta W_{p\tau} d\sigma + \dots$$

Concludendo osserveremo, omettendo per brevità la necessaria verifica, che effettivamente le soluzioni variate, calcolate con le (14-a) e (14-b) verificano sul contorno σ le condizioni (2-a) rispettivamente (2-b), s'intende, a meno di termini d'ordine superiore al primo.

Rileveremo ancora, che in dette relazioni è naturalmente compendiata la soluzione dell'analogo problema nell'ambito delle funzioni scalari, pur che si sostituisca al tensore S^{ij} l'ordinaria funzione di Green. In particolare poi, ove si consideri la membrana vibrante, si ritrovano senza difficoltà le formole di Lord-Rayleigh.

Matematica. — *Sulla induzione magnetica.* Nota di D. GRAFFI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

1. — Ci proponiamo di trattare il problema dell'induzione magnetica per i corpi ferromagnetici, nel caso però che le variazioni nel tempo del campo elettromagnetico siano tanto piccole da potersi trascurare i fenomeni connessi con questa variazione.

Indichiamo rispettivamente con \mathbf{H}_0 , $\mathbf{H}_1 = -\text{grad } \psi_1$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1$, il campo inducente, il campo dovuto al magnetismo indotto ed il campo totale, e con \mathbf{J} l'intensità di magnetizzazione. Il problema dell'induzione magnetica si riduce, in ultima analisi, alla ricerca di ψ_1 , e per risolvere il problema occorre avere una relazione fra \mathbf{J} e \mathbf{H} .

Nel caso dei corpi ferromagnetici è utile considerare il fenomeno della magnetizzazione come fenomeno ereditario, perciò ammetteremo che la \mathbf{J} al tempo t (che indicheremo con $\mathbf{J}(t)$) dipenda, per un elemento del corpo magnetico, oltre che dal valore del campo magnetico che agisce su quell'elemento al tempo t , anche da tutti i valori del campo magnetico che hanno agito sull'elemento stesso dai tempi più remoti al tempo t .

Perciò dovremo scrivere, seguendo il Volterra ⁽²⁾,

$$(1) \quad \mathbf{J}(t) = f(\mathbf{H}(t)) + F\left(\mathbf{H}\left(\tau\right)_{-\infty}^t\right)$$

dove $\mathbf{H}(\tau)$ indica il valore di \mathbf{H} al tempo τ .

Come si vede si presentano qui funzioni di vettori e funzioni di varietà vettoriali alle quali si possono applicare i risultati di una nostra Nota sull'argomento ⁽³⁾. Ammetteremo dunque che le funzioni abbiano le proprietà necessarie affinchè siano validi i risultati della Nota citata.

Osserviamo che nel caso dei corpi isotropi la funzione di vettore $f(\mathbf{H})$ si semplifica. Infatti $\mathbf{J}(t) \times \mathbf{H}(t)$ deve rimanere invariato per una uguale rotazione a tutti i vettori che compongono la funzione $\mathbf{H}(\tau)$, e ciò per qualsiasi $\mathbf{H}(\tau)$; quindi $f(\mathbf{H}(t) \times \mathbf{H}(t))$ deve essere dipendente solo da mod. $\mathbf{H}(t)$. Ma poichè $f(\mathbf{H}(t))$ e $\mathbf{H}(t)$ devono avere la stessa direzione si ha $f(\mathbf{H}(t)) = \varphi(H^2) \mathbf{H}(t)$.

(1) Nella seduta del 18 dicembre 1927.

(2) *Sulle equazioni dell'elettrodinamica.* «Rend. Acc. Lincei», 1° sem., 1909.

(3) *Sulle funzioni di varietà vettoriali.* «Rend. Acc. Lincei», 2° sem., 1927.

2. - Per trattare il problema dell'induzione magnetica ci limiteremo per semplicità al caso di un solo corpo magnetico immerso in un mezzo non magnetico, ma i risultati che otterremo sono generali.

Questo problema dunque, che si riduce alla ricerca dell'incognita ψ_1 , si può impostare alla maniera di Kirchhoff, ponendo

$$(2) \quad \psi_1 = - \int_S \frac{\operatorname{div} \mathbf{J}}{r} dS - \int_{\sigma} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{n}}{r} d\sigma,$$

ove S è il volume occupato dal corpo magnetico, σ la superficie che limita, \mathbf{n} la normale interna a σ . Al posto di \mathbf{J} si deve mettere l'espressione

$$\mathbf{J}(t) = f(\mathbf{H}_0(t) + \mathbf{H}_1(t)) + F\left(\mathbf{H}_0(\tau) + \lim_{-\infty} \mathbf{H}_1(\tau)\right).$$

Si ha dunque un'equazione funzionale che permette la determinazione di ψ_1 .

L'esistenza della soluzione sarà ammessa in base all'intuizione fisica; ma occorre stabilire le condizioni di unicità. A tal fine faremo intanto le seguenti ipotesi. La $f(\mathbf{H})$ rappresenta la parte non ereditaria della \mathbf{J} .

Se mancasse l'ereditarietà, si avrebbe, come è noto, per il vettore induzione magnetica \mathbf{B} il valore $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{J} = \mathbf{H} + 4\pi f(\mathbf{H})$, e cambiando \mathbf{H} in $\mathbf{H} + \mathbf{H}'$ si ha $\mathbf{B} + \mathbf{B}' = \mathbf{H} + \mathbf{H}' + 4\pi f(\mathbf{H} + \mathbf{H}')$. Ora, poichè anche nei corpi diamagnetici si ha $\mathbf{B}' \times \mathbf{H}' > 0$, questa ipotesi su $f(\mathbf{H})$ diventa ammissibile.

Ciò posto, si può dimostrare che noto \mathbf{H}_0 dall'inizio dei fenomeni a t la soluzione dell'equazione funzionale (2) è unica.

Supponiamo infatti che esistessero due soluzioni $\psi_1(t)$ e $\psi_1(t) + \theta(t)$.

Allora posto

$$\mathbf{J}'(t) = f(\mathbf{H}_0(t) - \operatorname{grad}(\psi_1(t) + \theta(t))) + F\left(\mathbf{H}_0(\tau) - \operatorname{grad}\left(\lim_{-\infty} \psi_1(\tau) + \theta(\tau)\right)\right),$$

deve essere

$$\theta(t) = - \int_S \frac{\operatorname{div}(\mathbf{J}' - \mathbf{J})}{r} dS - \int_{\sigma} \frac{\mathbf{J}' - \mathbf{J}}{r} \times \mathbf{n} d\sigma.$$

Quindi, definito un vettore $\mathbf{B}' = -\operatorname{grad} \theta + 4\pi(\mathbf{J}' - \mathbf{J})$ deve risultare

$$\operatorname{div} \mathbf{B}' = 0$$

$$(\mathbf{B}' \times \mathbf{n}) \text{ continuo su } \sigma$$

$$\mathbf{B}' = 0 \text{ all'infinito di ordine uguale a 2.}$$

Essendo ora

$$\operatorname{div}(\theta \mathbf{B}') = \theta \operatorname{div} \mathbf{B}' + \operatorname{grad} \theta \times \mathbf{B}';$$

integrando in tutto lo spazio S_∞ , poi applicando il teorema della divergenza si ha:

$$\int_{S_\infty} \text{grad } \theta \times \mathbf{B}' dS_\infty = 0$$

Ora questo integrale equivale a

$$(3) \int_{S_\infty} -\text{grad } \theta(t) \times \left[-\text{grad } \theta(t) + 4\pi f \left(-\text{grad } (\psi_t(t) + \theta(t)) + \mathbf{H}_0(t) \right) - \right. \\ \left. - f \left(-\text{grad } \psi_t(t) + \mathbf{H}_0(t) \right) \right] dS_\infty + 4\pi \int_S -\text{grad } \theta \times \left[F \left(-\text{grad } (\psi_t(\tau) + \theta(\tau)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mathbf{H}_0(\tau) \right) - F \left(\text{grad } \psi_t(\tau) + \mathbf{H}_0(\tau) \right) \right] dS.$$

Ma il primo integrale, per l'ipotesi fatte, si può scrivere

$$\int_{S_\infty} \psi(P) \text{grad}^2 \theta(t) dS_\infty \quad \psi(P) > 0$$

talchè applicando il teorema della media, esso diventa

$$L(t) \int_{S_\infty} \text{grad}^2 \theta(t) dS_\infty \quad L(t) > 0.$$

Il secondo integrale, per la formula (8) della Nota citata, si può scrivere nella forma

$$4\pi \int_S dS (-\text{grad } \theta(t)) \times \int_{-\infty}^t \frac{dF \left(\mathbf{H}_0(\tau) - \text{grad} \left(\psi_t(\tau) + \lambda \theta(\tau) \right) \right)}{d \left[\mathbf{H}_0(\xi) - \text{grad} \left(\psi_t(\xi) + \lambda \theta(\xi) \right) \right]} (-\text{grad } \theta(\xi)) d\xi.$$

Ora supponiamo che i fenomeni siano cominciati al tempo $-h$ (h grande qualsiasi); si potrà dunque scrivere $-h$ al posto di $-\infty$.

Intanto si vede subito che per $t = -h$ si ha:

$$\int_{S_\infty} \text{grad}^2 \theta(-h) dS_\infty = 0$$

da cui si deduce

$$\theta(-h) = 0$$

D'altra parte il secondo integrale dell'equazione (3) si può rendere in valore assoluto minore di

$$(4) \quad 4\pi \int_S dS \bmod \operatorname{grad} \theta(t) | \mathbf{a}(t) \times \\ \times \int_{-b}^t \bmod \operatorname{grad} \theta(\xi) \frac{dF(\mathbf{H}_0(\tau) - \operatorname{grad}_{-b}^t(\psi_1(\tau) + \lambda\theta(\tau)))}{d[\mathbf{H}_0(\xi) - \operatorname{grad}(\psi_1(\xi) + \lambda\theta(\xi))]} \mathbf{a}(\xi) d\xi |,$$

avendo posto $\operatorname{grad} \theta(t) = \bmod \operatorname{grad} \theta(t) \mathbf{a}$.

Si può ora ammettere, senza nulla togliere alla generalità fisica della questione, che esista un intervallo $(-b, -b + \delta_1)$ tale che in esso per ogni punto P dello spazio la funzione $\bmod \operatorname{grad} \theta(t)$ nulla per $t = -b$ sia monotona. Esisterà poi un intervallo $(-b, b + \delta_2)$ in cui per ogni P l'integrale

$$(5) \quad 4\pi \mathbf{a}(t) \times \int_{-b}^t \frac{dF(\mathbf{H}_0(t) - \operatorname{grad}_{-b}^t[\psi_1(t) + \lambda\theta(t)])}{d(\mathbf{H}_0(\xi) - \operatorname{grad}(\psi_1(\xi) + \lambda\theta(\xi)))} \mathbf{a}(\xi) d\xi$$

sia minore di $\frac{R\varepsilon}{4\pi}$, dove ε è un numero minore di uno, e R il minimo valore della funzione $L(t)$. Ora per un valore di t nell'intervallo $(-t, -T + \delta)$, dove δ è il numero minore fra δ_1 e δ_2 , e per l'ipotesi fatte, il valore dell'integrale (4) si può rendere minore di

$$R\varepsilon \int_S \operatorname{grad}^2 \theta(t) dS \leq R\varepsilon \int_{S_\infty} \operatorname{grad}^2 \theta(t) dS_\infty,$$

grandezza che deve essere maggiore o tutto al più uguale al primo termine dell'equazione (3); il che non può essere per la scelta di R ed ε . Perciò nell'intervallo $(-T, -T + \delta)$, $\theta(t)$ deve essere nulla. Da ciò, ripetendo il ragionamento fatto, si deduce che $\theta(t)$ è nulla per un intervallo grande qualsiasi.

Nel caso che al posto di $-b$ vi sia $-\infty$, basta fare la sostituzione $\xi = \frac{1}{\chi}$ per avere un intervallo finito e poter applicare i ragionamenti già fatti ⁽¹⁾.

(1) Bisogna però imporre la condizione, alquanto restrittiva, che la funzione ottenuta con la sostituzione sia integrabile in un intervallo $(0, \theta)$ finito.

3. — Calcoliamo ora l'espressione dell'energia. L'incremento infinitesimo di energia magnetica δu per ogni elemento di volume dS , è a meno del termine dS

$$\begin{aligned}\delta u &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \times \delta \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \times \delta \mathbf{H} + \mathbf{H} \times \delta f(\mathbf{H}) + \mathbf{H} \times \delta F\left(\mathbf{H}'(\tau)\right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \times \delta \mathbf{H} + \mathbf{H} \times \frac{df(\mathbf{H})}{d\mathbf{H}} \mathbf{H}'(t) dt + \frac{dF\left(\mathbf{H}'(\tau)\right)}{d\mathbf{H}'(\xi)} \times \mathbf{H}(t) dt ;\end{aligned}$$

talchè applicando la formula (10) delle Nota precedente (ammesso naturalmente il postulato di cui è conseguenza), si ha

$$\delta u = \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \times \mathbf{H}' dt + \mathbf{H} \times \frac{df(\mathbf{H})}{d\mathbf{H}} \mathbf{H}'(t) dt + \int_{-\infty}^t \frac{dF\left(\mathbf{H}'(\tau)\right)}{d\mathbf{H}'(\xi)} \mathbf{H}'(\xi) \times \mathbf{H}(t) d\xi dt .$$

Supponiamo che al tempo 0 e al tempo T il sistema si trovi nelle stesse condizioni. Allora si ha, integrando da 0 a + T

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{4\pi} \int_0^T \mathbf{H} \times \mathbf{H}'(t) dt + \int_0^T \frac{df(\mathbf{H})}{d\mathbf{H}} \mathbf{H}'(t) \times \mathbf{H}(t) dt + \\ &+ \int_0^T dt \int_{-\infty}^t \frac{dF\left(\mathbf{H}'(\tau)\right)}{d\mathbf{H}'(\xi)} \mathbf{H}'(\xi) \times \mathbf{H}(t) d\xi\end{aligned}$$

Per i corpi isotropi, o per \mathbf{H} di direzione costante, nel secondo membro i due primi integrali sono nulli; rimane l'ultimo, che rappresenta l'energia dissipata per l'isteresi in un elemento del corpo nell'intero ciclo.

Le considerazioni fatte finora valgono anche per i corpi dielettrici, sostituendo al vettore induzione il vettore spostamento, all'intensità di magnetizzazione la polarizzazione elettrica, ed al campo magnetico il campo elettrico.

4. — ⁽¹⁾ Vediamo se è possibile particolareggiare la forma della $F\left(\mathbf{H}'(\tau)\right)$.

Dimostreremo che le sue componenti non sono polinomi, nel senso delle funzioni di linea, delle componenti di $\mathbf{H}(\tau)$, basandoci su fenomeni nettamente confermati dall'esperienza. Il primo di questi fenomeni è che

(1) Per i risultati di questo paragrafo non importa ammettere che il campo elettromagnetico vari lentamente.

la $\mathbf{J}(t)$ non può in modulo raggiungere un valore grande qualsiasi, comunque si prenda grande H ; cioè esiste la così detta *saturazione magnetica*.

Supponiamo per semplicità, che la $\mathbf{H}(\tau)$ abbia sempre avuto la stessa direzione individuata dal vettore unitario \mathbf{a} ; sia cioè

$$\mathbf{H}(\tau) = H(\tau) \mathbf{a},$$

e quindi

$$\mathbf{J}(t) = f(H(t) \mathbf{a}) + E \left(H \left(\tau \right) \mathbf{a} \right).$$

Si proietti ora questo vettore su un altro vettore \mathbf{b} in modo che $\mathbf{J}(t) \times \mathbf{b}$ risulti diverso da zero; si ha

$$\mathbf{J}(t) \times \mathbf{b} = f(H(t) \mathbf{a}) \times \mathbf{b} + F \left(H \left(\tau \right) \mathbf{a} \right) \mathbf{b}.$$

Si supponga che la $F(H(\tau) \mathbf{a})$ sia un polinomio in $H(\tau)$ nel senso della funzione di linea. Ciò comprende come caso particolare l'ereditarietà lineare.

Sarà dunque:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(t) \times \mathbf{b} &= f(H(t)) \times \mathbf{b} = \int_{-\infty}^t \psi_1(t, \tau) H(\tau) d\tau + \dots + \\ &+ \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^{\tau_1} d\xi_1 + \dots \int_{-\infty}^{\xi_n} \psi_n(t, \tau, \xi_1, \dots, \xi_n) H(\tau) \dots H(\xi_n) \end{aligned}$$

Ora prendiamo per $H(\tau)$ una funzione tale che sia costante e uguale a C nell'intervallo $(-\infty, t_1)$ nulla nell'intervallo $(t_1 + \varepsilon, t)$ e decrescente con continuità da C allo zero nell'intervallo $(t_1, t_1 + \varepsilon)$ con la funzione $A(\tau)$.

Allora si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(t) \times \mathbf{b} &= f(0) \times \mathbf{b} + \\ &+ C \int_{-\infty}^{t_1} \psi_1(t, \tau) d\tau + \dots C^n \int_{-\infty}^{t_1} d\tau \int_{-\infty}^{\tau} d\xi + \dots \int_{-\infty}^{\xi_n} \psi_n(t, \tau, \xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_n + \\ &+ \text{termini che contengono } A(t) \end{aligned}$$

Facciamo crescere C . Disponendo opportunamente di ε si possono tenere limitati i secondi integrali. Si vede subito allora che il valore assoluto $\mathbf{J}(t) \times \mathbf{b}$ si può far diventare grande come si vuole; il che è contrario al fenomeno della saturazione magnetica. Quindi l'ereditarietà non può essere della forma scritta, cioè la $F \left(H \left(\tau \right) \right)$ se è analitica, è trascendente.

Alla dimostrazione ora esposta si può però fare l'obbiezione che i coefficienti del polinomio in C siano tutti nulli per la particolare scelta

della $H(\tau)$. Per ovviare a ciò si prenda $H(\tau) = C(f(\tau))$ e si determini la $f(\tau)$ in modo che uno almeno dei coefficienti di C sia diverso dallo zero.

Allo stesso risultato si può arrivare basandosi su un altro fenomeno che l'esperienza facilmente verifica. Si è trovato che l'energia dissipata per isteresi in un elemento dS di un corpo ha, a meno del fattore dS , l'espressione:

$$U = \int_0^\pi dt \int_{-\infty}^t \frac{dF\left(\mathbf{H}(\tau)\right)}{d\mathbf{H}(\xi) d\xi} \mathbf{H}'(\xi) H(t) d\xi$$

Supponendo

$$\mathbf{H}(\tau) = H(\tau) \mathbf{a} = h_0 \sin \omega t \mathbf{a},$$

si ha

$$U = h^2 \int_0^\pi dt \int_{-\infty}^t \omega \frac{dF\left(\mathbf{H}(\tau)\right)}{d\mathbf{H}(\xi)} \cos \omega t \mathbf{a} \times \sin \omega t \mathbf{a}$$

Questa espressione è una funzione di $H(\tau)$. Se si ammette che questa funzione sia un polinomio (nel senso delle funzioni di linea), si ottiene la U espressa mediante un polinomio ordinario in h ; quindi al tendere all'infinito di h , cioè del massimo della forza magnetizzante, la U dovrebbe pure tendere all'infinito. Cioè l'energia dissipata per isteresi nei cicli ordinari tenderebbe all'infinito al tendere di h all'infinito, il che è contro all'esperienza. Quindi le componenti della $\mathbf{J}(t)$ non possono essere polinomi nelle tre componenti di $\mathbf{H}(\tau)$, e in particolare l'ereditarietà non può essere lineare. Ma rimanendo nei campi deboli riteniamo che l'ereditarietà lineare sia applicabile; e se anche non darà risultati esattamente concordi con i fatti, servirà per lo meno a prevederne l'andamento.

Matematica. — *Sui sistemi differenziali lineari dotati di un integrale quadratico indefinito.* Nota di V. HLAVATY, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur les valeurs de l'intégrale $\int_a^b f(x) dg(x)$ d'une fonction $f(x)$ à point de non-intégrabilité par rapport à $g(x)$ unique.* Nota di R. C. YOUNG, pres. dal Socio S. PINCHERLE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sullo scostamento geodetico nelle varietà analonome.* Nota di E. VRANCEANU, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia fisica. — *Sull'assorbimento della luce stellare nella atmosfera di Roma.* Nota di S. ANDRISSI, pres. dal Corrisp. G. ARMELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell'atomo.* Nota I di E. FERMI, presentata⁽¹⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

Lo scopo del presente lavoro è quello di mostrare alcuni dei risultati sopra la distribuzione degli elettroni in un atomo pesante che si possono ottenere trattando tali elettroni, dato il loro considerevole numero, con un metodo statistico; ossia, in altre parole, considerandoli come un gas di elettroni che circonda il nucleo.

Naturalmente questo gas di elettroni viene a trovarsi in condizioni di degenerazione completa, per modo che ad esso non può applicarsi la statistica classica; si deve invece usare la forma di statistica proposta dall'autore⁽²⁾ e basata sopra l'applicazione del principio di esclusione di Pauli alla teoria dei gas. Ciò ha per effetto che l'energia cinetica degli elettroni nelle condizioni in cui essi vengono a trovarsi nell'interno dell'atomo risulta effettivamente molto maggiore di quanto essa dovrebbe essere secondo il principio dell'equipartizione dell'energia e praticamente indipendente dalla temperatura, almeno finchè questa non oltrepassa certi limiti.

In questa Nota noi mostreremo anzitutto come si possa calcolare statisticamente la distribuzione degli elettroni attorno al nucleo; e in base ad essa calcoleremo poi l'energia necessaria a ionizzare completamente l'atomo, cioè a strappargli tutti gli elettroni. Il calcolo della distribuzione degli elettroni attorno al nucleo permette inoltre di determinare l'andamento del potenziale alle varie distanze dal nucleo e quindi di conoscere il campo elettrico in cui vengono a trovarsi gli elettroni dell'atomo. Spero di poter in un prossimo lavoro mostrare l'applicazione di ciò al calcolo approssimato

(1) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

(2) « Zs. f. Phys. », 36, p. 902, 1926.

delle energie di legame dei singoli elettroni e ad alcune questioni relative alla struttura del sistema periodico degli elementi.

Per determinare la distribuzione degli elettroni dobbiamo anzitutto cercare la relazione tra la loro densità e il potenziale elettrico in ogni punto. Se V è il potenziale, l'energia di un elettrone sarà $-eV$ e quindi, secondo la statistica classica, la densità degli elettroni dovrebbe risultare proporzionale a $e^{\frac{eV}{kT}}$. Invece, secondo la nuova statistica, la relazione tra la densità e la temperatura è la seguente:

$$(1) \quad n = \frac{(2 \pi m k T)^{3/2}}{h^3} F\left(\alpha e^{\frac{eV}{kT}}\right)$$

dove α è costante per tutto il gas; la funzione F nel nostro caso (degenerazione completa) ha l'espressione asintotica

$$(2) \quad F(A) = \frac{4}{3 \sqrt{\pi}} (\log A)^{3/2}.$$

Si trova dunque per il caso nostro

$$(3) \quad n = \frac{2^{7/2} \pi m^{3/2} e^{3/2}}{3 h^3} v^{3/2}$$

dove

$$(4) \quad v = V + \frac{kT}{e} \log \alpha$$

rappresenta, a meno di una costante additiva, il potenziale. Osserviamo ora che siccome nel caso nostro si tratta di un gas di elettroni, bisogna tener conto del fatto ⁽¹⁾ che il peso statistico degli elettroni è 2 (corrispondentemente alle due possibilità di orientazione dell'elettrone rotante); e quindi per la densità degli elettroni si deve, in realtà, prendere un valore eguale al doppio del valore (3); si ha cioè:

$$(5) \quad n = \frac{2^{9/2} \pi m^{3/2} e^{3/2}}{3 h^3} v^{3/2}.$$

Se valesse nel nostro caso la statistica classica, si avrebbe l'energia cinetica media degli elettroni $= \frac{3}{2} kT$. Invece secondo la nuova statistica essa risulta data da

$$L = \frac{3}{2} k T G\left(\alpha e^{\frac{eV}{kT}}\right) / F\left(\alpha e^{\frac{eV}{kT}}\right)$$

(1) V. PAULI, « Zs. f. Phys », 41, p. 81, 1927.

dove G rappresenta una funzione che, nel caso della degenerazione completa, prende l'espressione asintotica

$$G(A) = \frac{8}{15 \sqrt{\pi}} (\log A)^{1/2}.$$

Si trova dunque per il nostro caso

$$(6) \quad L = \frac{3}{5} ev.$$

Osserviamo ora che la densità elettrica in un punto risulta evidentemente data da $-ne$ e quindi il potenziale v soddisfa all'equazione

$$(7) \quad \Delta v = 4 \pi ne = \frac{2^{1/2} \pi^2 m^{3/2} e^{5/2}}{3 h^3} v^{3/2}.$$

Nel caso nostro esso sarà poi evidentemente funzione soltanto della distanza r dal nucleo; la (7) può scriversi perciò

$$(8) \quad \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} = \frac{2^{1/2} \pi^2 m^{3/2} e^{5/2}}{3 h^3} v^{3/2}.$$

Se con Z indichiamo il numero atomico del nostro atomo si avrà poi evidentemente

$$(9) \quad \lim_{r=0} rv = Ze$$

$$\int n d\tau = 4 \pi \int_0^\infty r^2 n dr = Z \quad (d\tau = \text{elemento di volume}).$$

Quest'ultima equazione, tenendo presente (5), può scriversi:

$$(10) \quad \frac{2^{1/2} \pi^2 m^{3/2} e^{5/2}}{3 h^3} \int_0^\infty v^{3/2} r^2 dr = Ze.$$

Il potenziale v si otterrà dunque cercando una funzione che soddisfi all'equazione (8) con le due condizioni (9) e (10).

Per semplificare la ricerca di v cambiamo le variabili r, v in altre due x, ψ ad esse proporzionali ponendo

$$(11) \quad r = \mu x, \quad v = \gamma \psi$$

dove si ha

$$(12) \quad \mu = \frac{3^{2/3} h^2}{2^{1/3} \pi^{1/3} m e^2 Z^{1/3}}, \quad \gamma = \frac{2^{1/3} \pi^{1/3} m Z^{1/3} e^3}{3^{2/3} h^2}.$$

Le equazioni (8), (9) e (10) diventano allora

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi'' + \frac{2}{x} \psi' = \psi^{3/2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} x\psi = 1 \\ \int_0^{\infty} \psi^{3/2} x^2 dx = 1 \end{array} \right.$$

Queste equazioni si semplificano ulteriormente ponendo

$$(14) \quad \varphi = x\psi.$$

Esse diventano infatti

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi'' = \varphi^{3/2} / \sqrt{x} \\ \varphi(0) = 1 \\ \int_0^{\infty} \varphi^{3/2} \sqrt{x} dx = 1 \end{array} \right.$$

È facile vedere che l'ultima condizione resta senz'altro verificata se φ si annulla per $x = \infty$. Resta dunque da cercare una soluzione della prima delle (15) con le condizioni ai limiti $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$.

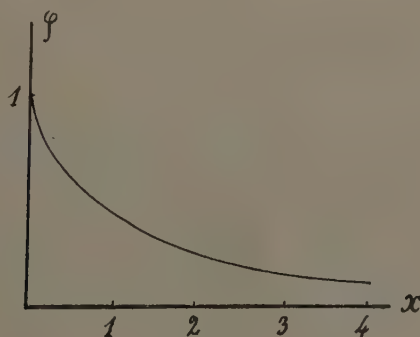


Fig. 1.

Non essendomi riuscito di trovare l'integrale generale della prima delle (15), l'ho risolta numericamente. Il grafico della figura rappresenta $\varphi(x)$; per x prossimo a zero si ha

$$(16) \quad \varphi(x) = 1 - 1.58 x + \frac{4}{3} x^{3/2} + \dots$$

Resta così risolto il problema della determinazione del potenziale elettrico dell'atomo a una data distanza dal nucleo. Esso risulta dato da

$$(17) \quad v = \gamma \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\gamma \mu}{r} \varphi(x) = \frac{Ze}{r} \varphi\left(\frac{r}{\mu}\right).$$

Si può dunque dire che il potenziale in ogni punto è uguale a quello prodotto da una carica efficace

$$Ze \varphi\left(\frac{r}{\mu}\right).$$

Passiamo ora a calcolare l'energia totale dell'atomo; questa dovrebbe calcolarsi come somma dell'energia cinetica di tutti gli elettroni e dell'energia potenziale del nucleo e degli elettroni. È più semplice però tener presente che in un atomo l'energia totale è eguale, salvo il segno, all'energia cinetica (cioè che del resto nel nostro caso può verificarsi con un facile calcolo). Si ha dunque

$$W = - \int L \, nd\tau$$

e tenendo presenti (5) (6) (11) (12) (14) si trova

$$W = - \frac{3}{5} \int_0^{\infty} r^2 \, n v dr = - \frac{2^{13/3} 3^{1/3} \pi^{1/3} m e^4 Z^{7/3}}{5 h^2} \int_0^{\infty} \frac{\varphi^{5/2}}{V_x} dx$$

L'ultimo integrale può valutarsi tenendo presente che φ soddisfa alle (15) e a (16); si trova

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi^{5/2}}{V_x} dx = - \frac{5}{7} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{x=0} = \frac{5}{7} 1.58$$

e quindi si ha

$$W = - 1.58 \frac{2^{13/3} 3^{1/3} \pi^{1/3} m e^4 Z^{7/3}}{7 h^2} = - 1.58 \frac{2^{1/3} 3^{1/3}}{7 \pi^{2/3}} R h Z^{7/3}$$

cioè

$$(18) \quad W = - 1.54 R h Z^{7/3}$$

dove con R si è indicato il numero di Rydberg, per modo che $- R h$ è l'energia dello stato fondamentale dell'idrogeno.

La (18) ci dà l'energia necessaria per strappare da un atomo tutti i suoi elettroni. Naturalmente, dati i criteri statistici da cui essa è stata dedotta, essa comincia ad esser valida soltanto per valori considerevoli di Z ; tro-

viamo infatti che per l'idrogeno la (18) dà $W = -1.54 Rb$, mentre si ha in realtà $W = -Rb$; la divergenza è dunque del 54 %. Per l'elio l'energia per produrre la ionizzazione completa è eguale evidentemente alla somma delle energie di ionizzazione dell' He e dell' He^+ ; si ha cioè

$$-W = (1.8 + 4) Rb = 5.8 Rb$$

dalla teoria risulta invece $1.54 \cdot 2^{7/2} Rb = 7.8 Rb$; la divergenza si riduce dunque per questo caso al 35 %. Per gli elementi immediatamente successivi all'elio (Li , Be , B , C), la quasi totalità dell'energia atomica è dovuta ai due soli elettroni K (nel carbonio circa l'86 %) e quindi il metodo statistico deve certamente dare ancora delle considerevoli divergenze. Per il C si trova infatti ancora una divergenza prossima al 34 %.

È da attendersi invece che per elementi di peso atomico considerevole le differenze tra la teoria statistica e i dati empirici vengano molto a ridursi; disfortunatamente mancano dati per un confronto preciso e si può basarsi soltanto sopra una grossolana valutazione dei numeri di schermo per le varie orbite; tale valutazione mostra tuttavia un accordo assai migliore.

Fisiologia. — *Sulla produzione di acido lattico e di acido fosforico nella « rigidità da disgelo »* ⁽¹⁾. Nota di L. DE CARO, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. BOTTAZZI.

I. - INTRODUZIONE E SCOPO DELLE RICERCHE.

Le prime ricerche quantitative sulla produzione di acido lattico nei muscoli striati, sottoposti all'azione delle basse temperature, sono state eseguite da Fletcher ⁽³⁾. Questo A. ha trovato nei muscoli di mammiferi raffreddati, fino a raggiungere temperature notevolmente inferiori a 0° e, quindi, estratti prima che la loro temperatura titornasse a 0°, la formazione di una piccolissima quantità di acido lattico (0,08 %); e che, se l'estrazione si fa a temperature meno basse, anche se non superiori a 0°, la quantità di acido lattico formato è più grande.

Questi due fatti provano che durante il congelamento, nel muscolo non avviene formazione di acido lattico, ma qualche mutamento che lo dispone ad una più veloce formazione dell'acido, quando s'inizia il disgelo.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia di Napoli.

(2) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

(3) W. M. FLETCHER, *Lactic acid formation, survival respiration and rigor mortis in mammalian muscle*. « Journ. of Physiol. » 47, 361, 1913.

Successivamente Forster e Moyle⁽¹⁾ hanno constatato, che le lesioni meccaniche di muscoli di rana, già resi inecitabili per la lunga permanenza a 0°, sono di per se stesse capaci di provocare formazione di acido lattico; che la produzione di esse aumenta nei muscoli congelati e disgelati prima dell'estrazione, rispetto ai muscoli estratti quando ancora sono congelati (fatto che conferma i risultati di Fletcher); e, infine, che la quantità minima di acido lattico si trova, non quando i muscoli sono congelati a temperature molto basse (8°) anche se se ne impedisce il disgelo prima dell'estrazione, ma quando sono conservati a 0° per parecchi giorni, specie se in presenza d'aria o meglio di ossigeno.

Più recentemente Bottazzi⁽²⁾ ha studiato l'andamento del fenomeno dal punto di vista meccanico, cioè registrando praticamente l'accorciamento che le basse temperature provocano nei muscoli (striati lisci cardiaco), sia in animali omeotermi sia nei pecilotermi, ed è pervenuto alle conclusioni che succintamente qui riproduco:

Sè si fa gelare un muscolo vivo, eccitabile, e poi lo si fa disgelare, si osserva al momento del disgelo un forte accorciamento del muscolo, simile a quello che si osserva nella rigidità da calore. Questo accorciamento è stato chiamato dall'A. *rigidità da congelamento*, o meglio, *da disgelo*. Questa specie di rigidità si osserva nei muscoli striati di animali omeotermi e pecilotermi e nel muscolo cardiaco dei medesimi; non si osserva, invece, nei muscoli lisci, nè nei muscoli striati e il miocardio quando siano divenuti inecitabili. Da tale comportamento l'A. inferisce che la rigidità da disgelo dipende dalla formazione di acido lattico nel muscolo non altrimenti che la rigidità cadaverica, quella da caldo, da cloroformio ecc.; e che la formazione dell'acido lattico non avviene durante il congelamento, ma nel disgelo sempre ad una temperatura relativamente bassa. Il congelamento è però condizione *sine qua non* della formazione dell'acido. Le temperature prossime a quella del congelamento rendono il muscolo inecitabile e fanno scemare al minimo la produzione dell'acido lattico. Solo durante il disgelo questa si accelera enormemente.

La produzione esplosiva di acido lattico e il fatto meccanico che l'accompagna, per azione delle basse temperature anche quando queste vengano fatte agire gradatamente, in modo da escludere l'effetto stimolante di una brusca variazione termica, costituiscono un fenomeno la cui conoscenza può gettare grande luce sul meccanismo di formazione dell'acido lattico in condizioni normali e fisiologiche.

Escludendo che la formazione dei minutissimi ghiaccioli, che certamente si formano nel muscolo nel momento del congelamento, stimoli

(1) FOSTER D. L. and MOYLE D. M., *The effect of exposure to low temperatures on some physiological, chemical properties of amphibian muscle*. « Biochem. Journ. », 15, 334, 1921.

(2) BOTTAZZI F., *Azione della temperatura sui tessuti e sui loro componenti colloidali*. VII. *Sulla rigidità da freddo*. « Ergebn. der Physiol. », XXIV Bd, p. 308, 1925.

meccanicamente in ogni sua parte il muscolo e conseguentemente causi la formazione d'acido e l'accorciamento del preparato, Bottazzi si domanda per quale profonda alterazione causata dal congelamento nel muscolo disgelato si forma acido lattico in grande quantità; e come mai ad una temperatura sempre relativamente molto bassa il processo della formazione dell'acido lattico si svolge così velocemente da provocare un accorciamento che ricorda per l'intensità ed il percorso quello della rigidità da calore.

L'A. attribuisce il fenomeno a mutamenti dello stato colloidale, che avverrebbero nel muscolo e che causerebbero la produzione dell'acido e quindi l'accorciamento. Questa ipotesi poggia su fatti sperimentalmente accertati quali l'azione⁽¹⁾ delle temperature molto alte e molto basse sui sistemi colloidali (e quindi anche sui colloidi muscolari) e sulle variazioni della resistenza elettrica delle fibre muscolari viventi⁽²⁾.

Per chiarire qualche punto dell'interessante problema ho eseguito una duplice serie di ricerche con le quali mi son proposto di studiare il comportamento, oltre che dell'acido lattico anche dell'acido fosforico nei muscoli striati, a basse temperature e, d'altra parte, l'influenza che la conservazione della struttura del tessuto o la distruzione di essa esercita sulla formazione degli acidi lattico e fosforico. Scopo di queste ricerche è dunque di vedere se l'accorciamento della « rigidità da disgelo », per quanto riguarda i mutamenti chimici che l'accompagnano somiglia o no alle altre forme già note, normali o sperimentali, di accorciamento muscolare, e se i detti mutamenti persistono, oppur no, dopo la distruzione della struttura del muscolo.

II. — METODO E RESULTATI SPERIMENTALI.

Nelle mie ricerche ho adoperato muscoli di rana (*esculenta*), di rospo e di cane. Molte ore prima del prelevamento del muscolo, tagliavo e distruggevo il midollo spinale agli animali che mantenevo in recipienti pieni di ghiaccio triturato in maniera che la temperatura del tessuto non fosse molto discosta da 0° al momento del prelevamento. Ciò per ridurre al minimo la produzione di acidi che si accompagna inevitabilmente con le stimolazioni meccaniche causate sia pure dalle più semplici manipolazioni.

I muscoli prelevati, o venivano distribuiti in piccole provette e accuratamente pesati e poi lasciati in contatto con le miscele frigorifere, o immersi rapidamente in aria liquida e pestati in un mortaio già precedentemente raf-

(1) BOTTAZZI F. e BERGAMI C., *Azione della temperatura sui tessuti e sui loro componenti colloidali*. VI. *Azione delle basse temperature sui sistemi colloidali liquidi*. « Arch. di Scienze Biol. », 6, p. 74, 1924.

(2) BOTTAZZI F. e DE CARO L., *Sulle variazioni della resistenza elettrica dei muscoli causate da diversi agenti fisici e chimici*. « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei ». Estr., vol. I, serie 6, I sem., fasc. 110-1, 1925.

freddato fino a qualche grado al disotto di 0°. La polvere muscolare così ottenuta veniva in parte immersa nel liquido fissativo, in parte lasciata disgelare e poi fissata. Mi son servito dell'aria liquida per poter arrestare al momento voluto qualsiasi processo chimico in atto nel tessuto. Per il dosaggio dell'acido lattico e dell'acido fosforico, mi sono attenuto, nelle linee generali, alla tecnica descritta da Meyerhof⁽¹⁾, da Embden⁽²⁾ e da Neumann⁽³⁾.

Dalle determinazioni eseguite risulta che la produzione dell'acido fosforico segue un percorso del tutto parallelo a quella dell'acido lattico. In vicinanza di 0° si osserva un minimo di produzione di acido fosforico, in corrispondenza del congelamento un leggero aumento (probabilmente dovuto al fatto che non ostante tutte le precauzioni prese per impedire il disgelo, pure questo, sia pure minimamente, interviene durante le manipolazioni indispensabili per la fissazione ecc.). Si osserva invece un cospicuo aumento di produzione dei due acidi quando il disgelo è lasciato completarsi e tanto nel muscolo *in toto* quanto nel muscolo precedentemente polverizzato. Nella seguente tabella riporto le quantità di acido lattico e di acido fosforico, che si formano sia nel muscolo integro, sia in quello polverizzato in aria liquida, durante il congelamento e dopo il disgelo.

Numero	Animale	Stato del muscolo	Acido lattico in g % di muscolo fresco		Acido fosforico in g % di muscolo fresco	
			Durante il conge- lamento	Dopo il disgelo	Durante il conge- lamento	Dopo il disgelo
1	Rana	polv. in aria liquida .	—	—	0.224	0.270
2	»	integro.	—	—	0.175	0.220
3	»	polv. in aria liquida .	0.350	0.719	0.205	0.265
4	»	» » » » .	0.269	0.679	0.195	0.273
5	Rospo	integro.	0.350	0.425	0.207	0.240
6	»	»	—	—	0.188	0.242
7	»	polv. in aria liquida .	0.250	0.538	0.168	0.239
8	Cane	integro.	0.285	0.580	0.154	0.225
9	»	polv. in aria liquida .	0.290	0.541	0.188	0.274
10	»	» » » » .	0.256	0.650	0.167	0.259

(1) MEYERHOF O., «Pflüger's Arch.», 204, p. 305, 1924.

(2) EMBDEN G., «Zeitschr. für physiol. Chemie», 143, p. 297, 1925.

(3) TREDWELL F. P., *Manuel de Chemie Analytique*, tome II; *Analyse quantitative*, p. 403, 1924.

Questo comportamento conferma i risultati già ottenuti da Fletcher, Foster e Moyle ecc., ed è pienamente in accordo con le deduzioni di Bottazzi: cioè, che il congelamento, senza essere di per sé la causa diretta di un aumento di formazione di acidi, è tuttavia, una condizione preparatrice o coadiuvante di un altro processo che conduce poi alla formazione degli acidi in questione. Questo processo presenta il massimo di velocità quando il disgelo si completa, come provano le rilevanti quantità di acido lattico e di acido fosforico che si trovano nel muscolo disgelato.

Senza dubbio interessante mi sembra quest'altro risultato delle mie ricerche: che la distruzione della struttura morfologica ottenuta mediante il pestamento del muscolo in aria liquida, non modifica l'andamento della formazione di acido lattico e di acido fosforico durante il disgelo. Questo fatto fa pensare che le basse temperature o agiscono direttamente sul processo enzimatico che presiede alla scissione del lattacidogeno e quindi alla formazione dell'acido lattico e dell'acido fosforico (e ciò indipendentemente dalla struttura), o che essi agiscono modificando lo stato colloidale principalmente delle proteine che entrano nella costituzione del tessuto muscolare. Che una bassa temperatura possa provocare un'accelerazione della reazione enzimatica, è cosa poco verosimile; non resta quindi che ammettere un'azione sullo stato dei colloidi muscolari (dalla semplice diminuzione del grado di dispersità alla coagulazione) ammettendo, implicitamente, un legame la cui natura non è chiara fra comportamento colloidale e processo enzimatico.

Questa spiegazione, che è quella data da Bottazzi, a me sembra abbastanza soddisfacente, perchè essa dà ragione anche degli accorciamenti provocati dalle alte temperature e forse anche di quelli normali. A sostegno di questo modo di vedere potrei rammentare che già nella contrazione normale del muscolo, l'improvviso accelerarsi della formazione dell'acido lattico, in conseguenza dello stimolo, va parallelamente a un cambiamento della resistenza elettrica del tessuto.

Solo questa spiegazione, che riduce l'effetto prodotto dalla temperatura ad un fenomeno puramente colloidale, può render conto del fatto da me osservato e descritto, cioè del persistere della formazione di acido lattico e di acido fosforico nel muscolo pestato e ridotto in polvere nella stessa maniera e nella stessa misura di quella che si osserva nel tessuto muscolare a struttura morfologica intatta.

III. - CONCLUSIONI.

Dalle ricerche da me eseguite si possono trarre le seguenti conclusioni:

1^a. - La produzione dell'acido fosforico si comporta in maniera del

tutto parallela a quella dell'acido lattico nei muscoli sottoposti ad azione delle basse temperature.

2^a. — Detto comportamento resta invariato anche dopo la soppressione della struttura morfologica del tessuto muscolare.

3^a. — La « rigidità da disgelo », si accompagna coi medesimi mutamenti chimici riscontrabili nelle altre forme normali o sperimentali d'accorciamenti muscolari.

Fisiologia. — *Effetti del raffreddamento di gangli spinali* ⁽¹⁾.
Nota di CAMILLO ARTOM, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. BOTTAZZI.

I. — INTRODUZIONE.

In una precedente serie di ricerche ⁽³⁾, avevo studiato gli effetti del raffreddamento del ganglio cervicale superiore del gatto, in condizioni tali da permetterne la diretta comparazione con gli effetti di raffreddamenti analoghi, portati sul tronco del simpatico cervicale nella sua porzione pregangliare. Dai risultati di queste mie esperienze appariva che gli effetti del raffreddamento del ganglio sono considerevolmente maggiori che non quelli del raffreddamento portato sul nervo. In particolare, un raffreddamento del ganglio intorno a 15° rende inefficace, per quanto riguarda la dilatazione pupillare, gli eccitamenti, anche molto intensi, del simpatico cervicale; mentre un identico raffreddamento di un tratto del tronco nervoso non produce che un innalzamento, spesso poco considerevole, della soglia di eccitabilità, l'abolizione completa della conduzione ottenendosi solo per raffreddamenti molto maggiori (fra 4° e 7°, a seconda della esperienza). Nell'un caso e nell'altro, tuttavia, gli effetti del raffreddamento sembrano perfettamente reversibili col ripristinarsi delle primitive condizioni di temperatura.

Già nell'esporre i risultati di queste prime ricerche, avevo accennato che, per giungere ad una loro interpretazione adeguata, era necessario estenderle ulteriormente, sperimentando su altri gangli simpatici, e anche su gangli di differente significato anatomico e funzionale.

Con le presenti indagini mi sono appunto proposto di studiare gli effetti del raffreddamento di gangli spinali, paragonandoli con gli effetti del raffreddamento dei tronchi nervosi che ad essi fanno capo. Le difficoltà tecniche di queste esperienze erano prevedibilmente considerevoli, la loca-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

(3) C. ARTOM, « Boll. Soc. It. di Biol. Sper. », 2, fasc. 7, 1927.

lizzazione delle variazioni termiche al ganglio, senza propagazione alle strutture vicine, essendo condizione necessaria, perchè i risultati delle esperienze stesse avessero un significato. Ho dovuto pertanto, come dirò in seguito, restringere la scelta dei gangli da sottoporre ad esperimento, ad alcuni casi particolari, in cui tali difficoltà tecniche potessero essere, in tutto od in parte, evitate.

II. - TECNICA.

Per il raffreddamento del ganglio, mi sono valso dello stesso piccolo apparecchio, precedentemente usato nelle esperienze sul ganglio cervicale superiore. Esso è costituito da un tubicino di argento, piegato a formare una doppia ansa, così da permettere l'introduzione nella sua concavità del ganglio, senza interromperne le connessioni con le fibre afferenti ed efferenti. Un apparecchio analogo, di dimensioni un poco più ridotte, serviva per il raffreddamento del tronco nervoso, perifericamente al ganglio. In ciascuno dei due apparecchi, fissati per mezzo di stativi snodabili poggianti sul tavolo operatorio, circolava continuamente acqua, la cui temperatura era controllata per mezzo di un termometro al decimo, immerso in un'ampollina di vetro, nella immediata vicinanza del tubicino di efflusso dell'apparecchio. Alcuni semplici dispositivi permettevano di variare rapidamente la temperatura del liquido di circolazione, grazie ad una serie di bocce, contenenti acqua a differenti temperature.

L'eccitabilità era saggiata, dopo che il ganglio e il nervo erano rimasti alla temperatura voluta per un tempo abbastanza lungo e presumibilmente sufficiente a che la temperatura effettiva del ganglio e del nervo fosse costante e almeno molto prossima a quella del liquido di circolazione.

III. - ESPERIENZE SUL GANGLIO GIUGULARE DEL VAGO.

In un primo gruppo di ricerche, ho sperimentato sul ganglio giugulare del vago, che, per la facile aggredibilità e per la lontananza dal nevrasse, presentava condizioni particolarmente favorevoli. Costituito da elementi cellulari con prolungamento a T, questo ganglio è generalmente considerato come l'omologo di un ganglio spinale; e che le sue cellule rappresentino il centro trofico delle fibre afferenti respiratorie del vago appare dalle ricerche di Gad e Joseph⁽¹⁾ sugli effetti respiratori dell'eccitamento dei monconi, centrale e periferico, del vago, dopo taglio del nervo, al disopra o al disotto del ganglio, e consecutiva degenerazione delle fibre, perifericamente al taglio.

(1) J. GAD und JOSEPH, « Arch. f. (Anat. u.) Physiol. », p. 570, 1887, « Arch. f. (Anat. u.) Physiol. », p. 199, 1889.

In gatti, sottoposti a narcosi con cloralosio o con cloralio e morfina, scoprivo al collo il vago di un lato e applicavo una legatura all'ingresso del nervo nella cavità toracica. Isolato quindi il ganglio giugulare, lo introducevo nella concavità dell'apparecchio di raffreddamento; l'altro apparecchio era collocato sul tronco del vago cervicale nella sua porzione mediana. Con un eccitatore bipolare profondo faradizzavo il nervo, immediatamente al disopra della sua legatura inferiore, e registravo graficamente le modificazioni del ritmo respiratorio, consecutive all'eccitazione. Queste modificazioni sono, come è noto, molto variabili, in dipendenza dell'intensità dello stimolo, del grado e della qualità della narcosi, e inoltre di altre condizioni non facilmente precisabili.

Anche nelle mie esperienze, ho talvolta osservato semplicemente una diminuzione di ampiezza delle escursioni respiratorie, talaltra reazioni prevalentemente inspiratorie od espiratorie, giungenti anche fino al così detto « tetano », rispettivamente inspiratorio od espiratorio. Tuttavia, nonostante la varietà degli effetti, determinati dall'eccitamento vagale, questi effetti sono stati però sempre chiaramente e facilmente rilevabili. In taluni animali, la reazione respiratoria sembrò anzi diventare più intensa col raffreddamento, sia del ganglio e sia del tronco: fenomeno che può forse interpretarsi con la nota ipotesi della coesistenza nel vago di fibre distinte, inspiratorie ed espiratorie, e con una possibile differenza di labilità termica di questi due ordini di fibre.

Comunque sia, in tutte le esperienze, gli effetti respiratori persistettero anche per raffreddamenti prolungati e intensi, sia del ganglio e sia del nervo, la scomparsa di ogni reazione respiratoria (scomparsa in ogni caso sempre reversibile col rielevarsi della temperatura) ottenendosi solo per raffreddamenti a temperature poco sopra 0°, e in modo praticamente identico, sia che il raffreddamento fosse portato sul ganglio, o sia che fosse portato sul tronco nervoso.

In alcune poche esperienze, invece di stimolare elettricamente il tronco vagale, ho seguito gli effetti della eccitazione meccanica delle terminazioni intrapolmonari del nervo. Reciso il vago di un lato, raffreddavo il tronco del nervo ed il ganglio giugulare del lato opposto, e praticavo quindi la distensione del polmone con una insufflazione brusca e forzata di aria nella trachea. In tali condizioni, l'effetto, descritto da Breuer ed Hering ⁽¹⁾, e svolgentesi, come è noto, per la via delle fibre centripede vagali, è chiaramente e facilmente riproducibile, anche per un raffreddamento intorno a 5°, e senza che compaiano differenze tra raffreddamento del ganglio e raffreddamento del tronco nervoso.

(1) J. BREUER, Sitzungsber. d. K. Akad. d. Wissenschaften, « Mathem.-Naturw. Kl. », 58, p. 909, 1868; E. HERING, *ibid.*, 57, p. 672, 1868.

IV. - ESPERIENZE SUL SECONDO GANGLIO CERVICALE.

In un successivo gruppo di esperienze, ho praticato il raffreddamento di un ganglio spinale vero e proprio, il secondo cervicale. Questo ganglio presenta nel gatto la particolarità di trovarsi al di fuori dello speco vertebrale, essendo separato da questo per mezzo di una lamina fibrosa, tesa fra la 1^a e la 2^a vertebra cervicale. È così possibile di scoprire ed isolare il ganglio, con la relativa sicurezza di evitare lesioni traumatiche e circolatorie a carico del midollo, mentre anche il pericolo di una propagazione del raffreddamento ai centri contigui del nevrasso, è ridotto al minimo.

Per il secondo ganglio cervicale del gatto passano, almeno in parte, le fibre afferenti di quel gruppo di riflessi, ampiamente studiati dallo Sherrington ⁽¹⁾, e da lui denominati « pinna reflexes ». Il più tipico di essi, « the retraction reflex », consiste in una brusca retrazione del padiglione auricolare, come risposta a lievi stimoli meccanici, portati sulla cute e sui peli del padiglione stesso. La branca afferente del riflesso è costituita specialmente dal nervo grande auricolare (altre fibre però decorrono col trigemino, con il ramo auricolare del vago, e forse anche con lo spinale), nervo che si origina dalle tre prime radici cervicali; la branca efferente è esclusivamente rappresentata dal facciale.

Nelle mie esperienze, eseguite su gatti cloralosizzati, scoprivo il nervo grande auricolare, e sul suo decorso collocavo uno degli apparecchi per il raffreddamento. Sezionati quindi i rami comunicanti del nervo con lo spinale e con il 3° nervo cervicale, e, inoltre, anche la prima radice cervicale, procedevo all'isolamento del secondo ganglio cervicale, e lo introducevo nell'altro apparecchio di raffreddamento.

Per la provocazione del riflesso, mi valevo di eccitamenti meccanici, gli eccitamenti elettrici riuscendo per lo più inefficaci. Ma anche gli eccitamenti meccanici del tronco nervoso non mi diedero sempre effetto positivo, indipendentemente da ogni raffreddamento del nervo o del ganglio. Costante invece, in risposta agli eccitamenti meccanici ed elettrici del tronco nervoso, mi è parsa la contrazione di gruppi di muscoli facciali, contrazione resa più evidente dal conseguente movimento delle vibrisse del labbro superiore e dell'arco sopraciliare. Lo Sherrington accenna di sfuggita a questi movimenti delle vibrisse come reazioni accessorie accompagnanti « spesso » il vero e proprio riflesso dell'orecchio nel gatto scerebrato.

Per quanto ho potuto constatare, questi movimenti sono invece praticamente costanti nell'animale narcotizzato, purchè la narcosi non sia troppo profonda; e l'utilità della loro osservazione nelle mie esperienze è stata tanto più grande, in quanto, col procedere del raffreddamento, e quindi,

(1) C. S. SHERRINGTON, « Journal of Physiol. », 51, p. 404, 1917.

verosimilmente, col diminuire della eccitabilità, la provocazione del riflesso tipico andava facendosi sempre più rara e più difficile. Tuttavia, anche dopo raffreddamento, sia del ganglio e sia del nervo, intorno a 8°, sono talora riuscito ad avere, eccitando meccanicamente il nervo, nettissime retrazioni riflesse del padiglione auricolare; e, in ogni caso, sempre positivi sono stati gli effetti degli eccitamenti, meccanici ed elettrici, sulle vibrisse labiali e soprauricolari. Un raffreddamento al disotto di 7° parrebbe dar luogo alla scomparsa di questi effetti, scomparsa reversibile col ritorno alle primitive condizioni di temperatura; ad ogni modo non fu possibile, nelle mie esperienze, mettere in evidenza differenze sensibili tra raffreddamenti, portati sul ganglio, e raffreddamenti, portati sul tronco nervoso.

V. — DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Dalle esperienze, più sopra brevemente riferite, apparirebbe dunque che i due gangli studiati, gangli, differenti per posizione, ma molto simili per struttura morfologica e probabilmente anche per significato funzionale, presentano una labilità al raffreddamento lievemente diversa: il « blocco » della conduttività si otterrebbe infatti a temperature intorno a 7° per il secondo ganglio cervicale, e poco sopra allo 0° invece per il ganglio giugulare del vago. Tuttavia, queste differenze rientrano nell'ordine di quelle che sono state descritte dagli AA. precedenti e da me stesso, in questa e nella precedente Nota, per quanto riguarda la sospensione della conduttività sotto l'azione del raffreddamento dei differenti tronchi nervosi di animali omeotermi.

Così, per citare qualche esempio [Grützner ⁽¹⁾, Howell e collaboratori ⁽²⁾, Wollmann e Lecrenier ⁽³⁾], il blocco della conduzione si otterrebbe fra 7° e 4° per le fibre motorie, e intorno a 2° per quelle sensitive dello sciatico di cane; a 3° per le fibre vasomotorie e sudorali dello sciatico di gatto; a 4° per le fibre polmonari afferenti del vago di gatto, e a 0,5° per quelle di coniglio; a 0° per le fibre cardioinibitrici del vago di gatto, ecc.

Si potrebbe insomma concludere che sui due gangli spinali, da me studiati nella presente Nota, gli effetti del raffreddamento sono per lo meno molto simili a quello del raffreddamento stesso portato sulle fibre nervose.

Questa conclusione mi sembra particolarmente interessante, quando la si confronti con i risultati delle mie antecedenti ricerche su di un ganglio simpatico, il cervicale superiore; risultati, dai quali appariva invece per tale ganglio una labilità al raffreddamento considerevolmente maggiore di quella,

(1) GRÜTZNER, « Arch. f. d. ges. Physiol. », 17, p. 215, 1878.

(2) W. H. HOWELL, S. P. BUDGETT a. M. E. LEONARD, « Journ. of Physiol. », 16, p. 298, 1894.

(3) E. WOLLMANN et L. LECKENIER, « Arch. Intern. de Physiol. », 5, p. 318, 1907.

presentata dalle fibre nervose, e quindi anche, per quanto ci apprendono le presenti esperienze, dai gangli spinali.

Di questo così differente comportamento verso gli abbassamenti termici, non è possibile dare fin d'ora una spiegazione definitiva; e, all'uopo, bisognerà estendere le ricerche almeno a qualche altro ganglio simpatico, per escludere la possibilità che i diversi gangli presentino un grado di resistenza agli abbassamenti termici, variabile dall'uno all'altro ganglio, e specifico per gli elementi di ciascuno di essi, indipendentemente dal loro significato morfologico e funzionale.

Se queste indagini ulteriori, che ho già del resto iniziate, confermeranno il concetto di una differenziazione, anche da questo punto di vista, fra gangli simpatici e gangli spinali (od omologhi agli spinali), l'azione di un raffreddamento di modico grado, per esempio intorno a 15°, sarebbe paragonabile a quella di taluni farmaci, come la nicotina che, in dose appropriata, determina l'interruzione della conduttività a livello del ganglio simpatico, mentre rimane inefficace sulla fibra nervosa e sugli elementi cellulari del ganglio spinale.

Si può in proposito pensare, analogamente a quanto taluni AA. sostengono per spiegare l'azione della nicotina, ad una differente sensibilità agli abbassamenti termici, degli elementi cellulari del ganglio simpatico e, rispettivamente, di quelli del ganglio spinale. Ovvero anche, accettando la nota concezione del Langley e dello Sherrington, si può ritenere che la maggiore labilità al raffreddamento del ganglio simpatico, rispetto a quello del ganglio spinale e della fibra nervosa, sia dovuta alla presenza, nel ganglio simpatico, della « sinapsi », o giuntura interneuronica. Sarebbe questa la struttura particolarmente sensibile agli abbassamenti termici; e là, dove la sinapsi è presente, un raffreddamento mediocre basterebbe a determinare il blocco della conduttività, verosimilmente per una modificazione reversibile dello stato colloidale di tale struttura.

VI. — CONCLUSIONI.

A differenza di quanto era stato precedentemente osservato su di un ganglio simpatico, il cervicale superiore, la conduttività a livello dei gangli spinali presenta una resistenza relativamente considerevole agli abbassamenti termici, gli effetti del raffreddamento portato sul ganglio spinale sembrando praticamente identici a quelli di un eguale raffreddamento, portato su una fibra nervosa.

Fisiologia vegetale. — *Sperimenti intorno l'azione del cloruro sodico contenuto nell'acqua d'irrigazione su di alcune piante. Conclusioni* ⁽¹⁾. Nota di N. PASSERINI e P. GALLI, presentata ⁽²⁾ dal Socio B. LONGO.

1. Nelle coltivazioni in vaso tutte le specie messe in esperimento dimostrarono per qualche tempo una notevole tolleranza per le soluzioni di NaCl anche alquanto concentrate; ma, stante la rapida evaporazione e il conseguente accumulo di sale nella terra, alla lunga finirono per perire o mostrarsi sofferenti anche con soluzioni relativamente deboli (pomodoro 4 per mille; medica 2 per mille; granturco e fagioli 0.5 per mille di Cl.). Soltanto il cavolo resistè bene anche a soluzioni con 12 per mille; ma con quelle alquanto concentrate le sue foglie si fecero carnose.

La soluzione che risultò innocua per la medica fu di uno per mille di Cl.

2. Come era da aspettarsi i danni alla vegetazione si dimostrarono tanto più rapidi quanto maggiore era la concentrazione della soluzione salina.

3. In terreno sciolto (sabbia) i danni si manifestarono più rapidamente che nella terra compatta.

4. Negli esperimenti in piena terra le erbe pratensi spontanee dimostrarono in complesso una resistenza notevole al sale, pure avvenendo una selezione tra le specie.

A parte che l'*Atriplex hastatum* non mostrò soffrire neppure con acqua marina pura (Cl 21 per mille) e che anche il *Picridium vulgare* presentò alla medesima una notevole tolleranza, varie altre specie sopportarono bene l'acqua assai meno ricca di sale, solo alcune presentando il ben noto incrassimento delle foglie. Tra le specie perenni peraltro scomparvero in tutte le preselle; *Polygonum aviculare*, *Plantago Coronopus* (annua, biennale e perenne) che pure è pianta notoriamente resistente alla salsedine, *Salvia Verbenaca*, e *Urospermum Daleschampii*; fra le annue non rinacquero: *Linaria Elatine* ed *Erigeron linifolius*. Fra le piante perenni resisterono a 8.5 per mille di Cl: *Gladiolus segetum* e *Hyoseris radiata*; tollerarono 4.2 per mille di Cl: *Cynodon Dactylon* e *Inula viscosa*.

5. Dagli esperimenti sul germogliamento dei semi risulta esser molto varia la resistenza del cloruro sodico secondo la specie.

(1) La Memoria per esteso sarà pubblicata altrove.

(2) Nella seduta del 18 dicembre 1927.

Per talune (lenticchia, popone) il germogliamento non avvenne con soluzioni al disopra di uno per mille di Cl; ed altre (cipolla, cetriolo, carota, lino, miglio, sorgo) non germogliarono con soluzioni contenenti più del 2 per mille di Cl; altre specie ancora, invece (cicerchia, medica, granturco) resisterono fino a 8 per mille di Cl combinato, e una, il Moco (*Ervum Ervilia*) sino a ben 12 per mille. Il fatto che varie specie germogliarono e per un certo tempo si mantennero in vita in soluzioni saline così concentrate che le avrebbero probabilmente uccise se coltivate all'aperto, trova la sua spiegazione nell'essere stati i vasi mantenuti in Laboratorio, riducendo così fortemente la evaporazione, rendendo necessarie poche innaffiature e impedendo un accumulo un po' notevole di sale nel terreno.

6. Dalle analisi e dalle indagini fatte risulta che non nuocerebbero alla vegetazione le acque contenenti fino a gr. 1.2 di Cl combinato; ma che possono danneggiarla quelle con gr. 2 per litro.

7. Il fatto constatato negli esperimenti sulle erbe pratensi, che cioè nelle preselle innaffiate ripetutamente con acqua fortemente salata (fino a gr. 17 di Cl per litro e in certi casi fino a gr. 21.2 per litro), dopo le piogge invernali i semi delle specie annue germogliarono normalmente e le piante che ne derivarono vegetarono col consueto rigoglio, sembra autorizzarci ad ammettere che le piogge di autunno e d'inverno, almeno in terreni di medio impasto ed a sottosuolo permeabile, sieno più che sufficienti a smaltire gran parte del sale portato con le irrigazioni e ad evitarne un eccessivo accumulo nel suolo.

Si noti che gli esperimenti suddetti furono fatti presso Livorno e quindi in una regione dove la pioggia è relativamente scarsa (in media 857.5 mm. all'anno).

8. Se dai nostri esperimenti e ricerche dobbiamo trarre qualche deduzione pratica; ci sembra lecito ammettere che:

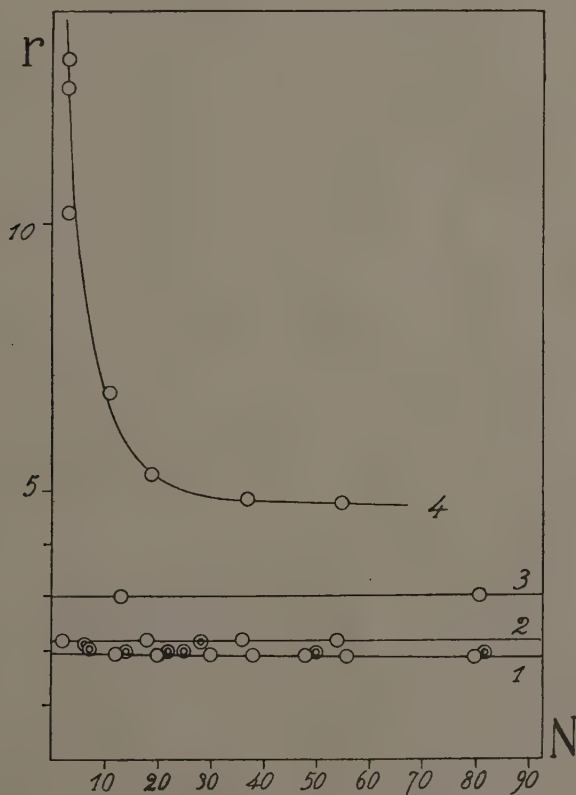
Per quanto in piena terra sieno meno a temersi gli accumuli di notevoli quantità di cloruri nel suolo, constatati nelle culture in vaso, anche per la minor copia di acqua che in complesso occorre distribuire, pure è da ritenersi che, per le comuni piante campestri e nel nostro clima, sia prudente non usare per la irrigazione le acque che contengono oltre gr. uno per mille di Cl combinato.

Per le piante spontanee dei prati stabili questo limite potrà anche esser sorpassato e in terreni a sottosuolo permeabile portato a 2 per mille e forse anche in qualche caso a 3 per mille.

Avvertiamo peraltro che queste indicazioni non vanno prese in senso assoluto, inquantochè troppe sono le cause che possono far variare il limite di tolleranza.

ERRATA CORRIGE DEL VOL. VI.

A pag. 428 è stata omessa la seguente figura, relativa alla nota di G. PICCARDI,
«Relazioni fra i potenziali, ecc.»:



INDICE DEL VOLUME VI, SERIE VI. — RENDICONTI

1927

INDICE PER AUTORI

A

- ABETTI G. — « Osservazioni dell'eclisse parziale di sole del 29 giugno 1927 eseguite in Arcetri ». 9, 84.
- ANDREOLI G. — « Su certi gruppi infiniti del Lie, connessi alla teoria delle algebre ed al calcolo differenziale assoluto ». 412, 493.
- ID. — Vedi NALLI P.
- ANDRISSI S. — « Sull'assorbimento della luce stellare nell'atmosfera di Roma ». 602.
- ANGELI A. — « Sulla trasformazione biochimica della tirosina in derivati del pirolo ». 87.
- ANTONIANI C. — « Il comportamento dell'acido arsenico nei riguardi del potere assorbente del terreno ». 65, 107.
- ID. — « L'influenza del perfosfato sulla reazione del terreno ». 326.
- ARPELLINI G. — « Misura di stelle doppie ». 551.
- ARTOM C. — « Gli elementi circolanti dell'Emolinfa dei crostacei Eufillopidi ». 257.
- ID. — « Effetti del raffreddamento sui gangli spinali ». 544, 612.

B

- BAGLIONI S. — « Azione della Chinina, Eserina, Policarpina, Digitonina, Spartema

e Atropina sui centri nervosi. - Ricerche sperimentali sul preparato centrale di "Bufo vulgaris" ». 458, 557.

- BAGLIONI S. — « Dottrina fisiologica dell'azione dei veleni eccitanti i centri nervosi ». 458, 562.

- ID. e SETTIMI L. — « Sul valore nutritivo delle sostanze azotate di alcuni generi alimentari conservati. - Ricerche sperimentali sui ratti albi ». 267, 377.

- BAMBACIONI V. — « Come avviene in "Fritillaria persica L." lo sviluppo del gametofito femminile e l'aumento dei cromosomi nella regione colazale ». 544.

- BARONI A. — Vedi FERRARI A.

- BARUZZI M. — « Andamenti periodici della temperatura media diurna a Modena ». 46.

- BENEDETTI E. — « Su alcune modificazioni del decorso della fermentazione alcoolica per effetto del campo elettromagnetico oscillante sul lievito ». 331.

- BERGAMI G. — « Azione delle basse temperature sulla lente cristallina ». 117.

- BOMPIANI E. — « Fascio di quadriche di Darboux e normale proiettiva in un punto di una superficie ». 187.

- BUSACCA A. — « Alterazioni istologiche riscontrate nella cataratta da naftalina esaminando le fibre cristalline in istato di sopravvivenza ». 175.

C

- CACCIOPOLI R. — «Sui funzionali multilincari e di grado superiore». 22.
- ID. — «Sulla quadratura delle superficie piane e curve». 142.
- ID. — «Una classe di superficie quadrabili». 393.
- CALDONAZZO B. — «Sopra alcune proprietà di moti liquidi permanenti i cui vortici sono normali alle velocità». 288.
- ID. — «I moti di Viterbi ed i sistemi tripli ortogonali di superficie da essi determinati». 407.
- CAMBI L. e CLERICI A. — «L'azione dell'ossido d'azoto sui tiosolfati dei metalli dell'8° gruppo». 267, 448.
- CANNATA C. — «Contributo alla "Teoria balistica delle stelle variabili"». 296.
- CASTELNUOVO G. — Legge anche a nome del Socio BERZOLARI la relazione per la pubblicazione di una Memoria del dott. L. Brusotti. 547.
- CATTANEO D. — «Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina. - III. Modificazioni della struttura ultramicroscopica del cristallino per azione della dissimilazione in aria secca e dell'idratazione in H_2O , delle basse e delle alte temperature». 244.
- CHERUBINO S. — «Sulla nozione di parità e sul carattere reale delle varietà abeliane reali. - I. Le matrici riemanniane sottonormali». 197.
- ID. — II. «Le matrici riemanniane realizzate». 201, 274.
- CISOTTI U. — «Sulla divergenza dei tensori». 81.
- ID. — «Sui vortici spirali». 183.
- ID. — «Sul carattere solenoidale del tensore di Ricci per le forme ternarie». 267, 367.
- ID. — «Sui vortici elico-conici». 369, 446.
- CLERICI A. — Vedi CAMBI L.
- COLACEVICH A. — «Stime di grandezza della cometa Pons-Vincke». 46, 99.
- COLOMBO B. — «Sulle trasformazioni (m, n) tra $m + n + 4$ integrali di due equazioni

alle derivate parziali del secondo ordine in due variabili indipendenti». 96.

- COTRONEI G. — «Sul tempo di sviluppo delle correlazioni umorali-nervose. Ricerche sugli anfibii». 78.
- ID. — «Le affinità dei Petromizzonti studiate secondo criteri morfologici-sistematici ed ecologici». 121.
- CRUDELI U. — «Sopra una categoria di moti stazionari dei liquidi (pesanti) viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali». 291, 397.
- ID. — «Sopra lo scostamento geodetico elementare». 572.
- CUMIN G. — «Di alcune rocce rinvenute nelle perforazioni di Ripi (Lazio)». 518.

D

- DAL PIAZ G. — «Su alcuni lembi del ricoprimento della Dent Blanche (VI) compresi entro le formazioni post-triassiche della Grivola». 525.
- DE CARO L. — «Sulla produzione di acido lattico e di acido fosforico nella "rigidità del disgelo"». 544, 607.
- DE LUCIA P. — Vedi QUAGLIARELLO G.
- DESIO A. — «I molluschi miocenici di Porto Bardia e dell'Oasi di Giarabùb (Marmarica)». 66.
- ID. — «Sulla presenza del miocene nei dintorni di El-Abià (Cirenaica)». 236.

E

- EREDIA F. — «La direzione risultante dei venti alle varie altezze desunta dalle osservazioni di palloni piloti eseguite a Vigna di Valle (Bracciano)». 49.
- ENRIQUES F. — Presenta un libro del prof. L. Olschki. 547.
- EULA C. e FRANCESCHI O. — «Studio proiettivo dell'intorno di una superficie». 389.

F

- FABIANI R. — «Resti di mammiferi del Terziario e del Quaternario di Ragusa in Sicilia». 521.

- FEDELE M. — « Ancora sulla organizzazione e le caratteristiche funzionali dell'attività nervosa dei Tunicati. - III. Il sistema nervoso viscerale ». 532.
- FERMI E. — « Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell'atomo ». 505, 602.
- FERNANDES L. — « Complessi dell'uranile con acidi polifenolici ». 102.
- ID. — « Ricerche sui solfosali. - IV. Sopra alcuni derivati di un ipotetico acido tioacquoico ». 165.
- ID. — « La risoluzione di una banda di assorbimento ritenuta comune al praseodimio e neodimio ». 235, 413.
- FERRARI A. — « Sulla struttura cristallina dei cloruri bivalenti. Cloruri di cobalto e di nichel anidri ». 56.
- ID. e BARONI A. — « Sulla struttura cristallina del cloruro doppio di cadmio e cesio CsCdCl_3 . (Considerazioni sulla struttura monometrica tipo $A[\text{BX}_3]$) ». 235, 418.
- ID. e FONTANA C. G. — « La struttura del clorato d'argento ». 235, 312.
- FINZI B. — « Funzioni biarmoniche sopra una superficie ». 210.
- ID. — « Moti lenti stazionari di veli liquidi viscosi ». 481.
- FOÀ C. — « Il meccanismo neurochimico della inibizione vagale nel cuore di mammifero ». 9.
- FONTANA C. G. — « Porpore d'oro ». 231.
- ID. — Vedi FERRARI A.
- FRANCESCHI O. — Vedi EULA C.
- FRANCHI S. — Fa omaggio di una sua Nota. 352.
- ID. — « Enigmi tettonici nei monti di Valdieri e lungo le valli del Gesso, della Stura e della Vermentagna ». 267, 370.
- ID. — « I terreni dal Priaboniano al Norico nei dintorni di Albenga ». 458.
- FRERI M. — Vedi NATTA G.

G

- GALAMINI A. — « Sulla curva termica giornaliera del ratto albino ». 249.
- ID. — « Azione dell'alcool etilico sulla secrezione renale ». 347.

- GALLI P. — Vedi PASSERINI N.
- GARDANO G. — Vedi MEZZADROLI G.
- GHERARDELLI G. — « Un'osservazione sulla serie Jacobiana di una serie lineare ». 286.
- GIORGI G. — « Sul fenomeno Doppler di accelerazione ». 261.
- GORINI C. — « Ricerche di latte disgenesico ». 338.
- GRAFFI D. — « Sulle funzioni di varietà vettoriale ». 147, 383.
- ID. — « Sulla induzione magnetica ». 595.

H

- HADAMARD J. e LANDAU E. — « Sulle funzioni intere di genere finito ». [Traduzione di un estratto di carteggio fra gli Autori]. 3.
- HAGEN G. — Presenta il IX volume del « Catalogo Astrografico ». 252.
- HERRERA A. L. — « Imitazione di forme organiche collo stearato di sodio ». 18.
- ID. — « Termotropismo e costanti dei colpoidi ». 131.
- HLAVATÝ V. « Sulla riduzione dei sistemi ortogonali di equazioni differenziali lineari ». 467.
- ID. — « Complementi al teorema di riduzione dei sistemi differenziali ortogonali ». 498, 584.
- ID. — « Sui sistemi differenziali lineari dotati di un integrale quadratico indefinito ». 601.

K

- KRALL G. — « Variazione infinitesima delle funzioni di Green relative a campi piani pluriconnessi ». 28.
- ID. — « Dipendenza funzionale dal contorno del tensore di Green-Somigliana per le equazioni di elasticità ». 291, 488.
- ID. — « Variazione del campo nelle equazioni del moto elastico ». 498, 590.

L

- LAMPARIELLO G. — « Sul teorema della derivazione per serie ». 90.

LANDAU E. — Vedi HADAMARD J.
LO SURDO A. — «Emissione ionica dei metalli bombardati mediante elettroni». 448.

M

MALQUORI G. — «I sistemi: $\text{Cd}(\text{NO}_3)_2$ — HNO_3 — H_2O ; $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$ — HNO_3 — H_2O ; $\text{Mg}(\text{NO}_3)_2$ — HNO_3 — H_2O a 20° ». 518.
ID. — «Dissociazione termica del nitrato di cadmio». 518.
ID. — «I sistemi: $\text{Ph}(\text{NO}_3)_2$ — LiNO_3 — H_2O e $\text{Ph}(\text{NO}_3)_2$ — CsNO_3 — H_2O a 25° ». 518.
MASCARELLI L. — «Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati. Interpretazione dei fenomeni di isomeria ottica». 60.
MASOTTI A. — «Osservazioni sui moti di un fluido nei quali è stazionaria la distribuzione del vortice». 149, 224.
ID. — «Sul contatto tra linee di flusso e linee di corrente nei moti dei fluidi». 401.
MAZET R. — «Compléments à une Note sur les oscillations d'un liquide en vases communicants». 32.
MEROLA A. — «Osservazioni fotometriche della nuova variabile nella costellazione dell'«Auriga»». 43.
MEZZADROLI G. e GARDANO G. — «La formazione di aldeide formica e di zuccheri per azioni di raggi ultravioletti sui bicarbonati alcalini e alcalino-terrosi». 160.
MINEO C. — «Su una formula, analoga a quella di Stokes, per la determinazione del geoide con le deviazioni della verticale». 498.
MINETTI S. — «Le condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione intera sia di un certo genere e di un certo ordine anche in senso precisato. (A proposito di un carteggio fra i signori J. HADAMARD ed E. LANDAU)». 268.
MONTALENTI G. — «Sull'allevamento di termiti senza i protozoi dell'ampolla cecale». 529.

MONTEROSSO B. — «Osservazioni preliminari sulla biologia del genere «Scytodes» (Walck). (Araneae verae, Sicariidae)». 171.

N

NALLI P. e ANDREOLI G. — «La formula di Green nel campo complesso e l'estensione del teorema di Cauchy alle funzioni di due variabili complesse». 31, 92.
NATTA G. e FRERI M. — «Analisi coi raggi X e struttura cristallina delle leghe cadmio-argento». 311, 422, 431, 505.

P

PAGLIARULO M. L. — «Ulteriori ricerche sulla dispersione rifrattiva a rotatoria naturale». 157.
PALAZZO L. — Fa omaggio di una sua Nota e di un suo opuscolo. 252.
PANICHI U. — «Elementi di simmetria indipendenti di 1^a e di 2^a specie». 170, 326.
PARONA C. F. — Vedi SACCO F.
PARRAVANO N. (Segretario). — Presenta i libri giunti in dono all'Accademia. 352, 547.
ID. — Comunica i ringraziamenti dei Soci neo-eletti. 352.
ID. — Presenta un plico suggellato di Pirrucci M. 353.
ID. — Riferisce sulle cerimonie per la commemorazione di BERTHELOT M. a Parigi. 353.
PASQUINI P. — «La capacità lentogena della vescicola ottica negli embrioni di Anfibi e l'«organizzatore» del cristallino». 537.
PASSERINI N. e GALLI P. — «Sperimenti intorno all'azione del cloruro sodico contenuto nell'acqua d'irrigazione su di alcune piante». 618.
PASTORI M. — «Sulla superficie di Bernouilli». 282.
PATANÈ L. — «Sullo strato perintestinale del mesointestino dei balanidi». 77, 124.

PATERNÒ E. — Comunica la morte dei Soci stranieri MITTAG-LEFFLER e ARRHENIUS SVANTE. 352.

PETRI L. — «Ulteriori ricerche sull'applicazione dell'analisi fluoroscopica ai tessuti vegetali normali e patologici». 138.

PIAZZA M. — «Sulla presenza della Scordite in alcune miniere di wolframio in Portogallo». 70.

PICCARDI G. — «Relazione fra i potenziali di ionizzazione degli elementi omologhi». 305.

ID. — «Relazione fra i potenziali di ionizzazione di primo e di secondo ordine degli elementi omologhi». 311, 428.

PIROTTA P. R. — «La ecologia agraria e la Conferenza internazionale del grano». 459.

PUNTONI V. — «L'eliminazione del *virus* rabico per il tubo digestivo». 342.

Q

QUAGLIARELLO G. — «Azione del freddo sulla tensione superficiale del latte». 544.

ID. e DE LUCIA P. — «Trasformazione stereoisomera del glucosio per azione dell'insulina e di tessuto muscolare». 113.

QUILICO A. — «Solfonazione di eteri fenolici con acido amminosolfonico». 431, 512.

R

RANZI S. — «Inibizione differenziale nello sviluppo dei cefalopodi e considerazioni sul così detto gradiente assiale». 239.

RASETTI F. — «Sopra l'intensità di una riga proibita del potassio». 54, 503.

RONCHI V. — «Sulla distorsione: interpretazione nuova di una vecchia esperienza». 149.

ROSATI C. — «Sulle matrici di Riemann». 191.

ROSENBLATT A. — «Sopra il flusso dell'energia nel caso eccezionale del teorema di Kutta-Joukowski». 404.

RUDA F. — «Sulla spiegazione del raggio verde». 152, 156, 228.

RUSSO A. — «Sull'attenzione del potere sessuale dei "Gameti impuri" che com-

piono la "2ª Coniugazione accessoria" in "Cryptochilum echini." Mps.». 13.

S

SABBATANI L. — «Ricerche farmacologiche col permanganato di sodio per iniezioni endovenose». 267.

SACCO F. (Relatore). — A nome anche del Socio PARONA C. F. riferisce sulla Memoria di ZUFFARDI COMERCIO R. «Alciori del bacino terziario ligure-piemontese», da pubblicare negli Atti accademici. 252.

SANSONE G. — «La risoluzione apiristica delle congruenze biquadratiche». 573.

SAVELLI R. — «Frutti di due varietà portati dalla stessa pianta». 431.

ID. — «Un caso di "incompleta dominanza" nella xenia del Mais». 541.

SBRANA F. — «Teoremi di media per le soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali». 206.

ID. — «Sul calcolo approssimativo di una funzione armonica in tre variabili, e delle sue successive derivate». 462.

SCORZA G. — «Sui sottogruppi fondamentali di un gruppo». 361, 365, 441.

ID. — «Sui minimi e massimi parziali per le funzioni di più variabili. [Estratto da una lettera del prof. L. Tonelli]». 498, 579.

SERENI E. — «Ricerche sui cromatofori dei cefalopodi». 74.

SETTIMI L. — «Sulla composizione chimica di alcuni generi alimentari». 315.

ID. — Vedi BAGLIONI S.

SEVERI F. — «Sulle corrispondenze fra i punti di una curva variabile sopra una superficie algebrica». 435.

SIRACUSANO N. — «Dichiarazione intorno alla mia Nota "Una notevole deduzione dalla teoria di Bohr"». 156.

STRANEO L. — «Sulle condizioni di validità di alcuni sviluppi degli operatori funzionali». 292.

SUPINO G. — «Sopra l'influenza dei fori nella sollecitazione elastica delle lastre». 147.

T

- TERNI T. — « Modificazioni istologiche del timo degli uccelli in seguito a castrazione e nella vecchiaia ». 335.
- TERRACINI A. — « Sulla geometria proiettiva differenziale delle ipersuperficie ». 218.
- TESTI-DRAGONE G. — « Contributo allo studio della fluorescenza del clorocroma dei raggi ultravioletti ». 78, 179.
- THOMSEN G. — « Sulla rotazione della Terra nella meccanica relativistica ». 37.
- TIERCY G. — « Le problème de l'index de couleur en astronomie ». 301.
- TONELLI L. — « Un'osservazione sulla derivazione per serie ». 365.
- TRICOMI F. — « Ancora sull'equazione $\gamma \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0$ ». 567.

V

- VINASSA P. — « La simmetria negli elettroni ». 454.
- VITALI G. — « Sopra una derivazione covariante nel calcolo assoluto generalizzato ». 201, 206, 278.
- VRANCEANU G. — « Sur la stabilité trigonométrique de l'équilibre dans la Dynamique ». 291, 474.
- ID. — « Sullo scostamento geodetico nelle varietà analonome ». 602.

Y

- YOUNG R. C. — « Sur les valeurs de l'intégrale $\int_a^b f(x) dg(x)$ d'une fonction $f(x)$ à point de non-intégrabilité par rapport à $g(x)$ unique ». 601.

INDICE PER MATERIE

A

Aerologia. — «La direzione risultante dei venti alle varie altezze desunta dalle osservazioni di palloni piloti eseguite a Vigna di Valle (Bracciano)». EREDIA F. 49.

Analisi matematica. — «Sulle trasformazioni (m, n) tra $m + n + 4$ integrali di due equazioni alle derivate parziali del secondo ordine in due variabili indipendenti». COLOMBO B. 96.

Astrofisica. — «Osservazioni dell'eclisse parziale di Sole del 29 giugno 1927 eseguite in Arcetri». ABETTI G. 9, 84.

— «Contributo alla "Teoria balistica delle stelle variabili"». CANNATA C. 296.

— «Stime di grandezza della cometa Pons-Vincke». COLACEVICH A. 46, 99.

— «Le Problème de l'index de couleur en astronomie». TIERCY G. 301.

Astronomia. — «Misura di stelle doppie». ARMELLINI G. 551.

— «Osservazioni fotometriche della nuova variabile nella costellazione dell'«Auriga»». MEROLA A. 43.

Astronomia fisica. — «Sull'assorbimento della luce stellare nella atmosfera di Roma». ANDRISSI S. 602.

B

Biologia. — «Su alcune modificazioni del decorso della fermentazione alcoolica per effetto del campo elettromagnetico oscillante sul lievito». BENEDETTI E. 331.

— «Alterazioni istologiche riscontrate nella

cataratta da naftalina esaminando le fibre cristalline in istato di sopravvivenza». BUSACCA A. 175.

Biologia. — «Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina. — III. Modificazioni della struttura ultramicroscopica del cristallino per azione della disimbibizione in aria secca e dell'idratazione H_2O , delle basse e delle alte temperature». CATTANEO D. 244.

— «Ricerche di latte disgenesico». GORINI C. 338.

— «Imitazione di forme organiche collo stearato di sodio». HERRERA A. L. 18.

— «Termotropismo e costanti dei colpoidi». ID. 131.

— «Sull'allevamento di termiti senza i protozoi dell'ampolla cecale». MONTALENTI G. 529.

— «Osservazioni preliminari sulla biologia del genere «Scytodes» (Walck). (Araneae verae, Sicariidae)». MONTEROSSO B. 171.

— «Sull'attenuazione del potere sessuale dei «Gameti impuri», che compiono la "2ª Coniugazione accessoria" in «Cryptochilum echini» Mps.». RUNO A. 13.

— «Ricerche sui cromatofori dei cefalopodi». SERENI E. 74.

— «Modificazioni istologiche del timo degli uccelli in seguito a castrazione e nella vecchiaia». TERNI T. 335.

Botanica. — «Frutti di due varietà portati dalla stessa pianta». SAVELLI R. 431.

Bullettino bibliografico. — 355, 549.

C

Chimica. — «Sulla trasformazione biochimica della tirosina in derivati del pirrolo». ANGELI A. 87.

— «L'azione dell'ossido d'azoto sui tiosolfati dei metalli dell'8° gruppo». CAMBI L. e CLERICI A. 267, 448.

— «Complessi dell'uranile con acidi polifenolici». FERNANDES L. 102.

— «Ricerche sui solfosali. — IV. Sopra alcuni derivati di un ipotetico acido tioacquico». Id. 165.

— «Sulla struttura cristallina del cloruro doppio di cadmio e cesio CsCdCl_3 . (Considerazioni sulla struttura monometrica tipo $A [BX_3]$ ». FERRARI A. e BARONI A. 235, 418.

— «La struttura del clorato d'argento». Id. e FONTANA C. G. 235, 312.

— «Porpore d'oro». FONTANA C. G. 231.

— «I sistemi: $\text{Cd}(\text{NO}_3)_2 - \text{HNO}_3 - \text{H}_2\text{O}$; $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2 - \text{HNO}_3 - \text{H}_2\text{O}$; $\text{Mg}(\text{NO}_2)_2 - \text{HNO}_3 - \text{H}_2\text{O}$ a 20° ». MALQUORI G. 518.

— «Dissociazione termica del nitrato di cadmio». Id. 518.

— «I sistemi $\text{Ph}(\text{NO}_3)_2 - \text{LiNO}_3 - \text{H}_2\text{O}$ e $\text{Ph}(\text{NO}_3)_2 - \text{CsNO}_3 - \text{H}_2\text{O}$ a 25° ». Id. 518.

— «Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati. Interpretazione dei fenomeni di isomeria ottica». MASCARELLI L. 60.

— «La formazione di aldeide formica e di zuccheri per azione di raggi ultravioletti sui bicarbonati alcalini e alcalino-terrosi». MEZZADROLI G. e GARDANO G. 160.

Chimica agraria. — «Il comportamento dell'acido arsenico nei riguardi del potere assorbente del terreno». ANTONIANI C. 65, 107.

— «L'influenza del perfosfato sulla reazione del terreno». Id. 326.

Chimica biologica. — «Trasformazione stereoisomera del glucosio per azione dell'insulina e di tessuto muscolare». QUAGLIARELLO G. e DE LUCA P. 113.

Chimica biologica. — «Sulla composizione chimica di alcuni generi alimentari». SETTIMI L. 315.

Chimica-Fisica. — «La risoluzione di una banda di assorbimento ritenuta comune al praseodimio e neodimio». FERNANDES L. 235, 413.

— «Sulla struttura cristallina dei cloruri bivalenti. Cloruri di cobalto e di nichel anidri». FERRARI A. 56.

— «Analisi coi raggi X e struttura cristallina delle leghe cadmio-argento». NATTA G. e FRERI M. 311, 422, 431, 505.

— «Relazione fra i potenziali di ionizzazione degli elementi omologhi». PICCARDI G. 305.

— «Relazioni fra i potenziali di ionizzazione di primo e di secondo ordine degli elementi omologhi». Id. 311, 428.

— «La simmetria negli elettroni». VINASSA P. 454.

Chimica Fisica fisiologica. — «Azione delle basse temperature sulla lente cristallina». BERGAMI G. 117.

— «Azione del freddo sulla tensione superficiale del latte». QUAGLIARELLO G. 544.

Chimica organica. — «Solfonazione di eteri fenolici con acido aminosolfonico». QUILICO A. 431, 512.

Cristallografia. — «Elementi di simmetria indipendenti di 1^a e di 2^a specie». PANICHI U. 170, 326.

E

Ecologia agraria. — «La ecologia agraria e la Conferenza internazionale del grano». PIROTTA P. R. 459.

Embriologia. — «Come avviene in "Fritillaria persica L." lo sviluppo del gametofito femminile e l'aumento dei cromosomi nella regione colazale». BAMBACIONI V. 544.

— «Inibizione differenziale nello sviluppo dei cefalopodi e considerazioni sul così detto gradiente assiale». RANZI S. 239.

Embriologia sperimentale. — «La capacità lentogena della vescicola ottica

negli embrioni di Anfibi e l'“organizzatore” del cristallino». PASQUINI P. 537.

F

Farmacologia. — «Ricerche farmacologiche col permanganato di sodio per iniezioni endovenose». SABBATANI L. 267.

Fisica. — «Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell'atomo». FERMI E. 505, 602.

— «Sul fenomeno Doppler d'accelerazione». GIORGI G. 261.

— «Emissione ionica dei metalli bombardati mediante elettroni». LO SURDO A. 448.

— «Ulteriori ricerche sulla dispersione rifrattiva a rotatoria naturale». PAGLIARULO M. L. 157.

— «Sopra l'intensità di una riga proibita del potassio». RASETTI F. 54, 503.

— «Sulla spiegazione del raggio verde». RUDA F. 152, 156, 228.

— «Dichiarazione intorno alla mia Nota “Una notevole deduzione dalla teoria di Bohr”». SIRACUSANO N. 156.

Fisica-Matematica. — «Sulle condizioni di validità di alcuni sviluppi degli operatori funzionali». STRANEO L. 292.

Fisiologia. — «Gli elementi circolanti dell'Emolinfa dei crostacei Eufilopodi». ARTOM G. 257.

— «Effetti del raffreddamento sui gangli spinali». ID. 544, 612.

— «Azione della Chinina, Eserina, Pilocarpina, Digitonina, Spartema e Atropina sui centri nervosi. — Ricerche sperimentali sul preparato centrale di “Bufo vulgaris”». BAGLIONI S. 458, 557.

— «Dottrina fisiologica dell'azione dei veleni eccitanti i centri nervosi». ID. 458, 562.

— «Sul valore nutritivo delle sostanze azotate di alcuni generi alimentari conservati. Ricerche sperimentali sui ratti albini». ID. e SETTIMI L. 267, 377.

— «Sulla produzione di acido lattico e di acido fosforico nella “rigidità del disgel”». DE CARLO L. 544, 607.

Fisiologia. — «Il meccanismo neurochimico della inibizione vagale nel cuore di mammifero». FOÀ C. 9.

— «Sulla curva termica giornaliera del ratto albino». GALAMINI A. 249.

— «Azione dell'alcool etilico sulla secrezione renale». ID. 347.

Fisiologia dello sviluppo. — «Sul tempo di sviluppo delle correlazioni umorali-nervose. Ricerche sugli anfibi». 78.

Fisiologia vegetale. — «Sperimenti intorno all'azione del cloruro sodico contenuto nell'acqua d'irrigazione su di alcune piante». PASSERINI N. e GALLI P. 618.

— «Contributo allo studio della fluorescenza del clorocroma dei raggi ultravioletti». TESTI-DRAGONE G. 78, 179.

G

Genetica. — «Un caso di “incompleta dominanza” della xenia del Mais». SAVELLI R. 541.

Geodesia. — «Su una formula, analoga a quella di Stokes, per la determinazione del geoide con le deviazioni della verticale». MINEO C. 498.

Geologia. — «Su alcuni lembi del ricoprimento della Dent Blanche (VI) compresi entro le formazioni post-triastiche della Grivola». DAL PIAZ G. 525.

— «I molluschi miocenici di Porto Bardia e dell'Oasi di Giarabùb (Marmarica)». DESIO A. 66.

— «Sulla presenza del miocene nei dintorni di El-Abiâr (Cirenaica)». ID. 236.

— «Resti di mammiferi del Terziario e del Quaternario di Ragusa in Sicilia». FABIANI R. 521.

— «Enigmi tettonici nei monti di Valdieri e lungo le valli del Gesso, della Stura e della Vermentagna». FRANCHI S. 267, 370.

— «I terreni dal Priaboniano al Norico nei dintorni di Albenga». ID. 458.

Geometria. — «Su certi gruppi infiniti del Lie, connessi alla teoria delle algebre

ed al calcolo differenziale assoluto».

ANDREOLI G. 412, 493.

Geometria. — «Studio proiettivo dell'intorno di una superficie». EULA C. e FRANCESCHI O. 389.

— «Un'osservazione sulla serie Jacobiana di una serie lineare». GHERARDELLI G. 286.

— «Sulla geometria proiettiva differenziale delle ipersuperficie». TERRACINI A. 218.

I

Idrodinamica. — «Osservazioni sui moti di un fluido nei quali è stazionaria la distribuzione del vortice». MASOTTI A. 149, 224.

— «Sul contatto tra linee di flusso e linee di corrente nei moti dei fluidi». ID. 401.

Idromeccanica. — «Sopra alcune proprietà di moti liquidi permanenti i cui vortici sono normali alle velocità». CALDONAZZO B. 288.

— «I moti di Viterbi ed i sistemi tripli ortogonali di superficie da essi determinati». ID. 407.

— «Sui vortici spirali». CISOTTI U. 183.

— «Sui vortici elico-conici». ID. 369, 446.

— «Sopra una categoria di moti stazionari dei liquidi (pesanti) viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali». CRUDELI U. 291, 397.

— «Moti lenti stazionari di veli liquidi viscosi». FINZI B. 481.

— «Sopra il flusso dell'energia nel caso eccezionale del teorema di Kutta-Joukowski». ROSENBLATT A. 404.

M

Matematica. — «Fascio di quadriche di Darboux e normale proiettiva in un punto di una superficie». BOMPIANI E. 187.

— «Sui funzionali multilineari e di grado superiore». CACCIOPPOLI R. 22.

— «Sulla quadratura delle superficie piane e curve». ID. 142.

— «Una classe di superficie quadrabili». ID. 393.

Matematica. — «Sulla nozione di parità e sul carattere reale delle varietà abeliane reali. — I. Le matrici riemanniane sottonormali». CHERUBINO S. 197.

— II. «Le matrici riemanniane realizzate». ID. 201, 274.

— «Sulla divergenza dei tensori». CISOTTI U. 81.

— «Sul carattere solenoidale del tensore di Ricci per le forme ternarie». ID. 267, 367.

— «Sui vortici elico-conici». ID. 369, 446.

— «Sopra lo scostamento geodetico elementare». CRUDELI U. 572.

— «Funzioni biarmoniche sopra una superficie». FINZI B. 210.

— «Sulle funzioni di varietà vettoriale». GRAFFI D. 147, 383.

— «Sulla induzione magnetica». ID. 595.

— «Sulle funzioni intere di genere finito. [Traduzione di un estratto di carteggio fra gli Autori]». HADAMARD J. e LANDAU E. 3.

— «Sulla riduzione dei sistemi ortogonali di equazioni differenziali lineari». HLAVATÝ V. 467.

— «Complementi al teorema di riduzione dei sistemi differenziali ortogonali». ID. 498, 584.

— «Sui sistemi differenziali lineari dotati di un integrale quadratico indefinito». ID. 601.

— «Variazione infinitesima delle funzioni di Green relative a campi piani pluriconnessi». KRALL G. 28.

— «Sul teorema della derivazione per serie». LAMPARIELLO G. 90.

— «Le condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione intera sia di un certo ordine anche in senso precisato. [A proposito di un carteggio fra i signori J. HADAMARD ed E. LANDAU]». MINETTI S. 268.

— «La formula di Green nel campo complesso e l'estensione del teorema di Cauchy alle funzioni di due variabili complesse». 31, 92.

— «Sulla superficie di Bernoulli». PASTORI M. 282.

Matematica. — «Sulle matrici di Riemann». ROSATI C. 191.

— «Teoremi di media per le soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali». SBRANA F. 206.

— «Sul calcolo approssimativo di una funzione armonica in tre variabili, e delle sue successive derivate». ID. 462.

— «Sui sottogruppi fondamentali di un gruppo». SCORZA G. 361, 365, 441.

— «Sui minimi e massimi parziali per le funzioni di più variabili. [Estratto da una Lettera del prof. L. TONELLI]». ID. 438, 579.

— «Sulle corrispondenze fra i punti di una curva variabile sopra una superficie algebrica». SEVERI F. 435.

— «Un'osservazione sulla derivazione per serie». TONELLI L. 365.

— «Ancora sull'equazione $y \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0$ ». TRICOMI F. 567.

— «Sopra una derivazione covariante nel calcolo assoluto generalizzato». VITALI G. 201, 206, 278.

— «Sur les valeurs de l'intégrale $\int_a^b f(x) dg(x)$ d'une fonction $f(x)$ à point de non-intégrabilité par rapport à $g(x)$ unique». YOUNG R. C. 601.

Meccanica. — «Dipendenza funzionale dal contorno del tensore di Green-Somigliana per le equazioni di elasticità». KRALL G. 291, 488.

— «Variazione del campo nelle equazioni del moto elastico». ID. 498, 590.

— «Compléments à une Note sur les oscillations d'un liquide en vases communicants». MAZET R. 32.

— «Sopra l'influenza dei fori nella sollecitazione elastica delle lastre». SUPINO G. 147.

— «Sulla rotazione della Terra nella meccanica relativistica». THOMSEN G. 37.

— «Sur la stabilité trigonométrique de l'équilibre dans la Dynamique». VRANCEANU G. 291, 474.

— «Sullo scostamento geodetico nelle varietà analomne». ID. 602.

Meteorologia. — «Andamenti periodici della temperatura media diurna a Modena». BARUZZI M. 46.

Microbiologia. — «L'eliminazione del virus rabico per il tubo digestivo». PUNTONI V. 342.

Mineralogia. — «Sulla presenza della Scorodite in alcune miniere di wolframio in Portogallo». PIAZZA M. 70.

N

Necrologia. — Annuncio della morte dei Soci stranieri MITTAG-LEFFLER G. e ARRHENIUS SVANTE A. 352.

O

Ottica. — «Sulla distorsione: interpretazione nuova di una vecchia esperienza». RONCHI V. 149.

P

Patologia vegetale. — «Ulteriori ricerche sull'applicazione dell'analisi fluoroscopica ai tessuti vegetali normali e patologici». PETRI L. 138.

Petrografia. — «Di alcune rocce rinvenute nelle perforazioni di Ripi (Lazio)». CUMIN G. 518.

T

Teoria dei numeri. — «La risoluzione apiristica delle congruenze biquadratiche». SANSONE G. 573.

Z

Zoologia. — «Le affinità dei Petromizoni studiate secondo criteri morfologici-sistematici ed ecologici». COTRONI G. 121.

— «Ancora sulla organizzazione e le caratteristiche funzionali dell'attività nervosa dei Tunicati. III. Il sistema nervoso viscerale». FEDELE M. 532.

— «Sullo strato perintestinale del mesointestino dei balanidi». PATANÈ L. 77, 124.

Appendice al volume VI, serie 6^a

1927

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Corrisp. A. Peratoner

letta dal Socio N. PARRAVANO nella seduta del 2 gennaio 1927.

Alberto Peratoner nacque a Catania nel 1862 da una distinta famiglia di commercianti.

Compiuti gli studi classici in Germania, nel ginnasio di Birkenfeld, tornò in Italia a seguire i corsi universitari di Chimica, prima a Catania e poi a Torino, sotto la guida del Fileti.

Conseguita la laurea, da Torino si trasferì a Palermo in qualità di assistente presso quell'Istituto chimico che, a buon diritto, per opera del Cannizzaro e del Paternò, si vanta di essere stato la culla della chimica italiana.

Dopo soli sei anni di laurea, Egli aveva già al suo attivo una apprezzata produzione scientifica, e questa gli consentì di salire giovanissimo all'onore della cattedra, prima a Catania sua città nativa e a Palermo subito dopo, come successore del maestro Paternò, trasferitosi a Roma.

Aveva allora appena 32 anni, e la rinomanza acquistata fra gli studiosi, e l'entusiasmo e la fede di cui si mostrava animato per la indagine scientifica, lo fecero apparire degno continuatore dei maestri che lo avevano preceduto su quella cattedra.

Ed il Peratoner infatti non venne meno alla brillante promessa rappresentata dall'opera fino allora compiuta. E fino al 1909, quando passò a Roma successore del Balbiano nella cattedra di chimica farmaceutica della nostra Università, Egli visse a Palermo una vita di lavoro, che affermò duramente nella Chimica il nome di Lui.

A Roma, le cure di assestamento nel nuovo laboratorio e i molteplici incarichi governativi ne allentarono nei primi tempi l'attività scientifica. In seguito però Egli riprese intenso il lavoro, perseguendo alcuni suoi interessanti concetti sulla possibilità di curare uno dei più terribili flagelli dell'umanità, il cancro; ed io ricordo ammirato il fervore giovanile con cui Egli elaborava in frequenti colloqui con colleghi ed amici le idee che gli si affollavano alla mente, e l'ardore infaticabile con cui spingeva avanti le ricerche in laboratorio.

Ma tanta febbrile operosità non poté avere il suo compimento, e il male atroce che da lunghi anni lo aveva ghermito lo trasse immaturamente a

morte, or fa un anno, togliendolo alla Scienza che molto aveva diritto di aspettarsi ancora da lui, alla Famiglia, agli amici e ai discepoli che lo adoravano.

Le prime ricerche del Peratoner riguardano i derivati iodurati dell'acetilene. Le iniziò collaborando sull'argomento assieme col Paternò, e le continuò poi da solo mettendo in chiaro con delicate esperienze la natura dei composti che si formano per azione dell'iodio sui derivati acetilenici, e correggendo alcune idee inesatte che si avevano su tali prodotti di fondamentale importanza per la stereochimica dei composti etilenici.

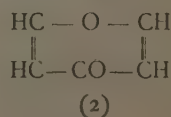
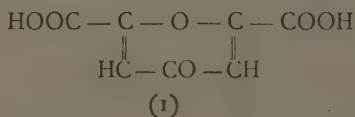
Altri lavori di quel periodo giovanile riguardano i pretesi isomeri dell'acido piromucico e del furfurolo, i tentativi per ottenere il titanio-etile, la scissione degli eteri di acidi cloro- β -chetonici mediante l'acido solforico, un modo singolare di formazione della epitetilina e l'azione del cloruro di solforile sui fenoli e i loro eteri, azione nella quale Peratoner mostrò che non si formano derivati solfonici, ma prodotti cloro-sostituiti.

Di speciale interesse è una ricerca che pubblicò a Palermo nel 1895.

Dopo che Lord Rayleigh e Sir William Ramsay ebbero isolato l'argo dall'aria (1894), Berthelot, Mendelejeff ed altri, osservando che il peso molecolare (40) dell'argo è molto vicino al peso di una molecola costituita di tre atomi di azoto ($N_3 = 42$), pensarono che il nuovo gas potesse essere un polimero dell'azoto. Peratoner volle sottoporre a riprova questa ipotesi, e istituì una serie di esperienze nelle quali decompose in varie condizioni diverse sostanze contenenti preformato il gruppo N_3 . Ma, nè con la elettrolisi del triazoturo di sodio, nè con la esplosione del triazoturo di argento, nè altrimenti poté mai ritrovare argo fra i gas prodotti nelle decomposizioni, portando così un valido argomento contro l'ipotesi che, sostenuta allora da chimici eminenti, fu in seguito dimostrata insussistente.

Ma il principale campo di studi del Peratoner, quello che meglio ne mise in luce le qualità preziose di sperimentatore abile e di osservatore finissimo, fu quello del pirone.

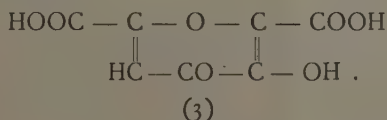
Quando Egli iniziò le sue ricerche, nel 1891, i chimici da poco tempo avevano cominciato ad occuparsi di questo gruppo di sostanze. Sono infatti del 1883-1885 le belle esperienze con le quali Haitinger e Lieben dimostrarono che l'acido chelidonico (isolato dal *Chelidonium majus*) è un acido pirondicarbonico (1). Da questo acido, per eliminazione di CO_2 , era stato anche ottenuto il pirone (2), la sostanza madre del gruppo:



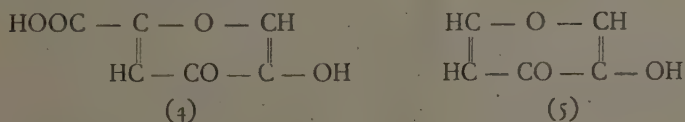
A completare le ricerche di Haitinger e Lieben, mancava la sintesi, la quale doveva confermare la formula dedotta per via analitica. E Peratoner riuscì a preparare sinteticamente l'acido chelidonico, dimostrando in maniera sicura la sua costituzione e rendendo così più solidi i fondamenti sui quali si basò poi tutta la chimica del pirone.

Altri derivati del pirone si presentavano intanto interessanti allo studio dei chimici, e fra essi l'acido meconico che da lungo tempo era stato ricavato dall'oppio. Le formule che erano state proposte per questo acido, e per i derivati che da esso si possono ottenere per graduale eliminazione di anidride carbonica (acido comenico e acido piromeconico), erano però ancora mal sicure, giacchè applicando il metodo della scissione alcalina — che Haitinger e Lieben avevano sperimentato con successo con l'acido chelidonico — si ottenevano sempre sostanze non definite e tali da non poter dare luce sufficiente sulla loro struttura.

Peratoner portò un contributo decisivo alla questione sottoponendo alla scissione alcalina non gli acidi liberi, ma i loro eteri etilici. Dall'etere trietilico dell'acido meconico, poté così dimostrare qualitativamente e quantitativamente la formazione di alcool etilico (2 molecole), acido ossalico (2 molecole) e etere etil-acetolico (1 molecola), prodotti la cui formazione si può spiegare soltanto ammettendo che l'acido meconico sia un acido ossichelidonico della formula (3):



Analogamente, studiando i prodotti che si formano nella scissione alcalina degli eteri degli acidi comenico e piromeconico (eteri che allievi suoi erano riusciti a preparare), dimostrò che all'acido comenico spetta la formula (4) di acido 3-ossi-piron-2'-carbonico, e all'acido piromeconico la formula (5) di 3-ossi-pirone:



I brillanti successi ottenuti in questo campo non rallentarono l'attività del Peratoner. Continuando le sue ricerche Egli poté spiegare perchè nella scissione alcalina degli acidi meconico, comenico e piromeconico, non si può isolare tra i prodotti della reazione l'alcool acetolico che pur si dovrebbe ottenere, e riuscì a dimostrare la formazione e la costituzione di un composto $\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_2$ che appunto prende origine per ulteriore trasformazione del-

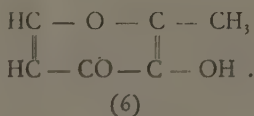
l'alcool acetolico. Si valse inoltre della scissione alcalina per riconoscere la struttura di altri derivati del pirono di costituzione incerta, per es. dell'acido ossicomenico di Reibstein; e, non ritenendo abbastanza sicura la formula (4) per l'acido comenico, volle confermarla misurando le costanti di affinità degli acidi comenico e comanico (acido piron- α -carbonico non ossidrato) e confrontandole con quelle degli acidi benzoico e ossibenzoici.

L'ultimo lavoro che pubblicò sull'argomento riguarda la sintesi dell'acido piromeconico a partire dal pirono. Esso completa la ricerca sintetica che era stata stata oggetto di uno dei suoi primi studi, e che dall'acido piromeconico gli aveva permesso di arrivare all'acido comenico con lo stesso metodo con cui si passa dai fenoli agli acidi fenolcarbonici.

*
* *

Sono da ricordarsi a parte le ricerche sul maltolo che costituiscono un capitolo intero della chimica del pirono tutto dovuto all'attività ed alla abilità del nostro Peratoner.

Dopo aver dimostrato che il maltolo (che era stato isolato tra i prodotti che si hanno nella torrefazione del malto) è identico all'acido laricico che Stenhouse aveva ricavato dalle cortecce di larice e che era poi stato ottenuto anche dalle foglie di abete, Egli intraprese una serie di ricerche per stabilire la costituzione di questo composto e, studiando qualitativamente e quantitativamente i prodotti della scissione alcalina dell'etere metilico e discutendo con sottile acume altre numerose esperienze fatte con questa sostanza, Egli poté dimostrare che ad essa si deve attribuire la formula (6) di 2-metil-3-ossi-pirone:



Questo lavoro sul maltolo è veramente un modello di ricerca analitica, per la precisione delle esperienze e la eleganza delle argomentazioni.

Altri lavori sul gruppo del pirono sono quelli che riguardano i prodotti azotati che da diversi composti pironici si possono ottenere con l'ammoniaca, con l'idrossilammina, con gli ossidi di azoto, con i sali di diazonio, ecc. È un complesso gruppo di ricerche nelle quali viene esaminata da diversi punti di vista la capacità di trasformazione del nucleo pironico in piridinico.

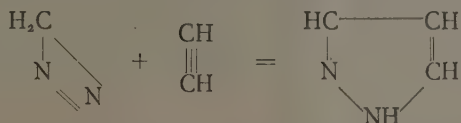
Dopo aver chiarito alcuni punti oscuri riguardanti la trasformabilità dei composti pironici in γ -piridoni per azione dell'ammoniaca, Peratoner iniziò lo studio degli enigmatici prodotti azotati che Ost aveva ottenuti per azione dell'acido nitroso sull'acido piromeconico (acido piromecazonico, ecc.) e,

non solo riuscì a dimostrarne in modo evidente la struttura e la genesi, ma, allargando il campo delle ricerche, Egli studiò e fece studiare da allievi il comportamento dei derivati pironici con la idrossilammmina, mettendo in evidenza il vario modo con cui questa sostanza reagisce sui diversi derivati del pirone, e rendendo chiaro il particolare contegno degli ossi-piridoni che contengono un ossidrile all'azoto.

*
* *

Dagli studi sul pirone germogliò un'altra serie di ricerche, quelle sul diazometano, le quali, se non raggiunsero la mole delle prime, furono tuttavia notevoli per i risultati a cui giunsero e feconde per l'impulso che dettero a nuove indagini eseguite da diversi allievi sotto la guida del Maestro.

Il von Pechmann, che scoprì nel 1894 il diazo-metano, aveva fatto notare l'importanza di esso come mezzo metilante, e, benchè mediante il diazometano avesse effettuata la sintesi di diverse pirazoline facendolo reagire con composti etilenici e quella del pirazolo per reazione con l'acetilene:



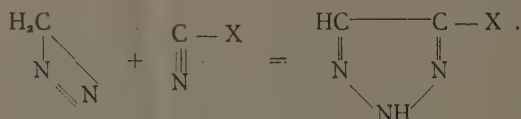
egli non aveva proseguito queste ricerche sintetiche, che pur si presentavano degne di interesse.

Peratoner ebbe il merito di estendere tali indagini valendosi del diazo-metano come di un reattivo prezioso per mezzo del quale poté arricchire la letteratura chimica di numerosi importanti derivati eterociclici e col quale poté risolvere delicate questioni di tautomeria.

Fin dal 1906 aveva dovuto ricorrere al diazo-metano ed al diazo-etano per preparare gli eteri dei composti pironici che, come abbiamo visto prima, dovevano essere sottoposti alla scissione alcalina. Nell'occasione poté acquistare familiarità con questi reattivi e poté constatare personalmente la facilità con la quale questi singolari composti sono capaci di reagire; Egli spinse perciò gli allievi suoi ad usarli in altre reazioni. Così, per es., fece studiare l'azione del diazo-metano sopra diversi composti etilenici, azione da cui presero origine varie pirazoline, e, dopo le esperienze di von Pechmann, — che impiegò il diazo-metano per riconoscere la struttura chetonica o enolica di diversi composti tautomeri — Egli fece studiare l'azione del diazo-metano sull'acido cianico, mettendo in evidenza la struttura isoimmidica dell'acido cianico stesso.

In tal modo, dal campo del pirone la sua attività fu volta verso lo studio dell'azione del diazometano sui composti cianici. Egli prese a con-

siderare l'analogia che esiste tra gli aggruppamenti $C \equiv C$ e $C \equiv N$, e ritenne probabile che i composti cianici potessero reagire con i diazoidrocarburi alifatici in modo analogo ai composti acetilenici ed etilenici; e dal cianogeno e dagli alogenuri di cianogeno ottenne infatti derivati oso-triazolici di struttura analoga al pirazolo, che si ha con l'acetilene, ed alle pirazoline che si hanno dai composti etilenici:



Facendo invece agire il diazometano sull'acido cianidrico non ebbe traccia di prodotti di condensazione (oso-triazolo), ma soltanto una miscela di metil-carbilammina e nitrile acetico.

E, discutendo i risultati di questa esperienza, entrò nel vivo della questione, da lungo tempo dibattuta, se all'acido cianidrico dovesse attribuirsi la formula nitrilica $H-C \equiv N$ oppure quella iso-nitrilica $H-N \equiv C$, e mostrò con chiari argomenti la loro concordanza con la formula isonitrilica.

*
* *

Questa, per sommi capi, l'opera scientifica di Alberto Peratoner, opera tutta pervasa di grande coscienza, e tutta caratterizzata da acutezza di penetrazione, da eleganza di metodi, da modernità di cultura.

Accanto ad essa, Egli ne svolse una altrettanto intensa di educatore, e una fitta schiera di allievi nell'insegnamento superiore e medio, negli uffici di Stato e nelle industrie private, sta a mostrare quanto nobilmente ed efficacemente egli abbia esercitato la sua missione educatrice.

Fu uomo di vasta cultura naturalistica e umanistica; ebbe temperamento sereno e generoso, animo fine e signorile, modi distinti. E queste sue qualità gli procurarono l'affettuosa simpatia di quanti lo avvicinarono.

Ebbe abitudini semplici e volle funerali di grande austerità. Quanti vi parteciparono rimasero colpiti dalla sincerità del rimpianto che traspariva dalla commozione di tutti. E l'unanimità e la sincerità del cordoglio furono le onoranze più degne rese alla salma di Alberto Peratoner.

Rievocandone la figura, inviamo ancora una volta oggi alla Famiglia l'espressione della nostra cordiale solidarietà nel suo dolore.

Commemorazione del Socio Corrisp. O. Marinelli

letta dal Socio G. DAINELLI nella seduta del 6 febbraio 1927.

Quando, il 14 giugno ultimo scorso, ci sorprese la morte improvvisa e inaspettata di Olinto Marinelli, — inaspettata sopra tutto a quelli di noi che più gli erano vicini e lo avevano veduto fino a poche ore innanzi, — avemmo subito la sensazione della immensa perdita che con quella morte veniva a colpire, ineluttabilmente, la scienza italiana; ma quella sensazione era soverchiata, in certo modo, dal dolore, — più personale e più intimo, — di tutti noi, che ci vedevamo privati, di un tratto, dell'amico fedele e buono, sempre pronto a dare il suo aiuto, il suo consiglio, tutta l'anima sua ingenuamente limpida e cristallina, così nelle gioie come nelle avversità. Ma oggi, oggi che il nostro dolore non è più quello del primo momento quando pareva quasi esclusivo, — oggi che esso, pur vivo e profondo come prima, è però divenuto più freddamente ragionante, al sentimento personale si accompagna, netta, quella sensazione che subito ci balenò spontanea anche se vaga, cioè del vuoto non colmabile che la perdita di Olinto Marinelli ha lasciato, dietro di sé, nella scienza italiana.

Bisogna dimenticare, — quando si pensi alla figura di Olinto Marinelli, — la Geografia tradizionale, quale soltanto hanno conosciuto, ufficialmente, i nostri regolamenti scolastici fino a tutt'oggi, più o meno ancella della Storia, e dimenticare anche il geografo, pure tradizionale, occupato a trarre, dalla critica di scritti di qualsiasi natura, la descrizione di questa o quella parte della Terra ch'egli non ha mai direttamente conosciuto. Questi sono una concezione della Geografia, e un tipo, di studioso, del tutto sorpassati, da che la Geografia si è affermata, decisamente, come scienza a sè: scienza che può anche utilizzare gli elementi che altri ordini di studi possano offrire, utilizzandoli però con un metodo che è suo e suo soltanto, ma sopra tutto deve procedere con la diretta osservazione di tutti quanti i fenomeni, dai fisici agli umani, che han sede sulla Terra. Olinto Marinelli è stato il primo, in Italia, genuino rappresentante di questa Geografia scientifica, divenendo ben presto veramente grande geografo anche in cospetto dei maggiori maestri che le altre nazioni danno oggi giorno.

Ebbe la ventura di essere figlio di Giovanni Marinelli: ma questa ventura non consistè tanto nel fatto che il padre potesse con l'esempio di una attività indefessa e la quotidiana consuetudine indirizzarlo per quella via che era stata la sua. Anzi, al contrario: perchè Giovanni Marinelli, sommo e insuperabile rappresentante della vecchia scuola, presenti, intuì quasi che la

vecchia scuola, della Geografia tradizionale a base letteraria e critica, doveva cedere di fronte alla nuova, essenzialmente scientifica e di osservazione, e volle che il figlio, Olinto, vi si avviasse per la via delle Scienze Naturali, e specialmente di quelle discipline della Terra, le geologiche, senza la cui conoscenza è impossibile apprezzare, nella loro intensità e nella loro molteplice opera, i fenomeni attuali. E Olinto Marinelli divenne, così, scolaro di Carlo De Stefani, l'indimenticabile maestro, di sulla cattedra e dai libri, di tutta una generazione di geologi italiani.

Fu uno scolaro, però, non di quelli che si trastullano poi per tutta quanta la vita su piccoli argomenti o intorno a idee non proprie, o la cui attività si spegne quando cessi l'aiuto od il consiglio del maestro. Fu, invece, uno scolaro di eccezione, che col maestro osava anche discutere, opponendo idee sue proprie su complessi problemi della Terra, tanto che a pochi anni di distanza dalla laurea Egli poté pubblicare quello studio, che era stato oggetto della sua tesi dottorale, sulla Geologia dei dintorni di Tarceto, denso volume, nel quale per la estensione spaziale data alle ricerche e per la loro varietà era la promessa, per la Geologia italiana, di uno studio di buona razza, come la Geologia italiana ha sempre avuto. Basti ricordare come con quel volume sia stata posta in luce una interpretazione completamente nuova della tettonica delle Prealpi Giulie, e, fra tanta altra messe di osservazioni originali, fissati i principali momenti delle glaciazioni quaternarie e dei frapposti periodi interglaciali nel bacino del Tagliamento.

Questo volume, però, del quale ciascuno di noi geologi si considererebbe fiero di essere stato autore, per Olinto Marinelli rappresentò, più che altro, quasi una esercitazione propedeutica per la sua gloriosa carriera di geografo scienziato. Egli, del resto, veniva preparandosi, assiduamente, anche per le altre vie, che non fossero quelle della pura Geologia.

Abituato all'amore dei monti, sui quali nel Friuli nativo aveva seguito fin da ragazzo il padre e Torquato Taramelli, altro nostro indimenticabile consocio, si era abituato anche ad una osservazione tanto più vigile ed agile e pronta, quanto maggiore è la varietà dei fenomeni naturali che i monti offrono a chi li sappia ben osservare. E se cominciò, giovanetto, a fissare la propria attenzione sui caratteri fisici del lago di Cavazzo e poi su molti altri laghi, - alpini o no, e della più varia origine, - dimostrò subito la vastità del suo programma, che non conosceva quasi esclusioni, quando si dette a percorrere, non le sole Alpi Friulane, ma tutte tra l'Isonzo e l'Adige, dando appunto quei suoi Studi Orografici sulle Alpi Orientali, dove osservazioni, disegni, rilievi, interpretazioni venivano notate, sopra i più vari argomenti: dalla tettonica e i rapporti tra questa e le forme del terreno, ai ghiacciai, ai laghi, alle sorgenti, ai fenomeni carsici, alle forme di erosione normale o di eccezione, fino ai limiti altimetrici ed alle caratteristiche degli insediamenti umani ed alle regole dell'alpeggio alpino.

Paravano, allora, osservazioni forse frammentarie, spesso slegate: ap-

parentemente magari; non però nella mente del giovane geografo, che intendeva con esse perfezionare sempre più la sua preparazione, ma anche, — credo certo, — raccogliere elementi per futuri studi di maggior lena, di più ampio respiro, di carattere non soltanto analitico, ma sintetico anche. E così furono, infatti, più tardi quelli sopra i limiti altimetrici degli insediamenti umani, delle colture e delle formazioni vegetali, o sopra i fenomeni carsici nei gessi italiani, o quello monografico sopra i ghiacciai e sopra il limite climatico delle nevi nelle Alpi Orientali, e molti altri ancora.

Ma oramai Olinto Marinelli non era più soltanto, a questo punto, la giovane promessa della scienza italiana: giovane d'anni ancora, — meno che trentenne era già infatti succeduto al padre nella cattedra presso l'Istituto di Studi Superiori di Firenze, — era già l'esponente e il capo plebiscitariamente riconosciuto dei geografi italiani, così della vecchia scuola tradizionale, come della nuova della quale molti, sull'esempio di Lui, si erano fatti e si venivan facendo seguaci. E la sua attività pareva moltiplicarsi: ecco gli studi di morfologia alpina, cioè in gran parte glaciale, come quelli fatti nel bacino dell'Ossola, o di morfologia appenninica, cioè dovuta agli agenti normali, come quelli intorno all'Amiata; ecco la serie di ricerche sulle correnti nel Mediterraneo; le osservazioni sulle varie forme di erosione, col paragone tra quelle più caratteristiche che si verificano nella nostra Italia e quelle da Lui osservate negli Stati Uniti d'America.

Giacchè come il campo dei suoi studi era venuto via via sempre più allargandosi, e così anche era venuta crescendo la sua esperienza di paesi e regioni. Dal nativo Friuli e dal vicino Cadore, era balzato da prima, — chiamato dai suoi nuovi doveri di giovane docente, — alla Sicilia; poi era passato, per la stessa ragione, per le Marche, e finalmente di nuovo in Toscana, professore dove pochi anni prima, soltanto, era stato studente. Ma Firenze non poteva essere una meta, dove fissarsi quietamente: divenne il centro per escursioni in ogni parte d'Italia; e poi più lontano, sempre più lontano: in America, ho detto, ma anche in Eritrea ed in Dancalia, in Cirenaica ed in Egitto e in Palestina, a Rodi e nel Dodecanneso, nel Tibet occidentale e nel Turchestan cinese. E da tutti questi viaggi riportò sempre messe larga di osservazioni, feconda di nuovi studi.

La sua esperienza era ormai così vasta, che bene potevamo attenderci da Lui qualche poderoso lavoro di sintesi scientifica, nel quale rimanesse la impronta di idee e interpretazioni sue. Il destino triste ce lo ha negato. E quanto ci abbia, anche per questo, tolto, lo dimostra quell'Atlante dei Tipi, il quale consiste essenzialmente in una scelta e in uno stralcio di carte topografiche dell'Istituto Geografico Militare, ciascuna rappresentante tipicamente uno o l'altro dei molteplici fenomeni onde l'Italia è così ricca e varia di esempi: ma ciascuna carta accompagnata da note, brevi ma dense, nelle quali appare la dottrina, il metodo, la profonda esperienza, che facevano di Olinto Marinelli veramente un grande geografo. E così ci apparirà nuova-

mente anche quando sarà pubblicato, tra breve, quell'Atlante Internazionale del Touring, che ci affrancherà da quella ammirazione, ormai consuetudinaria, anche se non sempre meritata, verso i grandi Atlanti stranieri.

Grande geografo: anche, però, geografo completo. Olinto Marinelli, infatti, come fu essenzialmente scienziato, — nella preparazione, nei fini e nel metodo, — sia che si occupasse delle forme del terreno e di qualsiasi fenomeno fisico, sia che ponesse la sua attenzione a fatti umani, — toccò anche, con quell'acume che era suo proprio, la storia della sua scienza, e la storia della rappresentazione cartografica di questa nostra Terra: ben diverso però da quelli, che si illudono di essere veri geografi, sol perchè vanno sottilmente interpretando e criticando vecchie carte o vecchie relazioni di viaggio. Perchè la Geografia è scienza, è scienza pura, anche, se, forse più di molte altre, aderisce strettamente alla vita e di questa, — degli individui, delle Nazioni e degli Stati, — penetra quasi ogni esterna manifestazione. Per questo essa dovrebbe essere maggiormente conosciuta ed amata. E per farla meglio conoscere e amare, molto si adoprò Olinto Marinelli: con testi e atlanti scolastici, con letture per la prima giovinezza, con articoli di divulgazione. E molto si adoprò, anche, per correggere ordinamenti scolastici, ormai superati dai progressi, direi quasi dalla evoluzione della scienza.

Per parlare di Olinto Marinelli, — quando non si voglia partitamente esaminare la sua opera, quale appare dalle varie centinaia di suoi scritti, — si può e si deve essere brevi, perchè il giudizio, che di Lui sinteticamente si può dare e che non cambierà col tempo, è ch'Egli fu geografo grande e completo. Quello che non sapranno, meglio non conosceranno per diretto beneficio, i più giovani, i futuri, si è la sua grande bontà, che pareva infinita come il suo sapere, e che lo faceva prodigo con tutti, — di consigli, di aiuti, di ammaestramenti, — come un gran signore. Non conosceva ambizioni, non invidie, non desideri che toccassero soltanto la sua persona: pareva che visse soltanto per la scienza. Tutto per essa, niente per sè. E con sacrificio di sè, infatti, e delle sue forze non sempre salde, per essa ispirava, e consigliava e dirigeva qualsiasi iniziativa che alla scienza e al suo progresso e alla sua divulgazione potesse portare giovamento. Tutti ricorderanno la sua serenità buona e sorridente, pronta e paziente, anche quando i molteplici doveri più rendevano affannosa la sua esistenza; pochi forse, però, sanno, — come io so, che più ho avuto la ventura di essergli vicino, — lo spirito di sacrificio ch'Egli, per la gran bontà, poneva nel portare, a tutto ed a tutti, il suo aiuto senza condizioni e senza limiti. Per questo ricordo, dell'amico fedele che ci manca, il dolore per la sua dipartita non potrà attenuarsi. Ma anche ci sgomenta il pensiero che non vi è all'orizzonte chi possa sostituirlo, degnamente, nella sua opera di maestro e di studioso, perchè la Geografia italiana mantenga quel livello al quale, per opera sua, era salita.

Commemorazione del Socio straniero C. Neumann

letta dal Socio C. SOMIGLIANA nella seduta del 3 aprile 1927.

Pochissimi uomini raggiungono l'età, a cui è arrivato Carlo Neumann; forse nessuno fra gli uomini di scienza ha avuto un periodo di feconda attività per durata paragonabile al suo. Nacque a Königsberg il 7 maggio 1832 dall'illustre fisico e mineralogista Franz Neumann, cosa anche questa assai rara, che si trasmettano da padre in figlio le attitudini alla ricerca scientifica; morì a Lipsia il 27 marzo 1925, prossimo quindi a compiere i 93 anni. La sua attività di scienziato incominciata nel 1856, ha dato gli ultimi bagliori nel 1924, l'anno precedente alla morte, e si è svolta così ininterrottamente per quasi settanta anni.

La sua vita può essere un argomento a dimostrare come il lavoro scientifico ordinato e tranquillo, anche se molto intenso, può costituire una base sicura per lo svolgimento completo di tutte le umane energie. Le immagini che di lui possediamo ci danno l'idea di una rude vigoria, quasi selvaggia.

Egli fu esclusivamente un cultore della scienza; nulla lo distrasse dalle sue ricerche predilette. La sua vita fu ben poco movimentata; egli era, dice un suo biografo connazionale, un perfetto rappresentante del professore tedesco di *vecchio stile*; per il quale il lavoro scientifico era *die Hauptsache*, il campo unico, coordinato all'insegnamento, della sua attività.

Insegnò successivamente nelle Università di Halle, di Basilea e di Tübinga; nel 1868 fu chiamato a Lipsia, ove rimase fino all'epoca in cui andò a riposo nel 1911, a 79 anni.

Egli fu un cultore appassionato dell'analisi applicata alla fisica, sebbene al suo ingegno non mancassero intuizioni geometriche, e si mantenne sempre fedele alla fisica matematica classica, sviluppatasi specialmente nella prima metà del secolo scorso, la quale ha raccolto tanti successi, ha dato origine ed impulso di vita a svariati rami dell'analisi pura, e costituisce anche ora uno degli edifici dottrinali più completi ed armonici, sul quale forse potranno ancora fondarsi le teorie nuove che i progressi recenti delle scienze sperimentali vanno reclamando.

Sotto questo punto di vista Carlo Neumann ha una notevole affinità col nostro Beltrami, sia per l'oggetto delle sue ricerche ed i metodi preferiti, sia per un continuo sforzo di chiarezza e di eleganza. Non raggiunse forse quella perfezione che può dirsi artistica del matematico italiano, anzi il desiderio di chiarezza e di semplicità lo portò talvolta ad una prolissità che ha, almeno per noi, un effetto opposto; ma lo superò nella larga opera

di volgarizzazione e di diffusione delle teorie, a cui dedicò una diecina di trattati, alcuni assai estesi, riguardanti l'analisi, la meccanica, la fisica matematica e aventi notevoli impronte di originalità.

Lunghissima opera sarebbe anche il voler semplicemente riassumere la produzione estesissima del Neumann, di cui alcuni risultati sono divenuti parte così integrante della scienza attuale, che si ripetono senza più citare il suo nome. Una grande benemerenzza egli ha anche nel campo dell'analisi pura, poichè le sue *Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale*, pubblicate nel 1865 e che ebbero poi parecchie ristampe, hanno grandemente contribuito a rendere accessibile il concetto delle superficie riemanniane a fogli sovrapposti, nella rappresentazione delle funzioni plurivalenti, che era dapprima sembrato una delle più profonde, ma anche delle più astruse concezioni di quel grande analista.

Il campo però nel quale l'attività del Neumann si svolse con assoluta prevalenza fu la teoria del potenziale e le sue applicazioni a quistioni fisiche. In questo egli si trovò sulla direttiva stessa del Beltrami, che gli fu amico ed ebbe con lui frequenti rapporti, originati dalla comunanza di indagini. In una Memoria dedicata allo studio delle discontinuità delle funzioni potenziali, il Beltrami dimostra alcuni teoremi enunciati dal Neumann, e lo riconosce come *promotore indifesso* della fecondissima teoria del potenziale.

Il nostro autore esordì in questo campo collo studio di alcuni problemi particolari, la distribuzione della elettricità sopra un ellissoide, la distribuzione del calore e dell'elettricità in un anello, il problema della temperatura stazionaria in un corpo limitato da due superficie sferiche non concentriche e molti altri problemi dello spazio e del piano.

Poi studiò gli sviluppi classici in serie della fisica matematica, cioè le serie di funzioni trigonometriche sferiche e cilindriche, a cui dedicò anche due trattati, perfezionandone i fondamenti e aggiungendo notevoli generalizzazioni. Egli approfondì anche le quistioni delicate e difficili della convergenza di questi sviluppi.

Ma le ricerche che più assorbirono la sua attività nella teoria del potenziale, e che lo portarono ad un risultato che rimane indissolubilmente legato al suo nome, sono quelle intorno alla risoluzione del problema di Dirichlet, ed alla dimostrazione della effettiva esistenza della soluzione. Poichè il metodo da lui seguito e denominato, della *media aritmetica*, porta bensì alla effettiva costruzione della funzione che si tratta di determinare, ma sotto una forma che non si presta nè a calcoli aritmetici, nè allo studio delle sue proprietà analitiche. Il valore del risultato è tutto nella dimostrazione dell'esistenza, che le obiezioni di Weierstrass alla dimostrazione del principio di Dirichlet rendevano necessaria.

Il metodo di Neumann è in sostanza un metodo di approssimazioni successive. A partire da una prima funzione potenziale di doppio strato che ha un momento proporzionale ai valori della funzione incognita dati sulla su-

perficie del contorno, si costruiscono successivamente altre funzioni potenziali di doppi strati per ciascuna delle quali i momenti sono proporzionali ai valori superficiali interni od esterni delle funzioni precedenti. Si può così dimostrare che gli intervalli di variabilità dei valori superficiali di queste funzioni vanno successivamente decrescendo, secondo un rapporto che è una costante dipendente soltanto dalla forma del campo considerato. Il Neumann chiama questa la *Konfigurationskonstante* ed alla dimostrazione della sua reale esistenza, da cui dipende la convergenza del procedimento, egli ha dedicato lunghe ricerche, per rendere sempre più rigoroso e generale il ragionamento.

Gli ultimi lavori che riassumono i risultati ottenuti sono due ampie « Abhandlungen della Sächsiscke Gesellschaft der Wissenschaften » di Lipsia, pubblicate nel 1887-88 col titolo: *Ueber die Methode der arithmetische Mittels*.

Sullo stesso argomento poi ritornò assai più tardi nel 1901, dopo che le ricerche del Poincaré avevano portato ad estendere la validità dei risultati da lui raggiunti.

Questi procedimenti di Neumann ebbero anche il merito di aprire la via ai metodi più recenti basati sulla teoria delle equazioni integrali, e che hanno avuto poi così largo successo.

Della teoria delle azioni a distanza, da cui ha avuto origine la teoria del potenziale, egli ha compiuto anche una generalizzazione assai notevole, proponendosi la ricerca generale delle leggi elementari di azione centrale, per cui sia conservata la possibilità dell'equilibrio elettrostatico. Egli trovò che il potenziale elementare newtoniano può essere moltiplicato per un fattore esponenziale, avente per esponente il prodotto della distanza per una costante negativa. A questa legge pose il nome di *Exponentialgesetz*, e vi dedicò larghe ricerche, estendendo alla teoria, che ne deriva, una gran parte delle proprietà del potenziale newtoniano. All'equazione di Laplace viene allora sostituita l'equazione

$$\Delta_2 V = \alpha^2 V$$

ove α è la costante che nell'esponenziale compare negativamente. Quando la costante α sia molto grande, la differenza col potenziale ordinario è piccolissima e si rende così manifesta la possibilità di una teoria delle azioni a distanza numericamente pochissimo differente, ma analiticamente assai diversa dalla ordinaria.

Egli cercò anche di estendere a questi nuovi potenziali il suo metodo d'integrazione della media aritmetica.

Nel 1873 il Neumann aveva cominciato a pubblicare una voluminosa opera dal titolo: *Die elektrische Kräfte*, nella quale vengono esposte, discusse ed anche ampliate le teorie di Ampère, Weber, Kirchhoff, e di suo padre Franz Neumann, sulle azioni elettromagnetiche ed elettrodinamiche. Sempre orientato verso il concetto delle azioni a distanza egli cerca di formulare

una legge elementare d'azione fra due elementi di elettricità in movimento, che s'accordi colle azioni integrali elettromotrici o ponderomotrici, quali risultano dalle leggi fisiche conosciute. Non è sostanzialmente un problema nuovo poichè Gauss e Weber già ne hanno proposto varie soluzioni, ma egli vi introduce dei concetti diversi dai soliti ed immagina dei procedimenti di propagazione delle azioni a distanza che si scostano dagli ordinari.

A proposito di queste teorie è interessante leggere quello che ne scrive Maxwell, il grande promotore della concezione dei fenomeni elettrici, in certo modo opposta, in quanto basata sulla eliminazione dell'azione a distanza. Alla fine del secondo volume del suo celebre *Treatise* egli dice:

« ... per comprendere la teoria di Neumann noi dobbiamo rappresen-
« tarci il modo di trasmissione del potenziale in modo ben differente da
« quello che noi abbiamo l'abitudine di considerare nella propagazione della
« luce. Si potrà mai accettare questa concezione come la *construirbare Vor-*
« *stellung*, la rappresentazione realizzabile, del modo di trasmissione che sem-
« brava necessario a Gauss? Io non saprei dirlo; ma da parte mia io non
« sono mai stato capace di combinare nel mio spirito e di rappresentarmi
« un'immagine avente qualche connessione colla teoria di Neumann ».

Maxwell naturalmente aveva presente il suo modo di concepire le azioni elettriche e la partecipazione del mezzo al fenomeno. Tuttavia conviene riconoscere che la propagazione del potenziale concepito da Neumann si presenta, almeno dal punto di vista matematico, come naturale e spontanea.

Il diffondersi delle nuove vedute basate sulle concezioni di Faraday e di Maxwell ed i grandi risultati a cui hanno portato nel campo delle teorie elettromagnetiche, non solo non trovarono ostile il Neumann, la cui mente era sempre stata orientata sul concetto di azione a distanza, ma ne attrassero lo spirito di indagine. Egli si diede anzitutto alla ricerca di un *experimentum crucis*, che decidesse della solidità dei concetti nuovi o degli antichi, cosa, per verità, quasi superflua, dopo i larghi successi sia nel campo teorico che in quello sperimentale delle idee maxwelliane. Ma poi seguendo il suo costante indirizzo, si dedicò a rielaborare le nuove teorie, sempre assetato di chiarezza e di precisione. Risultato di questo lavoro sono tre grosse Memorie: *Ueber die Maxwell-Hertz'sche Theorie*, pubblicate nelle « Abhandlungen della Sächsischen Akademie » dal 1902 al 1904. In esse ogni dettaglio della teoria è sottoposto ad un lungo lavoro di rifacimento e di perfezionamento, senza del quale, egli pensa, non è possibile giudicare, nè dell'origine di una teoria, nè del suo significato, nè del suo avvenire.

Non dobbiamo infine lasciare da parte le ricerche del nostro autore nel campo dell'idrodinamica e della meccanica. Le sue *Hydrodynamische Untersuchungen* costituiscono un ampio volume in cui sono esposte le ordinarie teorie del moto dei fluidi ed è particolarmente studiata la possibilità di applicare il principio di Hamilton a questi movimenti.

Particolarmente interessanti sono anche le ricerche sui fondamenti della

meccanica, dirette a precisare il concetto di spostamento virtuale ed a dimostrare, in determinate condizioni, il principio fondamentale della meccanica basato su tale concetto.

Si occupò anche, con genialità di vedute, del problema del moto assoluto, non già per metterne in dubbio od asserirne la effettiva esistenza, ma per precisarne il significato secondo Galileo e Newton. Non gli sembra sufficiente come definizione la classica asserzione newtoniana: *Tempus absolutum, verum et mathematicum, in se et natura sua, absque relatione ad externum quodvis, aequabiliter fluit*. E nel suo sistema di postulati il concetto di tempo, almeno esplicitamente, scompare. Vi si sostituisce il concetto di una certa connessione - Verknüpfung - geometricamente definita, fra tutti i processi che avvengono nell'Universo, basandosi sulla legge d'inerzia. Un sistema fondamentale di riferimento, un corpo *alpha*, così è chiamato, viene ammesso come postulato, che il Neumann considera come una enigmatica e complicata legge universale.

E soggiunge: « l'ammettere l'esistenza di questo corpo *alpha*, che si nasconde alla nostra vista, non è certo cosa gradevole; ma vi sono stati portati da una specie di necessità i più grandi ricercatori, come Keplero, Galileo e Newton. E d'altra parte di fronte alla natura, noi non siamo maestri, ma scolari, e dobbiamo accettare ciò che ci viene offerto, sia esso gradevole o non gradevole ».

È interessante leggere queste considerazioni del vecchio fisico-matematico, scritte a quasi 80 anni, ritornando sopra un argomento del quale si era occupato quarant'anni prima, e ci danno un'idea del suo atteggiamento di pensiero al sorgere delle nuove teorie, che hanno cercato di rendere la meccanica indipendente dal suo corpo *alpha*.

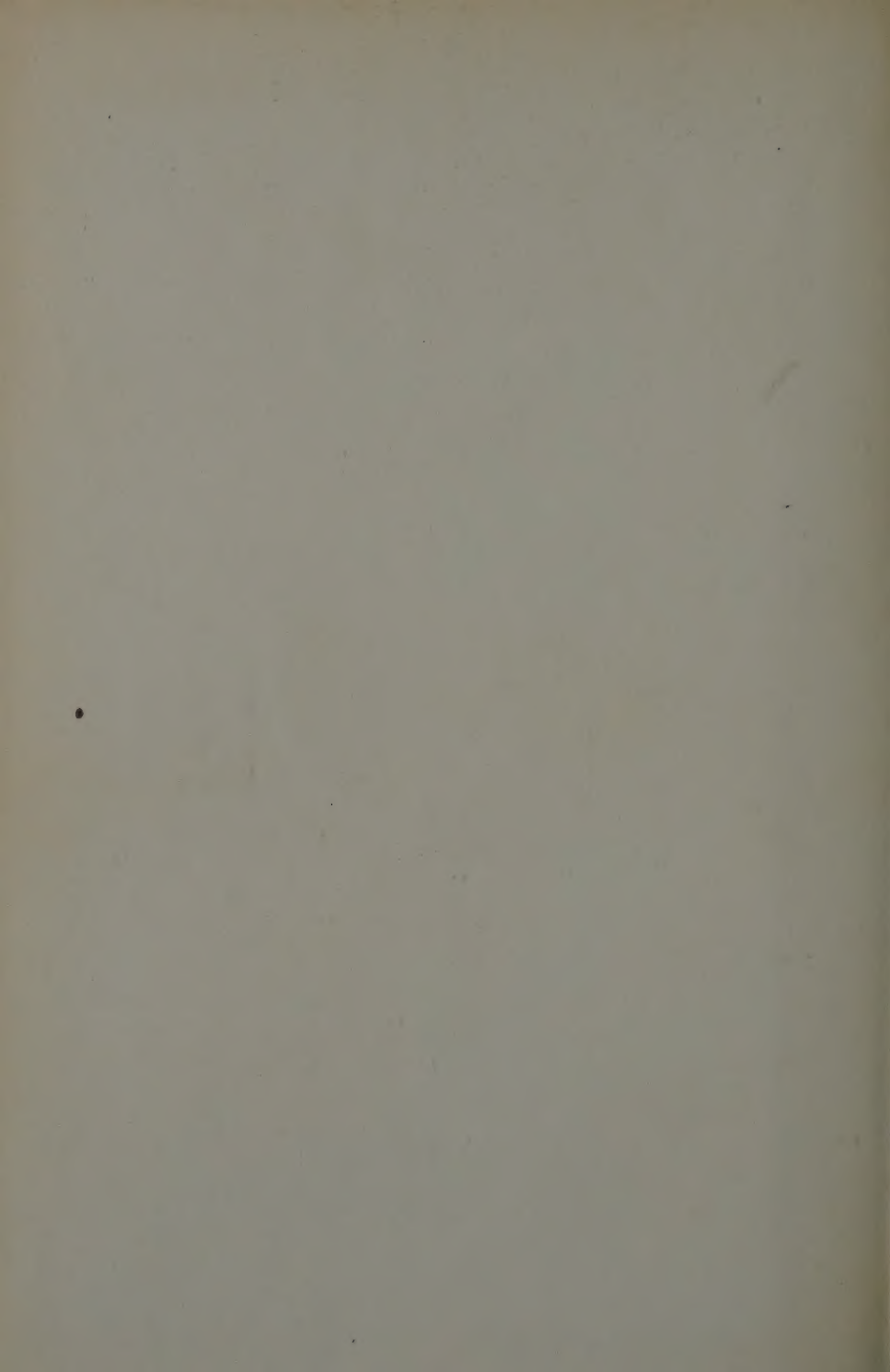
Tali considerazioni non hanno certamente alcun valore probativo a favore delle antiche o delle nuove teorie, ma contengono implicito un prezioso insegnamento ed è che, sia per fondare, che per distruggere, nuove teorie, è anzitutto necessario avere un ben chiaro concetto sia delle une che delle altre, e conoscere il significato dei postulati che ne costituiscono il fondamento.

Da parte sua Carlo Neumann, conviene esplicitamente riconoscerlo, ha fatto tutto il possibile per chiarire i fondamenti delle teorie che ha seguito, durante la sua lunga e luminosa carriera, e si è mantenuto costantemente fedele alla sua bandiera.

La sua copiosissima produzione scientifica che abbraccia quasi tutto il largo campo della fisica matematica, e parti essenziali dell'analisi e della meccanica, e di cui non abbiamo potuto dare che un'immagine frammentaria, rimarrà come un modello di indagine scientifica coscienziosa, sincera, penetrante, a cui potranno in ogni epoca attingere largamente gli studiosi di queste fondamentali discipline.

INDICE

Commemorazione del Socio Corresp. A. Peratoner	Pag.	III
» » Socio Corresp. O. Marinelli	»	IX
» » Socio straniero C. Neumann	»	XIII





3 8198 304 935 909

UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO

